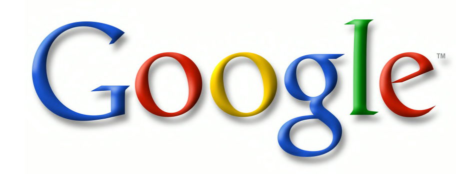



Stanford University Libraries
3 6105 211 438 861




Digitized by Google



SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

JAHRGANG 1926

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1926
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 28. JANUAR 1926
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 1. JULI 1926
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1925 BIS 30. NOVEMBER 1926 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIII. MIT ZWEI TAFELN

BERLIN 1926

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.



Roman Paging sections bound with Philos.-Hist. Klasse.

INHALT

Seite

Verzeichnis der Mitglieder der Akademie der Wissenschaften am 1. Januar 1926 . . . I
Öffentliche Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. am 28. Januar 1926 XVII
Roethe: Ansprache . . . XVII
Roethe: Statutenänderung . . . XXI
Roethe: Personalveränderungen . . . XXII
Heymann: Bericht über das Wörterbuch der deutschen Rechtssprache . . . XXIII
Heider: Bericht über den »Nomenclator animalium generum et subgenerum« . . . XXXII
Spranger: Die Kulturzyklentheorie und das Problem des Kulturverfalls . . . XXXV
Roethe: Schlußwort . . . LIX
Jahresbericht über die griechisch-römische Altertumskunde . . . LX
Jahresbericht über die Sammlung der griechischen Inschriften . . . LX
Jahresbericht über die Sammlung der lateinischen Inschriften . . . LX
Jahresbericht über das griechische Münzwerk . . . LXI
Jahresbericht über die Prosopographia imperii Romani saec. I—III . . . LXII
Jahresbericht über die Preußische Kommission . . . LXII
Jahresbericht über die Herausgabe der Werke von Weierstrass . . . LXIII
Jahresbericht über die Kant-Ausgabe . . . LXIII
Jahresbericht über die Ibn-Saad-Ausgabe . . . LXIII
Jahresbericht über das Wörterbuch der ägyptischen Sprache . . . LXIII
Jahresbericht über das »Tierreich« . . . LXIV
Jahresbericht über den Nomenclator animalium generum et subgenerum . . . LXIV
Jahresbericht über das »Pflanzenreich« . . . LXV
Jahresbericht über die Geschichte des Fixsternhimmels . . . LXV
Jahresbericht über die Leibniz-Ausgabe . . . LXV
Jahresbericht über das Corpus Medicorum Graecorum . . . LXVI
Jahresbericht über die Deutsche Literaturzeitung . . . LXVI
Jahresbericht der Deutschen Commission . . . LXVII
Jahresbericht über die Forschungen zur neuhochdeutschen Sprach- und Bildungsgeschichte LXXIV
Jahresbericht der Orientalischen Kommission . . . LXXV
Jahresbericht der Dilthey-Ausgabe . . . LXXVI
Jahresbericht der Kronecker-Kommission . . . LXXVII
Jahresbericht der Oskar-Mann-Nachlaß-Kommission . . . LXXVII
Jahresbericht des Vocabularium Jurisprudentiae Romanae . . . LXXVII
Jahresbericht der Savigny-Stiftung . . . LXXVIII
Jahresbericht der Hermann-und-Elise-geb.-Heckmann-Wentzel-Stiftung . . . LXXVIII
Jahresbericht der akademischen Commission für das Wörterbuch der deutschen Rechtssprache . . . LXXIX
Jahresbericht der Kirchenväter-Kommission . . . LXXXI
Jahresbericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien LXXXII
Jahresbericht über das Decretum Bonizonis und das Corpus Glossarum Anteaccursianarum . . . LXXXII
Jahresbericht über die Erforschung der Geschichte unserer Nationalitätsgrenze (Forschungen zum Deutschtum der Ostmarken) . . . LXXXII
Jahresbericht über das Deutsche Biographische Jahrbuch . . . LXXXIII
Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages am 1. Juli 1926 . . . LXXXV
Planck: Ansprache . . . LXXXV
Brackmann: Antrittsrede . . . XC
Roethe: Erwiderung . . . XCIII
Wagner: Antrittsrede . . . XCV
Stumpf: Antrittsrede . . . XCVII
Planck: Erwiderung . . . XCVIII
Guthnick: Gedächtnisrede auf Gustav Müller . . . XCIX
Stumpf: Gedächtnisrede auf Müller-Breslau . . . CII
Akademische Preisaufgabe für 1929 . . . CV
Verleihung der Leibniz-Medaillen . . . CVI
Planck: Schlußwort . . . CVII
Verzeichnis der vom 1. Dezember 1925 bis 30. November 1926 eingegangenen Druckschriften . . . CIX

Inhalt

	Seite
ZIMMERMANN: Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung	2
SCHRÖDINGER, E.: Die Energiestufen des idealen einatomigen Gasmodells	23
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung. Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie	39
NERNST und ORTHMANN, W.: Die Verdünnungswärme von Salzen bei sehr kleinen Konzentrationen	51
v. LAUE und MARK, H.: Die Zerstreuung inhomogener Röntgenstrahlen an mikrokristallinen Körpern	58
Adresse an Hrn. WILHELM BRANCA zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Februar 1926	75
HARTWIG, W.: Die Kristallstruktur einiger Mineralien der regulären HgS-Reihe	79
CORRENS, C. W.: Über die Erklärung der sogenannten Kristallisationskraft	81
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen mit Form- und Belastungsfehlern	92
BODENSTEIN: Reaktionsgeschwindigkeit bei Umsetzungen von Atomen	104
SCHOTTKY, W.: Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektrodynamik	116
PASCHEN: Serienenden und molekulare Felder	135
KNESER: Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung	142
HABERLANDT: Über den Blattbau der *Crataegomespili* von Bronvaux und ihrer Eltern	170
WEYL, H.: Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. (Aus einem Schreiben an Hrn. HARALD BOHR.)	211
SCHOTTKY: Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume	215
SZEGÖ, G.: Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen	242
LADENBURG, R., KOPFERMANN, H. und CARST, A.: Untersuchungen über die anomale Dispersion angeregter Gase	255
GUTHNICK, P. und PRAGER, R.: Die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie. (Acht neue Veränderliche kurzer Periode.)	275
Adresse an Hrn. BERNHARD SEUFFERT zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. Juli 1926	292
BIEBERBACH: Über TSCHEBYCHEFsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten	294
JOHNSEN: Form und Brillanz der Brillanten	322
EINSTEIN: Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes	334
RUPP, E.: Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichtes	341
Adresse an Hrn. KARL ROBERT WENCK zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 2. August 1926	354
Adresse an Hrn. KARL VON MÜLLER zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 8. August 1926	356
STUDY: Vereinfachte Begründung von LIES Kugelgeometrie. I.	360
WEISS, E. A.: Zusatz zu dieser Abhandlung	381
RUBNER: Die Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen	384
Adresse an Hrn. GOTTLIEB HABERLANDT zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 11. November 1926	406
BRAUER, R.: Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen	410
FICK: Maßverhältnisse an den oberen Gliedmaßen des Menschen und den Gliedmaßen der Menschenaffen	417
PLANCK: Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik	453
LANDAU: Der PICARD-SCHOTTKYsche Satz und die BLOCHsche Konstante	467
SIMON, F.: Thermische Erregung von Quantensprüngen in festen Körpern	477
SCHUR: Zur additiven Zahlentheorie	488
Namen- und Sachregister	496
Berichtigung	500

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

I. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 7. Januar.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Penck.

1. Hr. Einstein sprach: 1. Über die Ursache des »Mäander«-Phänomens bei Flußläufen (Beeinflussung des mittleren Geschwindigkeitsgefälles am Ufer durch eine von der örtlich verschiedenen Zentrifugalkraft verursachte Zirkulation). 2. Über die Anwendung einer von Rainich gefundenen Spaltung des Riemannschen Krümmungstensors in der Theorie des Gravitationsfeldes (erscheint in der Riemann-Festschrift der mathematischen Annalen).

Rainich hat darauf hingewiesen, daß man den Riemannschen Krümmungstensor in einem vierdimensionalen Kontinuum in zwei Teile zerlegen kann, deren erster für jedes Paar orthogonaler Flächenrichtungen gleiche Krümmung und deren zweiter für jedes Paar orthogonaler Flächenrichtungen entgegengesetzt gleiche Flächenkrümmung liefert. Es wird nun gezeigt, daß der zweite (»antisymmetrische«) Teil in die Form $-\frac{1}{2}(g_{il}G_{km}+g_{km}G_{il}-g_{im}G_{kl}-g_{kl}G_{im})$ gebracht werden kann, wenn $G_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R$ gesetzt wird.

Der Verfasser hat schon früher darauf hingewiesen, daß das kosmologische Problem sowie die Tatsache, daß die Verjüngung des elektromagnetischen Energietensors T_{im} verschwindet, es nahelegen, den Feldgleichungen der Gravitation die Form

$$G_{im}=-kT_{im}$$

zu geben. Diese Form erschien aber bisher vom mathematischen Standpunkte aus als eine wenig natürliche. Der oben angedeutete formale Zusammenhang ist geeignet, die genannte Form der Feldgleichungen mathematisch zu begründen.

2. Hr. Zimmermann legte eine Untersuchung über die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung vor.

Es wird die Biegelinie eines ursprünglich nicht geraden Stabes unter der Annahme ermittelt, daß er einseitig quer- und außerachsig längsbelastet, dabei an den Enden ungleich elastisch eingespannt sei. Dies zu dem Zweck, ein von H. Kayser vorgeschlagenes Verfahren zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes bestehender Bauwerke nachzuprüfen und zu erweitern.

3. Hr. Einstein legte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. Erwin Schrödinger in Zürich vor über »Die Energiestufen des idealen einatomigen Gasmodells«. (Ersch. später.)

Hr. Planck hat eine Quantentheorie des idealen Gases auf die Voraussetzung gegründet, daß der Inbegriff der $N!$ durch Permutation der Moleküle erhaltenen Elementarzustände als ein einziger Elementarzustand zu behandeln sei; er hat neben diesem Prinzip auch noch eine Art Quantisierung der Zustände des einzelnen Moleküls eingeführt. Der Verfasser gründet seine Theorie nur auf Plancks erstgenannte Voraussetzung, führt also keine Quantisierungsregel für die einzelnen Moleküle ein; den Quantenzuständen des Gases entsprechen Zellen des Phasenraumes vom Volumen $N!h^{3N}$.

Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung.

Von H. Zimmermann.

Schon vor längerer Zeit hat Professor H. Kayser (Darmstadt) ein elegantes Verfahren entwickelt, nach dem der Einfluß einer zu der Längsbelastung eines Stabes hinzutretenden Querlast bei verschiedenen Arten der Lagerung in einfacher Weise ermittelt werden kann[1]. Es wird dadurch die Möglichkeit geboten, den Gleichgewichtszustand unter Druck stehender Stäbe mit Hilfe von Querbelastungsversuchen zu erforschen. Der Leiter des Brückenwesens der Reichsbahngesellschaft, Reichsbahndirektor Geheimrat Dr. Schaper, hat neuerdings diesen Gedanken aufgegriffen und beabsichtigt, ihn an bestehenden Brücken zu erproben. Die Zahl der außer den Hauptspannungen auf die Glieder eines Fachwerkes einwirkenden Nebenkräfte ist so groß und ihr Zusammenspiel ist so verwickelt, daß die Theorie sie nur unter mancherlei der Nachprüfung bedürftigen Voraussetzungen erfassen kann. Versuche an einzelnen Stäben reichen hierzu nicht aus, weil gerade die gegenseitige Beeinflussung der Glieder im Bau hauptsächlich in Frage steht. In dieser Richtung können die von der Reichsbahn geplanten Versuche zu einer wesentlichen Stütze für die Theorie der Knickfestigkeit der Stabverbindungen werden.

Für die Auswertung solcher Versuche haben wir die Formeln von Kayser. Dabei könnte man es bewenden lassen, wenn es sich nur darum handelte, Zahlen für bestimmte Bauwerke zu sammeln. Die Wünsche müssen aber weiter gehen, nämlich dahin, Unterlagen für die Vervollkommnung der Theorie zu erhalten, damit die an einzelnen Fällen gewonnenen Erfahrungen auch für andere nutzbar gemacht werden können. Schon zur Beantwortung der Frage: *was* soll gemessen werden, und *woran*? erscheint die Rücksichtnahme auf den Zweck der Messungen und auf die weitere Verwendung der Ergebnisse angezeigt. Die in der Theorie auftretenden Erfahrungswerte sind es also, was man durch Versuche zu ermitteln in erster Linie bedacht sein sollte. Ein Beispiel möge das verdeutlichen. Wenn man die Wirkung des Zusammenhanges zweier Stäbe nur dadurch bestimmt, daß man mißt, wieviel sie verbunden mehr oder weniger tragen als einzeln, so lassen sich daraus keine Schlüsse auf das Verhalten anderer Stäbe ziehen. Wenn man dagegen das Moment mißt oder aus Messungen berechnet, daß der eine Stab im Verbindungs-

[1] Siehe Kayser, »Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegungsfestigkeit«. Zeitschrift d. Ver. Deutscher Ingenieure 1917, S. 92. (Auch Sonderdruck, 9 Seiten 4° mit zahlreichen Bildern.)

punkt auf den anderen bei einer bestimmten Größe der Verdrehung der Enden ausübt, so erhält man die Unterlagen für die Berechnung der Spannziffer m, d. h. eines Maßes für den Grad der Einspannung, mit der der eine Stab unter den obwaltenden Umständen an der Verbindungsstelle auf den anderen wirkt. Das ist ein ähnliches Maß für die Verdrehung wie etwa das Elastizitätsmaß E für die Längenänderung eines Stabes. Eine solche Größe läßt sich auch für andere Fälle nutzbar machen als diejenigen, die zu ihrer Bestimmung gedient haben. In dieser Hinsicht scheinen die Formeln KAYSERS einer Ergänzung bedürftig. Sie sind nämlich abgeleitet mit geschickter Anwendung der Arbeitssätze und tragen die Merkmale dieses Verfahrens an sich, auf die ERNST MACH treffend hingewiesen hat: Was man dabei an Leichtigkeit der Rechnung gewinnt, verliert man an Einblick in die Einzelheiten der Vorgänge[2]. Auf die kommt es aber dem Techniker oft gerade an. Bezeichnend für das Verfahren ist auch, daß KAYSER auf die Natur der Biegelinien seiner Stäbe keine Rücksicht zu nehmen braucht. Irgendeine flach gekrümmte Linie genügt, ob Kreis, Parabel, Sinuslinie oder ähnliches. Für einfache Formen und eng begrenzte Fragen reicht das ohne Zweifel aus. Eine Vergleichsrechnung hat in einem solchen Falle sogar sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des genauen und des Näherungsverfahrens gezeigt. Beim auf Knicken beanspruchten Stabe kommen aber — besonders im Zusammenhange mit anderen Stäben — auch verwickeltere Biegeformen vor. Da kann doch die Frage auftauchen, ob die von KAYSER angewendete Näherung hinreicht.

Solche Erwägungen haben mich veranlaßt, in Anlehnung an KAYSERS Grundgedanken und zu seinem gesicherten Ausbau die Rechnung für den auf Druck beanspruchten und zugleich in der Querrichtung eine Einzellast tragenden Stab einmal streng und mit Berücksichtigung aller aus den Unvollkommenheiten der Ausführung entspringenden wesentlichen Nebenumstände durchzuführen.

I. Abgrenzung der Aufgabe.

Es wird angenommen, der Stab sei nicht ganz gerade, sondern seine Achse sei nach einer Kosinuslinie mit der Gleichung

$$Y = y_0 \cos \pi \frac{x_m + x}{l} \tag{1}$$

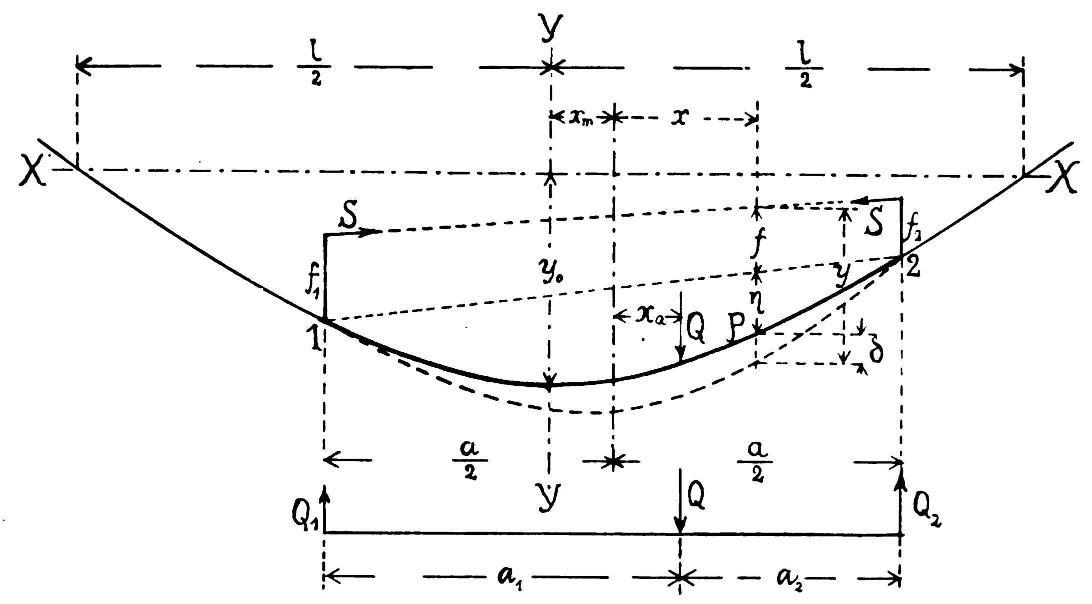
gekrümmt. Hierin bedeutet Y den Abstand eines beliebigen Punktes (x, Y) der Linie von der wagerecht gedachten X-Achse, x den Abstand desselben Punktes von der Y-Achse, y_0 die Scheitelhöhe und l die Länge einer Welle, x_m den Abstand des Scheitels vom Lot durch die Mitte der Stabsehne. Ihre Endpunkte **1** und **2** liegen natürlich auf dieser Linie, die wir in früheren Untersuchungen Fehlerlinie genannt haben.

Durch den Abstand x_m der Stabsehnenmitte von der Y-Achse der Fehlerlinie und durch die Länge a der Stabsehne wird der Teil der Fehlerlinie

[2] ARNOLD SOMMERFELD spricht in einem Vortrage, den er am 3. November 1925 in Kiel gehalten hat, sogar von »unfruchtbarer Energetik«.



bestimmt, der die Anfangsform der Stabachse bildet. Sie kann beliebig viele Wellen oder Teile von ihnen in symmetrischer oder unsymmetrischer Lage gegen die Stabmitte umfassen. Es wird vorausgesetzt, daß die Scheitelhöhe y_0 nur sehr klein sei im Verhältnis zur Stablänge a, daß also die Anfangsform wenig von der Geraden abweicht.



Gekrümmter Stab mit Längs- und Querbelastung.

Aus (1) läßt sich, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, die folgende Gleichung für die Abstände η der Punkte der Stabachse von der Stabsehne 1—2 ableiten[3]:

$$(2)\qquad \eta = y_0\left[\cos\pi\frac{x_m+x}{l} + \left(\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{a}{2l}\right)\frac{2x}{a} - \cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{a}{2l}\right].$$

In beistehendem Bild ist der die Anfangsform der Stabachse darstellende Teil der Fehlerlinie stark, das übrige schwächer ausgezogen. Alle bisherigen Feststellungen gelten für den unbelasteten Zustand, sind also rein geometrischer Art.

Wir nehmen nun weiter an: Im Abstande x_Q von der Stabsehnenmitte wirkt lotrecht eine Einzellast Q. Ihre Auflagerdrucke in den festen Punkten 1 und 2 sind Q_1 und Q_2. Im unteren Teil des Bildes ist das der Deutlichkeit wegen noch einmal besonders dargestellt. Ferner wirken auf die Stabenden 1 und 2 an den Hebelarmen f_1 und f_2 die Längskräfte S auf Druck. Durch Q und die S wird der Stab aus seiner Anfangslage in eine Form gebogen, die im Bild durch eine gestrichelte Kurve angedeutet ist. Der Abstand eines beliebigen Punktes P von der Stabsehne ist in der Anfangslage

[3] Vgl. »Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck«. Sitzungsberichte 1923, S. 198 (Sonderdruck).

$= \eta$, gemäß Gleichung (2). Die beiden Punkte, in denen das Lot durch P die Stabsehne und die Verbindungslinie der Endpunkte der Fehlerhebel f_1 und f_2 — also die Wirklinie der Kräfte S — schneidet, haben den leicht zu berechnenden Abstand

$$(3) \qquad f = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_1 - f_2}{a} x,$$

eine ebenso wie η von der Belastung unabhängige Größe.

Den Abstand des Punktes P von der Wirklinie der Kräfte S nach Eintritt der Ausbiegung bezeichnen wir mit y, die elastische Ausbiegung selber mit $\underline{\delta}$. Es ist also (wie auch das Bild zeigt)

$$(4) \qquad \delta = y - f - \eta.$$

Hiermit dürfte die Bedeutung der in den folgenden Entwicklungen wiederkehrenden Größen soweit klargestellt sein, wie es vor Beginn der Rechnung möglich ist. Übrigens sind neue Zeichen da, wo sie zum ersten Male auftreten, sowie auch wichtigere Gleichungen durch fetteren Druck oder bei griechischen Buchstaben (wegen Mangels von fetter Schrift) durch Unterstreichen hervorgehoben. Zu bemerken bleibt noch, daß die Hebel f geradeso wie die Scheitelhöhe y_0 der Fehlerlinie als sehr klein gegen die Stablänge a vorausgesetzt werden. Da sie meist ungewünscht auftreten, nennen wir sie wie gebräuchlich Fehlerhebel. Im Bild sind sie und die anderen lotrecht gerichteten Größen nur der Deutlichkeit wegen übertrieben groß gezeichnet; alle gerichteten Größen überhaupt in der positiv angenommenen Lage.

Das erste Ziel unserer Aufgabe ist nun die Berechnung der elastischen Ausbiegung δ. Daran reiht sich die Bestimmung der elastischen Neigungsänderungen (Verdrehungen) $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Stabenden 1 und 2. Mit ihrer Hilfe und nach Annahme der zugehörigen Spannziffern $\boldsymbol{m_1}$ und $\boldsymbol{m_2}$ werden sodann die Einspannmomente $\boldsymbol{M_1}$ und $\boldsymbol{M_2}$ berechnet und wird schließlich die Biegelinie des krummen, einseitig quer- und außerachsig längsbelasteten, an den Enden elastisch eingespannten Stabes gefunden.

Schon bei Berechnung der Biegelinie für den nicht eingespannten Stab wird man gewahr, daß sich y mit leicht verständlicher Bezeichnung als Summe dreier Funktionen in der Form

$$(5) \qquad \boldsymbol{y = [Q, S] + [y_0, S] + [f, S]}$$

darstellen läßt. Das heißt: Die Größe y wird erhalten indem man die den Einflüssen der Querlast Q, der Anfangskrümmung mit der Scheitelhöhe y_0, und der Fehlerhebel f_1 und f_2 entsprechenden Teilwirkungen je für sich berechnet und ihre algebraische Summe bildet. Es gilt also für die drei Wirkungen das sogenannte Gesetz der Überdeckung. Dieser Umstand ist von der größten Bedeutung für das Sparen von Rechenarbeit und Raum für die Darstellung, die dadurch zugleich sehr an Übersichtlichkeit gewinnt. Die Funktionen $[y_0, S]$ und $[f, S]$ sind nämlich schon bekannt. Sie liegen in der in Anmerkung 3 genannten Untersuchung



über die Formänderung gekrümmter Stäbe durch Druck fertig vor. Wir können uns also jetzt darauf beschränken, $[Q, S]$ zu entwickeln und mit den beiden anderen Funktionen zusammenzusetzen.

Bemerkenswert ist noch, daß S in allen drei Gliedern von (5) auftritt. Für die Längskraft S gilt also das Überdeckungsgesetz nicht. Das leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, daß sie einen geraden Stab überhaupt nicht verbiegt, sobald sie achsrecht angreift und kleiner ist als die Eulerlast. Ist sie aber dieser gleich, so wird die ganze hier durchgeführte Rechnung nicht nur für die gestellte Aufgabe unverwendbar, sondern auch gegenstandslos, da man einen an der Knickgrenze befindlichen Stab nicht noch querbelasten wird. Wir setzen also voraus, daß S unterhalb der Knicklast liege. Damit soll aber der Entscheidung der Frage, ob ein querbelasteter Stab die Eulersche Knickgrenze überhaupt erreichen kann, nicht vorgegriffen werden. Wir kommen später darauf zurück.

II. Einfluß der Querbelastung.

Die Differentialgleichung der Biegelinie für den achsrecht mit S auf Druck und an einer beliebigen Stelle im Abstand x_Q von der Stabmitte mit der Einzelkraft Q belasteten geraden Stabes lautet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{S}{EJ}y - \frac{M}{EJ}. \tag{6}$$

Hierin bedeutet M das von Q erzeugte Biegemoment. Da M eine lineare Funktion von x ist, so ergibt sich als Stammgleichung

$$y = A\sin\frac{x}{L} + B\cos\frac{x}{L} - \frac{ML^2}{EJ}. \tag{7}$$

Die zur Abkürzung mit L bezeichnete, in der weiteren Rechnung sehr häufig wiederkehrende Größe hat den Wert einer Länge, nämlich

$$L = \sqrt{\frac{EJ}{S}} = \frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{K}{S}}, \tag{8}$$

wo K die Eulersche Knicklast für den geraden Stab von der Länge a mit frei drehbaren Enden.

Um den Satz zu vereinfachen und weniger sperrige Formeln zu bekommen, werden in der Folge die den Nenner L enthaltenden Brüche durch die dem Zähler entsprechenden griechischen Buchstaben ersetzt; also z. B.

$$\frac{x}{L} = \underline{\xi}; \quad \frac{a}{L} = \pi\sqrt{\frac{S}{K}} = \underline{\alpha}. \tag{9}$$

Die Größen A und B in (7) sind die Integrationsfestwerte. Bei ihrer Bestimmung ist zu beachten, daß das Moment nicht über die ganze Stablänge stetig verläuft. (Die Fläche von M wird ja bekanntlich durch ein Dreieck mit der Stabsehne als Grundlinie und der Spitze in der Wirklinie von Q dargestellt.)

Infolgedessen hat auch die Biegelinie (7) im Angriffspunkt von Q eine Unstetigkeit. Ihre beiden in diesem Punkte zusammenstoßenden Zweige müssen wir daher einzeln weiter behandeln, wobei zuerst ihre Integrationsfestwerte zu bestimmen sind. Das erfordert die Darstellung von M als Funktion von x.

Führt man die schon durch das Bild erklärten Abkürzungen

$$(10) \qquad \mathbf{Q}_1 = Q\frac{a_1}{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_2 = Q\frac{a_2}{a}$$

ein, so wird für den Zweig

$$(11) \qquad \overbrace{M = Q_1\left(\tfrac{1}{2}a + x\right)}^{\text{links von } Q};\quad \overbrace{M = Q_2\left(\tfrac{1}{2}a - x\right)}^{\text{rechts von } Q}.$$

Für die Ermittlung der Integrationsfestwerte sind folgende Bedingungen maßgebend: Da y, wie das Bild im vorigen Abschnitt zeigt, von der Verbindungslinie der Endpunkte der Fehlerhebel aus gemessen wird, diese aber jetzt zu Null angenommen sind, so muß sich auch y aus (7) für die Stabenden, d. h. mit

$$x = -\tfrac{1}{2}a \quad \text{und} \quad x = +\tfrac{1}{2}a$$

zu Null ergeben. Ferner muß die Höhe y und die Neigung ν der Stabachse in dem beiden Zweigen der Biegelinie gemeinsamen Punkte, also für

$$x = x_Q,$$

gleich sein. Das sind vier Bedingungen für die Festwerte

des $\underbrace{A_1;\ B_1}_{\text{linken}}$ und $\underbrace{A_2;\ B_2}_{\text{rechten}}$ Zweiges.

Die Bedingungsgleichungen sind abzuleiten für den linken Zweig

aus

$$(12)\begin{cases} [\mathbf{Q}, \mathbf{S}] \equiv y = A_1 \sin\xi + B_1 \cos\xi - (\mathbf{Q}_1 : \mathbf{S})\left(\tfrac{1}{2}a + x\right); \\ \qquad \nu = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{L}(A_1 \cos\xi - B_1 \sin\xi) - (\mathbf{Q}_1 : \mathbf{S}); \end{cases}$$

und

für den rechten Zweig

aus

$$(13)\begin{cases} [\mathbf{Q}, \mathbf{S}] \equiv y = A_2 \sin\xi + B_2 \cos\xi - (\mathbf{Q}_2 : \mathbf{S})\left(\tfrac{1}{2}a - x\right); \\ \qquad \nu = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{L}(A_2 \cos\xi - B_2 \sin\xi) + (\mathbf{Q}_2 : \mathbf{S}). \end{cases}$$

Verfährt man hiermit wie vorher angegeben, so erhält man zunächst für jeden Zweig eine Gruppe von drei Gleichungen, die sich aber durch die Bedingung, daß y und ν für $x = x_Q$ in beiden Zweigen denselben Wert haben müssen, auf vier vermindern. Für die Auflösung bietet es einen Vorteil, nicht

die Größen A und B selber, sondern zuerst ihre Summen und Unterschiede als Unbekannte zu betrachten, also z. B. zu setzen

$$A_1 - A_2 = \Delta A; \quad A_1 + A_2 = \Sigma A: \quad B_1 - B_2 = \Delta B; \quad B_1 + B_2 = \Sigma B.$$

Danach ergeben sich daraus auch die Einzelwerte leicht.

Ferner empfiehlt es sich, für die Ausdrücke in Q_1 und Q_2, von denen die A und B Funktionen sind, abkürzende Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen als solche

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{Q_1 - Q_2}{S}\, {}^1\!/_2 a + \dfrac{Q_1 + Q_2}{S}\, x_Q = q_1; \\ \text{und} \qquad \dfrac{Q_1 + Q_2}{S}\, L = q_2. \end{cases}$$

Damit erhält man auf dem beschriebenen Wege die folgende Gleichungsgruppe, in der die zur Vereinfachung des Satzes angewendeten Zeichen

$$(15) \quad \begin{cases} \qquad\qquad\qquad \mathbf{sin} \quad \text{und} \quad \mathbf{cos} \\ \text{die Bedeutung } \sin(x_Q : L): \quad \cos(x_Q : L) \text{ haben.} \end{cases}$$

$$\textbf{(16)} \quad \begin{cases} 2A_1 = \quad q_1 \sin + q_2 \cos + (q_1 \cos - q_2 \sin) \cos \alpha/2 : \sin \alpha/2 \\ 2A_2 = -q_1 \sin - q_2 \cos + (q_1 \cos - q_2 \sin) \cos \alpha/2 : \sin \alpha/2 \\ 2B_1 = \quad q_1 \cos - q_2 \sin + (q_1 \sin + q_2 \cos) \sin \alpha/2 : \cos \alpha/2 \\ 2B_2 = -q_1 \cos + q_2 \sin + (q_1 \sin + q_2 \cos) \sin \alpha/2 : \cos \alpha/2\,^{1}. \end{cases}$$

Mit dem Einsetzen dieser Werte in (12) und (13) ist die Aufgabe gelöst. Der Leser kann sich dann durch einfache Proberechnungen davon überzeugen, daß die vorher erwähnten Bedingungen für die y und v an den drei Punkten erfüllt sind[5].

III. Der Einfluß der Stabkrümmung.

Über die Art, wie die Achse des Stabes im unbelasteten Zustande von der Geraden abweichend angenommen wird, ist das Erforderliche schon im Abschnitt I gesagt. Das durch eine Verbiegung des Stabes hervorgerufene Moment M_i der inneren Kräfte ergibt sich aus dem Unterschied der Krümmungshalbmesser der Stabachse vor und nach der Biegung zu

$$M_i = -EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

[1] Wegen $\alpha/2$ siehe Gl. (9).

[5] Die auffallende Regelmäßigkeit der Gleichungen (16) ist eine Folge der Annahme eines ganz allgemeinen Belastungszustandes. Sie wird gestört, wenn man einen Sonderfall betrachtet, wie z. B. mit der Last Q in der Stabmitte, obgleich die dann eintretende Symmetrie das Gegenteil erwarten läßt. Man kann diese Wahrnehmung bei ähnlichen Untersuchungen öfter machen. Vgl. Zimmermann, »Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken« S. 14, Fußanmerkung. (Berlin 1910. Wilhelm Ernst & Sohn.)



Wählt man als X-Achse die Wirklinie der Stabkräfte S (also bei Nichtvorhandensein von Fehlerhebeln die Stabsehne), so ist das Moment der äußeren Kräfte nach der Belastung

$$M_a = Sy\,.$$

Im Gleichgewichtszustande muß $M_i = M_a$ sein. Damit ergibt sich nach Ableitung von $d^2\eta : dx^2$ aus (2) im Abschnitt I die Differentialgleichung der Biegelinie

$$\text{(17)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{S}{EJ}\,y - y_0\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos\pi\,\frac{x_m + x}{l}\,.$$

Die Stammgleichung hierzu lautet

$$\text{(18)}\qquad y = A\sin\xi + B\cos\xi + \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{l}{L}\right)^2}\,y_0\cos\pi\,\frac{x_m + x}{l}\,.$$

Die Festwerte A und B ergeben sich aus der Bedingung, daß für die Stabenden, also mit

$$\xi = -\,{}^1\!/_2\alpha \quad\text{und}\quad \xi = +\,{}^1\!/_2\alpha$$

aus (18) der Wert $y = 0$ folgen muß. Man erhält

$$\text{(19)}\qquad \begin{cases} A = y_0\left[\dfrac{1}{1-(S:K_l)}\sin\pi\dfrac{x_m}{l}\sin\pi\dfrac{a}{2l}\right] : \sin\alpha/2 : \\[2ex] B = y_0\left[\dfrac{1}{1-(S:K_l)}\cos\pi\dfrac{x_m}{l}\cos\pi\dfrac{a}{2l}\right] : \cos\alpha/2\,. \end{cases}$$

Den in der Klammer stehenden Bruch bezeichnen wir kurz mit C. Er ist aus der in (18) enthaltenen Form dadurch entstanden, daß wir Zähler und Nenner mit π^2 geteilt und für L seinen Wert aus (8) gesetzt haben. So ergibt sich

$$\text{(20)}\qquad C = \frac{1}{1-\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{S}{EJ}} = \frac{1}{1-(S:K_l)}\,,$$

wenn unter

$$\text{(21)}\qquad K_l = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ$$

diejenige Kraft verstanden wird, die einen geraden Stab von einer Länge gleich der Wellenlänge der Fehlerlinie und mit einem Querschnitt gleich dem des gegebenen Stabes bei freier Drehbarkeit der Enden und achsrechtem Angriff an die EULERsche Knickgrenze bringen würde.

Führt man die A und B mit dieser Vereinfachung aus (19) in (18) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung der Biegelinie, aber mit Einschluß der durch (2) bestimmten Pfeilhöhen η des in den Bereich der Stablänge fallenden Teiles der Fehlerlinie. Diese sind also nach den Ausführungen unter I noch von



y abzuziehen. Der Rest ist in (4) wie in früheren Arbeiten und im Bild mit δ bezeichnet, um deutlich hervortreten zu lassen, daß nicht die unter dem Einfluß der Stabkräfte S erscheinende Endform im ganzen, sondern nur ihre Abweichung von der Anfangsform bestimmt werden soll. Dies aus dem Grunde, weil man bei Belastungsversuchen in der Regel nur die elastische Ausbiegung messen kann, während die anfänglichen Abweichungen der Stabachse von der Geraden unbekannt bleiben[6]. Wir dürfen hier dem δ die in (5) für den zweiten der drei Bestandteile von y gewählte Bezeichnung beilegen und können dann nach Ausführung der oben erwähnten Rechnung schreiben

$$(22)\quad [y_0, S] = \underline{\delta} = y_0\left[C\frac{\sin\xi}{\sin a/2} - \frac{2x}{a}\right]\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{a}{2l} - y_0\left[C\frac{\cos\xi}{\cos a/2} - 1\right]\cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{a}{2l} + y_0\left[C - 1\right]\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right).$$

Außer δ brauchen wir noch die elastische Neigungsänderung ν der Stabachse. Sie ergibt sich nach der Gleichung

$$\nu = \frac{d\delta}{dx}$$

wie folgt:

$$(23)\quad \underline{\nu} = \frac{d\delta}{dx} = y_0\left[\frac{C}{L}\frac{\cos\xi}{\sin a/2} - \frac{2}{a}\right]\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{a}{2l} + y_0\left[\frac{C}{L}\frac{\sin\xi}{\cos a/2}\right]\cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{a}{2l} - y_0\left[C - 1\right]\sin\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right)\frac{\pi}{l}.$$

Damit ist der Einfluß der Stabkrümmung bestimmt.

IV. Der Einfluß der Fehlerhebel.

Die Gleichung, die diesen Einfluß bestimmt, ist seit langer Zeit bekannt. Sie wird meist unter der Annahme abgeleitet, daß beide Hebel gleich seien[7]. Sie läßt sich für ungleiche Hebel in einfachster Weise dadurch aus (7) ge-

[6] Wenn es sich dagegen um Berechnung der im Stabe hervorgerufenen Spannungen handelt, dürfen die γ nicht abgezogen werden. Sie sind also dann den etwa gemessenen elastischen Ausbiegungen zuzuzählen.

[7] Darauf läuft es offenbar hinaus, wenn man einen an einem Ende eingespannten Stab betrachtet, auf dessen anderes Ende eine am Hebel f angreifende Druckkraft wirkt. Allgemeiner ist die Aufgabe in der »Bautechnik« 1923, S. 10 u. ff. unter dem Titel »Die Formen der Biegelinie gedrückter Stäbe« behandelt. Die Gleichung (24) findet sich dort (mit etwas anderen Bezeichnungen) auf S. 12 unter (18).

winnen, daß man y zunächst auf die Wirklinie der Stabkräfte S bezieht, und die Bedingung dafür aufstellt, daß es für die Stabenden, also

bei $x = -{}^1/_2 a$ und $x = +{}^1/_2 a$

den Fehlerhebeln f_1 und f_2

gleich sein muß. (Vgl. das Bild.) Zieht man von der so gefundenen Gleichung die durch (3) im Abschnitt I bestimmte Größe f ab, so erhält man die auf die Stabsehne bezogene Gleichung der Biegelinie des geraden, durch die Stabkraft S mit den Fehlerhebeln f_1 und f_2 auf Druck beanspruchten Stabes in der Form

$$(24)\quad \begin{cases} [f, S] = y = \dfrac{f_2 - f_1}{2}\left(\dfrac{\sin\xi}{\sin\alpha/2} - \dfrac{2x}{a}\right) + \dfrac{f_2 + f_1}{2}\left(\dfrac{\cos\xi}{\cos\alpha/2} - 1\right); \\ \nu = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_2 - f_1}{2L}\left(\dfrac{\cos\xi}{\sin\alpha/2} - \dfrac{2}{a}\right) - \dfrac{f_2 + f_1}{2L}\left(\dfrac{\sin\xi}{\cos\alpha/2}\right). \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ist hinzugefügt wegen des wichtigen Gebrauches, der sogleich von ihr gemacht werden soll. Zur Bestimmung des Einflusses elastischer Einspannungen der Stabenden 1 und 2 bedürfen wir nämlich der Kenntnis der Neigungsänderungen für diese Punkte. Bezeichnet man sie mit

$\underline{\nu}_1$ und $\underline{\nu}_2$

so findet man mit $x = -{}^1/_2 a$ und $x = +{}^1/_2 a$ aus (24) die Gleichungen

$$\nu_1 = \frac{f_2 - f_1}{2a}\left(\alpha\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} - 2\right) + \frac{f_2 + f_1}{2a}\alpha\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2};$$
$$\nu_2 = \frac{f_2 - f_1}{2a}\left(\alpha\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} - 2\right) - \frac{f_2 + f_1}{2a}\alpha\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}.$$

Sie lassen sich leicht auf die Form

$$(25)\quad \begin{cases} \underline{\nu}_1 = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\tang\alpha}\right)\dfrac{f_1}{a} + \left(\dfrac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right)\dfrac{f_2}{a} = t\dfrac{f_1}{a} + s\dfrac{f_2}{a}; \\ \underline{\nu}_2 = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\right)\dfrac{f_1}{a} + \left(\dfrac{\alpha}{\tang\alpha} - 1\right)\dfrac{f_2}{a} = -s\dfrac{f_1}{a} - t\dfrac{f_2}{a} \end{cases}$$

bringen, in der sie die bekannten Feldgleichungen für den geraden Stab mit frei drehbaren Enden darstellen[8].

[8] Der Name »Feldgleichung« ist zum ersten Male angewendet auf S. 892 der Sitzungsberichte von 1921 in dem Aufsatz über den »Einfluß des Vorzustandes auf das Knicken gerader Stäbe« (Sonderdruck). Dort wird auch der Sinn und Zweck dieser Gleichung ausführlich dargelegt und ihre Anwendung auf den Stab mit elastisch eingespannten Enden gezeigt. — »Die Größen s und t der Knicktheorie« sind unter diesem Titel nebst der Art ihrer Berechnung in den Sitzungsberichten für 1923 (S. 55 u. ff.) eingehend besprochen (Sonderdruck). Die Schrift »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« (Berlin 1925, Wilhelm Ernst & Sohn) enthält eine umfangreiche Zahlentafel von s, t und mehreren daraus abgeleiteten Funktionen. Die in den früheren Arbeiten benutzten Zeichen (s) und (t) sind jetzt durch Weglassen der Klammern vereinfacht worden. Die früher mit s und t bezeichneten Größen sind jetzt $s:aS$ und $t:aS$. Trotz der Erwägung, daß solche Änderungen an sich unerwünscht sind, habe ich mich auf Grund längerer Erfahrung doch dazu entschlossen. Der Leser wird gebeten, dies beim Studium der älteren Abhandlungen zu beachten.



Da eine am Hebelarm f wirkende Kraft S gleichwertig ist einem Moment $M = Sf$ in Verbindung mit einer achsrechten Kraft S, und da die f in (25) eine beliebige Größe haben dürfen, so kann man an ihre Stelle auch setzen

$$f_1 + \frac{M_1}{S} \quad \text{u.} \quad f_2 + \frac{M_2}{S}. \tag{26}$$

Damit geht (25) über in

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \quad t\left(\frac{f_1}{a} + \frac{M_1}{aS}\right) + s\left(\frac{f_2}{a} + \frac{M_2}{aS}\right); \\ v_2 &= -s\left(\frac{f_1}{a} + \frac{M_1}{aS}\right) - t\left(\frac{f_2}{a} + \frac{M_2}{aS}\right). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Diese Gleichungen sagen nichts anderes aus als die (25) und sind nur in der Form etwas allgemeiner, so daß sie das Zusammenwirken beliebiger Fehlerhebel und Endmomente — die auch Einspannmomente sein können — deutlicher hervortreten lassen. Die Größen s und t sind mit $S:K$ aus der in Anmerkung 8 genannten Zahlentafel zu entnehmen.

V. Der Einfluß der Endeinspannungen.

Wir nehmen zunächst an, die Enden des Stabes seien nicht eingespannt und bestimmen ihre Neigungen v für den Fall, daß alle bisher untersuchten Einflüsse zugleich wirken. Wir erhalten die v als Summen der aus (12), (13), (23) und (25)

	mit $x = -{}^1/_2 a$	und	$x = +{}^1/_2 a$	
berechneten Werte	v_{01}	und	v_{02},	die wir
allgemein	$\sum v_{01}$	und	$\sum v_{02}$	nennen

wollen. Die Zeiger deuten an, daß sich die v auf die Enden 1 und 2 mit Einspannung Null beziehen. Die Teilwerte mögen bezeichnet werden für die Wirkung der

Querlast Q	mit	$(v_{01})_Q$;	$(v_{02})_Q$;
Krümmung y_0	»	$(v_{01})_{y_0}$;	$(v_{02})_{y_0}$;
Fehlerhebel f	»	$(v_{01})_f$;	$(v_{02})_f$.

Es ist also die Gesamtwirkung

$$\left\{\begin{aligned} \sum v_{01} &= (v_{01})_Q + (v_{01})_{y_0} + (v_{01})_f; \\ \sum v_{02} &= (v_{02})_Q + (v_{02})_{y_0} + (v_{02})_f. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Nun werde der Stab in den Punkten 1 und 2 mit den zunächst unbekannten Momenten M_1 und M_2 eingespannt. Dann ändert sich in beiden Gleichungen nur das letzte Glied, indem die durch (27) bestimmte Wirkung der Einspannmomente hinzutritt. Außerdem sind jedoch die Endneigungs-

summen nicht mehr mit 01 und 02, sondern mit 1 und 2 zu kennzeichnen. Wir erhalten also gemäß (27)

$$(29)\quad \begin{cases} \sum \nu_1 = \sum \nu_{01} + t\dfrac{M_1}{aS} + s\dfrac{M_2}{aS} \\ \text{und } \sum \nu_2 = \sum \nu_{02} - s\dfrac{M_1}{aS} - t\dfrac{M_2}{aS}. \end{cases}$$

Jetzt ist die Art der Einspannung näher festzusetzen[9]. Es sei die Spannziffer m

$$\text{für den } \underbrace{\text{Punkt } 1}_{m_1};\quad \underbrace{\text{Punkt } 2}_{m_2}.$$

Die Momente sind bisher als positiv angenommen, wenn sie den Stab nach oben hohl biegen (s. Bild); die ν bei Drehung »rechtsherum«. Am linken Ende entspricht bei positiver Einspannung der Drehung rechtsherum ein links drehendes, also negatives Gegenmoment M_1; am rechten Ende ebenfalls ein links drehendes, hier aber positives Gegenmoment M_2. Es ist also zu schreiben

$$(30)\quad \underbrace{\text{im Punkt } 1}_{M_1 = -m_1 \sum \nu_1};\quad \underbrace{\text{im Punkt } 2}_{M_2 = m_2 \sum \nu_2}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß sich die Gegenmomente verhalten wie die Drehwinkel. Das entspricht der Annahme einer elastischen Einspannung.

Die Werte aus (30) in (29) einführend, erhält man mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(31)\quad \frac{m_1}{aS} = \mu' \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{aS} = \mu''$$

durch Auflösung nach $\sum \nu_1$ und $\sum \nu_2$:

$$(32)\quad \begin{cases} N \sum \nu_1 = [1 + t\mu''] \sum \nu_{01} + s\mu'' \sum \nu_{02}; \\ N \sum \nu_2 = [1 + t\mu'] \sum \nu_{02} + s\mu' \sum \nu_{01}. \end{cases}$$

Hierin ist die Nennerdeterminante

$$(33)\quad N = [1 + t\mu'][1 + t\mu''] - s^2\mu'\mu'' = 1 + t[\mu' + \mu''] + u\mu'\mu''.$$

Die zur Abkürzung eingeführte Größe u hat die Bedeutung

$$(34)\quad u = t^2 - s^2.$$

Sie ist aus der in Anmerkung 8 erwähnten Zahlentafel zu entnehmen.

Die Gleichungen (32) stellen eine ganz allgemeine Beziehung zwischen den Neigungsänderungen $\sum \nu_{01}$ und $\sum \nu_{02}$ der Enden eines beliebig gestalteten und belasteten Stabes ohne Einspannung, und denen $\sum \nu_1$ und $\sum \nu_2$ der Enden

[9] Ausführliches hierüber findet der Leser am bequemsten in der in Anmerkung 8 genannten Schrift »Knickfestigkeit der Stabverbindungen«.

eines sonst ganz gleich angeordneten, aber mit μ' und μ'' elastisch eingespannten Stabes dar[10].

Nachdem die Werte von $\sum \nu_1$ und $\sum \nu_2$ aus (32) berechnet sind, ergeben sich die Einspannmomente M_1 und M_2 aus (30). Ihre Wirkung entspricht derjenigen zweier Fehlerhebel im Betrage von

$$f' = \frac{M_1}{S} \quad \text{und} \quad f'' = \frac{M_2}{S} . \tag{35}$$

Diese sind den etwa außerdem noch vorhandenen Fehlerhebeln (mit Berücksichtigung der Vorzeichen) zuzuzählen. Die Summe stellt die in (24) einzusetzenden Gesamtfehlerhebel f_1 und f_2 dar. Damit ist der Einfluß, den die Einspannung auf die Größe von y ausübt, bestimmt und die im ersten Abschnitt gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Das Verfahren soll nun durch ein Beispiel veranschaulicht werden.

VI. Beispiel für die Anwendung.

Wenn man ein Beispiel allgemeinster Art vorführen wollte, müßte man zur Zahlenrechnung greifen und selbst dann einen Raum aufwenden, der hier nicht verfügbar ist. Wir machen deshalb einige die Darstellung vereinfachende Annahmen.

Es handle sich um einen Stab mit Anfangskrümmung und elastischer Einspannung, aber mit so geringen Fehlerhebeln, daß ihr Einfluß vernachlässigt werden darf. Ferner sei die Anfangsform der Stabachse symmetrisch zur Mitte und umfasse gerade eine Welle der Kosinuslinie. Dann ist in Gleichung (1)

$$x_m = 0 \quad \text{und} \quad l = a . \tag{36}$$

Auch hinsichtlich der Einspannung herrsche Symmetrie, so daß die Spannziffern

$$m_1 = m_2 = m \tag{37}$$

werden.

Die Querlast Q greife in der Mitte des Stabes an. Es ist also

$$x_Q = 0 \tag{38}$$

zu setzen. Nach (10) wird

$$Q_1 = Q_2 = {}^1/_2 Q \tag{39}$$

und die beiden Zweige des von Q abhängigen Teiles der Biegelinie werden gleich. Wir betrachten weiter nur den rechten Zweig und erhalten aus (13) mit (39) seine Gleichung

$$[Q \,.\, S] = y = A_2 \sin \xi + B_2 \cos \xi - (Q : 2S)\,({}^1/_2 a - x) . \tag{40}$$

[10] Die Gleichungen (32) und (33) sind bei Gelegenheit einer Untersuchung der »Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung« gefunden. S. Sitzungsberichte 1924 S. 285 (Sonderdruck).

Nach (14) wird

(41) $$q_1 = 0; \quad q_2 = \frac{Q}{S} L.$$

Mit (38) und (41) folgt aus (16)

(42) $$A_2 = -\frac{Q}{2S} L; \quad B_2 = \frac{Q}{2S} L \operatorname{tang} \alpha/2.$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet also jetzt nach (40)

(43) $$y = \frac{Q}{2S}[L(\operatorname{tang} \alpha/2 \cdot \cos \xi - \sin \xi) - (^1/_2 a - x)].$$

Da L, ξ und $^1/_2\,\alpha$ nach (8) und (9) bekannt sind, kann die Senkung y jedes beliebigen Punktes der Stabachse leicht aus (43) berechnet werden. Wählt man dafür die Stabmitte, so folgt mit $\xi = 0$ und $a:L = \alpha$:

(44) $$y_m = \frac{Qa}{4S}\left[\frac{\operatorname{tang} \alpha/2}{\alpha/2} - 1\right].$$

Wie an anderer Stelle gezeigt worden, ist

(45) $$\frac{\alpha/2}{\operatorname{tang} \alpha/2} = 1 - \frac{t-s}{2}; \text{ also } \frac{\operatorname{tang} \alpha/2}{\alpha/2} - 1 = \frac{t-s}{2-(t-s)},$$

womit schließlich

(46) $$y_m = \frac{Qa}{4S}\,\frac{t-s}{2-(t-s)}$$

bei Gebrauch der in Anmerkung 8 besprochenen Zahlentafel für die Werte $t-s$ als Funktionen von $S:K$ leicht berechnet werden kann[11].

Der Einfluß der Anfangskrümmung der Stabachse ergibt sich mit (36) ohne weiteres aus den Gleichungen (20) bis (22) wie folgt:

(47) $$[y_0, S] = \delta = y_0 \frac{S:K}{1-(S:K)} \cos \pi \frac{x}{a},$$

und für die Mitte des Stabes

(48) $$\delta_m = y_0 \frac{S:K}{1-(S:K)},$$

wobei K die Eulersche Knicklast für den geraden Stab von der Länge a.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Ermittlung des Einflusses der Einspannung.

Die Querlast erzeugt bei den oben gemachten Annahmen nach (12), (13) und (16) im linken und rechten Zweige die Neigungen

[11] Siehe auch »Die Größen s und t der Knicktheorie« S. 59 Gl. (11) und (12).

(49)
$$\begin{cases} v = \dfrac{Q}{2S}(\cos\xi - \operatorname{tang}\alpha/2\cdot\sin\xi - 1) \\ \text{und } v = -\dfrac{Q}{2S}(\cos\xi + \operatorname{tang}\alpha/2\cdot\sin\xi - 1)\,. \end{cases}$$

Für die Stabenden ergibt sich hieraus mit $\xi = -{}^1/_2\alpha$ und $\xi = +{}^1/_2\alpha$:

(50)
$$v_{01} = \frac{Q}{2S}\left(\frac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right) = -v_{02}\,.$$

Die Stabkrümmung erzeugt nach (23) bei den Annahmen (36) eine elastische Neigungsänderung

(51)
$$v = -y_0\frac{S:K}{1-(S:K)}\frac{\pi}{a}\sin\pi\frac{x}{a}\,,$$

also an den Stabenden mit $x = -{}^1/_2 a$ und $x = +{}^1/_2 a$:

(52)
$$v_{01} = y_0\frac{S:K}{1-(S:K)}\frac{\pi}{a} = -v_{02}\,.$$

Die Summen der gleich benannten Größen in (50) und (52) stellen die in (28) mit $\sum v_{01}$ und $\sum v_{02}$ bezeichneten Werte dar. Sie sind in (32) einzuführen. Diese Gleichungen vereinfachen sich aber, weil nach (37) $m_1 = m_2 = m$ angenommen und infolge der Symmetrie der Stabform und der Belastung in (50) und (52) $v_{01} = -v_{02}$ gefunden wurde. Damit ergibt (32)

(53)
$$\sum v_1 = \frac{\sum v_{01}}{1+(t+s)\mu} = -\sum v_2\,.$$

Jetzt können die Einspannmomente $M_1 = M_2 = M$ aus (30) und die gleichwertigen Hebel $f' = f'' = f$ aus (35) berechnet werden. Mit Einführung der v_{01} und v_{02} aus (50) und (52) folgt nach kurzer Umformung

(54)
$$f = -\frac{\dfrac{Qa}{2S}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right)}{\dfrac{aS}{m} + t + s} - \frac{y_0\pi\dfrac{S:K}{1-(S:K)}}{\dfrac{aS}{m} + t + s}\,.$$

Dieser Wert ist an Stelle von f_1 und f_2 in die erste Gleichung (24) einzusetzen. Das damit berechnete y stellt den Einfluß der Einspannung der Stabenden mit der Spannziffer m für einen beliebigen Punkt im Abstande x von der Stabmitte dar. Da das erste Glied von (24) Null wird, braucht man zur Bestimmung von y nur die rechte Seite von (54) mit $(\cos\xi : \cos\alpha/2) - 1$ zu multiplizieren. Für die Stabmitte wird $\xi = 0$ und ergibt sich

(55)
$$y_m = -\frac{\dfrac{Qa}{2S}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right)^2}{\dfrac{aS}{m} + t + s} - y_0\frac{\dfrac{S}{K}}{1-\dfrac{S}{K}}\,\frac{\pi\left(\dfrac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right)}{\dfrac{aS}{m} + t + s}\,.$$

Wir fügen dem jetzt die unmittelbaren Wirkungen der Querlast Q aus (46) und der Anfangskrümmung aus (48) hinzu und erhalten damit als Summe sämtlicher Einflüsse für die elastische Durchbiegung der Stabmitte den Wert

$$(56)\quad \sum \frac{y_m}{a} = \frac{Q}{4S}\left[\frac{t-s}{2-(t-s)} - 2\,\frac{\left(\frac{1}{\cos\alpha/2}-1\right)^2}{\frac{aS}{m}+t+s}\right] + \frac{y_0}{a}\,\frac{\frac{S}{K}}{1-\frac{S}{K}}\left[1-\pi\,\frac{\left(\frac{1}{\cos\alpha/2}-1\right)}{\frac{aS}{m}+t+s}\right].$$

Die hierin auftretende Größe $t+s$ ist — wie für $t-s$ schon oben bemerkt — mit $S:K$ der mehrfach erwähnten Zahlentafel zu entnehmen. Die Bedeutung von $^1/_2\,\alpha$ ergibt sich aus (8) und (9).

Setzt man in (56) die Spannziffern $m=0$, so ergeben sich selbstverständlich wieder die Werte aus (46) und (48) für den nicht eingespannten Stab. Setzt man dagegen $m=\infty$ entsprechend einer (annähernd) starren Einspannung, so erhält man eine neue, diesen besonderen Fall der allgemeinen Aufgabe lösende Gleichung. Mit $y_0=0$ findet man den Wert von y_m für den geraden, mit $Q=0$ für den gekrümmten, aber nicht querbelasteten Stab usw. In dieser bequemen und durchsichtigen Anpassung der Formel an alle möglichen Einzelfälle zeigt sich der große Vorteil der allgemeinen Lösung der Aufgabe. Damit ist aber ihre Verwendbarkeit noch nicht erschöpft, wie die folgende Betrachtung lehrt.

In allen bisherigen Entwicklungen, also auch in (56), ist Q positiv gerechnet, wenn die Querlast im Sinne einer Vergrößerung der Anfangskrümmung des Stabes wirkt. (Das ergibt sich aus den Bemerkungen zu dem Bild im Abschnitt I.) Wir wollen es sinnbildlich dadurch ausdrücken, daß wir der linken Seite von (56) (mit Weglassung des Summenzeichens) ein + beifügen. Um bequemer rechnen zu können, setzen wir

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{t-s}{2-(t-s)} - 2\,\dfrac{\left(\frac{1}{\cos\alpha/2}-1\right)^2}{\frac{aS}{m}+t+s} = U \\[2ex] \text{und}\qquad 1-\pi\,\dfrac{\left(\frac{1}{\cos\alpha/2}-1\right)}{\frac{aS}{m}+t+s} = V, \end{cases}$$

so daß wir statt (56) kürzer erhalten

$$\left(\frac{y_m}{a}\right)_+ = \frac{Q}{4S}\,U + \frac{y_0}{a}\,\frac{S:K}{1-(S:K)}\,V. \tag{58}$$

Wir nehmen an, daß y_m bei dieser Richtung von Q gemessen worden sei. Nun soll der Stab von der entgegengesetzten Seite her mit demselben Q belastet werden. Dann muß das Vorzeichen des ersten Gliedes von (58) wechseln. Die jetzt zu messende Größe bezeichnen wir mit einem —. Es gilt also

$$\left(\frac{y_m}{a}\right)_- = -\frac{Q}{4S}\,U + \frac{y_0}{a}\,\frac{S:K}{1-(S:K)}\,V. \tag{59}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{y_0}{a} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_m}{a}\right)_+ + \left(\frac{y_m}{a}\right)_-\right]}{\frac{S:K}{1-(S:K)}\,V} \tag{60}$$

und

$$U = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_m}{a}\right)_+ - \left(\frac{y_m}{a}\right)_-\right]}{\frac{Q}{4S}}. \tag{61}$$

Damit ist U durch Messung bestimmt, da Q und S bekannte Größen sind. Aus (57) ergibt sich nun

$$\frac{aS}{m} + t + s = \frac{2\left(\frac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right)^2}{\frac{t-s}{2-(t-s)} - U}. \tag{62}$$

Nachdem hieraus die linke Seite berechnet, folgt V aus (57) und damit $y_0 : a$ aus (60). Es ist durch die beiden Messungen mithin sowohl die Spannziffer m, wie auch der Krümmungspfeil y_0 der Anfangsform des Stabes bestimmt[12]. Freilich nicht voraussetzungslos! Denn daß die Anfangsform eine einfache Kosinuswelle sei, ist eine keineswegs selbstverständliche Annahme. Ebenso verhält es sich mit den verschwindend klein gedachten Fehlerhebeln. Doch läßt sich dem Mangel vermutlich dadurch abhelfen, daß die elastischen Ausbiegungen nicht nur in der Mitte, sondern auch in den Viertelpunkten der Stablänge gemessen werden, wie es bei den bahnbrechenden schönen Knickversuchen des Deutschen Eisenbauverbandes stets geschieht. Die zur Ausnutzung solcher erweiterter Messungen erforderlichen theoretischen

[12] Solche doppelseitige Messungen hat Prof. Kayser schon ausgeführt, jedoch ohne die oben gezogenen Folgerungen. S. Anmerkung 1.

Unterlagen sind durch die oben entwickelte allgemeine Lösung der Aufgabe schon gegeben. Hier zeigen sich die in der Einleitung angedeuteten Grenzen der Brauchbarkeit der näherungsweisen Rechnung.

Bei der Bewertung der Bestimmung der Spannziffer m ist nicht zu vergessen, daß ihre Größe nicht nur von den Maßen der angeschlossenen Stäbe, sondern auch davon abhängt, in welchem Grade diese Stäbe etwa auf Druck belastet sind[13]. Auch Zugkräfte beeinflussen m, jedoch in günstiger Weise, so daß keine Bedenken dagegen vorliegen, sie zur Vereinfachung der Rechnung außer acht zu lassen. All dieses lehrt, daß noch ein weites Feld frei ist für die Betätigung von Theorie und Versuch.

[13] Vgl. »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« S. 8, Anmerkung 2.

Ausgegeben am 4. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

II. Gesamtsitzung. 14. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Nernst berichtete über gemeinsam mit Dr. W. Orthmann angestellte Versuche zur Verdünnungswärme von Salzen bei sehr kleinen Konzentrationen. (Ersch. später.)

Wegen der Kleinheit der Wärmeeffekte (meistens nur einige zehntausendstel Grad und weniger) mußten die vorhandenen, von v. Steinwehr und Rümelin ausgearbeiteten Apparaturen erheblich verfeinert werden. Es stellte sich heraus, daß auch bei analog gebauten (im Sinne der älteren Anschauung gleich stark dissoziierten) Salzen die Verdünnungswärmen durchaus individueller Natur (sogar von verschiedenen Vorzeichen) sind, was zunächst mit den neueren Theorien zu diesem Gegenstande kaum in Einklang zu bringen ist.

2. Im Anschluß daran überreichte Hr. Nernst die 11. bis 15. Auflage seines Werkes »Theoretische Chemie« (Stuttgart 1926).

3. Hr. Stutz legte den 1. Halbband des im Auftrage und mit Unterstützung der Savigny-Stiftung sowie der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft herausgegebenen Werkes »Die Summa legum brevis levis et utilis des sogenannten Doctor Raymundus von Wiener-Neustadt«, hrsg. von Alexander Gál (Weimar 1926) vor; ferner das 102. und 103. Heft der von ihm herausgegebenen »Kirchenrechtlichen Abhandlungen«: »Die katholische Militärseelsorge Preußens 1797—1888« von Heinrich Pohl (Stuttgart 1926).

4. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:
1500 *RM* für die Bearbeitung des Nachlasses von Oscar Mann »Kurdisch-persische Forschungen«,
1000 *RM* als Druckzuschuß für das Werk des verstorbenen Dr. Karl Schoy in Essen »Die trigonometrischen Lehren des ostarabischen Astronomen al-Bîrûnî«.

Die Akademie hat ihr Ehrenmitglied Hrn. Geheimen Kabinettsrat a. D. Rudolf von Valentini in Hameln am 18. Dezember 1925, sowie das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Ernst Ehlers in Göttingen am 31. Dezember 1925 und das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hrn. Paul Vinogradoff in Oxford im Dezember 1925 durch den Tod verloren.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

III. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 21. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Penck sprach über nordalpine Ablagerungssynklinalen. (Ersch. später.)

Es gibt keine einheitliche, alpine Geosynklinale, aber es lassen sich einzelne Synklinalgebiete erkennen, in denen dem langsamen Senkungsvorgange durch die Sedimentation Schritt gehalten wurde, so daß die Mächtigkeit gewisser Gesteine (Wettersteinkalk, Hauptdolomit) den Betrag der Einsenkung spiegelt. Solche Ablagerungssynklinalen liegen im Bereich der nördlichen Kalkalpen nicht ineinander geschachtelt, sondern nebeneinander. Zwischen ihnen entwickelten sich bereits während der Triasperiode Antiklinalen. Das nördliche Alpenvorland ist der Typus einer Ablagerungssynklinale. Sein Schichtbau zeigt die für eine solche bezeichnenden inneren Diskordanzen.

Die Energiestufen des idealen einatomigen Gasmodells.

Von Prof. Dr. Erwin Schrödinger
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein am 7. Januar 1926 [s. oben S. 1].)

§ 1. Quasiergodenhypothese und bedingt periodische Systeme.

Am Ende einer Erörterung der verschiedenen Wege, das Quantenproblem des idealen einatomigen Gases zu lösen, hatte ich kürzlich die Ansicht ausgesprochen[1], daß der Plancksche Gedanke, man dürfe nicht von der Quantelung der einzelnen Moleküle ausgehen, sondern müsse dem Gaskörper als Ganzem Quantenbedingungen vorschreiben, sich nicht ohne weitgehende Willkür durchführen lasse, zu deren Einschränkung es an genügenden Anhaltspunkten fehle. Hr. Prof. Einstein hatte nun die Güte, mir brieflich folgenden Vorschlag mitzuteilen, der von speziellen Voraussetzungen beinahe frei sei: da nach Plancks Grundannahme[2] stets $N!$ Zustände des Gaskörpers — entsprechend dem Ehrenfestschen »Z-Stern«[3] — zusammenfallen, so müssen die erlaubten Energiestufen U_n des Gaskörpers in einem Abstand aufeinander folgen, der, in Phasenvolum gemessen, konstant und gleich $N!h^{3N}$ ist. Macht man nur noch die Annahme, daß die unterste Energiestufe $U_0 = 0$ ist, so sind damit die Energiestufen des Gaskörpers eindeutig bestimmt und sein ganzes thermodynamisches Verhalten berechenbar.

So einfach und einleuchtend die Annahme solcher »äquidistanter« Energiestufen zu sein scheint, so könnte man doch geneigt sein, sie unter Hinweis auf die Systeme, deren Quantenbedingungen exakt bekannt und durch die Erfahrung bestätigt sind (Wasserstoffatom, Oszillator, Festkörper), a limine zurückzuweisen. Denn es liegt doch offenbar die Vorstellung zugrunde, daß die Quantenbedingungen nur der Gesamtenergie und keiner anderen Funktion der Zustandsvariablen des Gaskörpers eine Beschränkung auferlegen. Die Reduktion der Quantenbedingungen mehrfach periodischer Systeme auf eine einzige tritt bekanntlich auf bei vollkommener (dynamischer) Entartung[4]. In diesem Falle ist nun das Volum der Phasenraumzellen, d. i. das Phasenvolum zwischen benachbarten Energiehyperflächen, durchaus nicht konstant,

[1] Berliner Berichte 1925, S. 440.
[2] M. Planck, Berliner Berichte 1925, S. 50.
[3] P. u. T. Ehrenfest, Enzykl. d. math. Wissensch. **IV, 32,** S. 37.
[4] Der Gebrauch des Wortes Entartung in zwei völlig wesenfremden Bedeutungen läßt sich in diesem Aufsatz leider nicht vermeiden.

3*

sondern nimmt mit wachsender Energie um so rascher zu, je höher der Entartungsgrad, der im vorliegenden Fall, bei $3N$ Freiheitsgraden und vollständiger Entartung, $3N-1$ fach sein würde. Das führt, wie PLANCK schon vor 9 Jahren[1] gezeigt hat, auf ein Anwachsen der Energiedifferenzen zu makroskopischer Größe, mithin auf ein makroskopisch diskontinuierliches Verhalten des Gases, ist also indiskutabel.

Nun ist aber zu sagen, daß das ideale Gas aus dem Rahmen der Quantentheorie bedingt periodischer Systeme auf jeden Fall stark herausfallen muß, wenn man nicht die Quasiergodenhypothese aufgeben will, d. h. die Annahme, daß der Phasenpunkt des Gaskörpers im Laufe der Bewegung jedem überhaupt zugelassenen Punkt der Energiefläche beliebig nahekommt. Denn es ist kein entartetes oder nichtentartetes bedingt periodisches System von mehr als einem Freiheitsgrad bekannt, das quasiergodisch wäre, und diese Eigenschaft dürfte wohl überhaupt mit der Natur des bedingt periodischen Systems (von mehr als einem Freiheitsgrad) unvereinbar sein[2]. Bei nicht vollständiger Entartung wird ja das System durch die zur Energiebedingung hinzutretenden Bedingungen auf einen Teil der Energiefläche beschränkt; bei vollständiger Entartung wird die Bahn streng periodisch, berührt also nur eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Phasenpunkten.

Zwischen der Eigenschaft bedingt periodischer Systeme, nicht die ganze Energiefläche zu bestreichen, und der Ungleichheit der von benachbarten Energieflächen eingeschlossenen Phasenvolumina besteht ein innerer Zusammenhang. Die Zahl der Bezirke, in welche die Energiefläche eines ganz entarteten bedingt periodischen Systems zerfällt, wenn man durch unendlich schwache Störungskräfte die Entartung prinzipiell vollkommen beseitigt, ist ein direktes Maß für die Größe der in Rede stehenden Phasenzellen. Es scheint mir deshalb, wenn man an der Quasiergodenhypothese festhalten will, eine gewisse innere Notwendigkeit zu bestehen, nicht nur erstens (was logisch selbstverständlich ist) die Quantenbedingung auf die einzige Energiebedingung zu beschränken, sondern auch zweitens, die wiederholt genannten Phasenvolumina untereinander gleich zu machen. Der obige EINSTEINsche Ansatz, der im folgenden rechnerisch durchgeführt wird, dürfte also der einzig mögliche Weg sein, dem idealen Gaskörper als ganzem unter Festhaltung der Quasiergodenhypothese Quantenstufen vorzuschreiben.

§ 2. Berechnung der freien Energie.

Das Phasenvolum eines idealen einatomigen Gases mit N Molekülen innerhalb der Energiefläche $U = U_n$ ist bekanntlich das Produkt aus der N-ten Potenz des Gasvolumens V (Beitrag der Lagekoordinaten) in das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel vom Radius $\sqrt{2mU_n}$ (Beitrag der Impulskoordinaten; m = Molekülmasse). Dies setzen wir gleich $nN!\,h^{3N}$:

[1] M. PLANCK, Berliner Berichte 1916, S. 629. § 4.

[2] A. EINSTEIN, Verh. d. D. Phys. Ges. 1917, S. 88.

$$V^N \frac{(2\pi m U_n)^{\frac{3N}{2}}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} = nN!\, h^{3N}. \tag{1}$$

Daraus ergeben sich mit Verwendung der STIRLINGschen Formel die Energiestufen

$$U_n = \frac{3h^2 N^{\frac{5}{3}}}{4\pi e^{\frac{5}{3}} m V^{\frac{2}{3}}} n^{\frac{2}{3N}}; \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots \tag{2}$$

(e = Basis der natürlichen Logarithmen).

Daraus die PLANCKsche Funktion Ψ, d. i. die negative, durch die Temperatur dividierte freie Energie des Gaskörpers:

$$\Psi = k \lg \sum_0^\infty g_n e^{-\frac{U_n}{kT}} = k \lg \left(g_0 + \sum_1^\infty g e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}}\right) \tag{3}$$

$$\beta = \frac{3}{4\pi e^{\frac{5}{3}}} \cdot \frac{h^2 N^{\frac{5}{3}}}{mkTV^{\frac{2}{3}}}. \tag{4}$$

Entsprechend der Gleichheit der Phasenzellen wurden die Quantengewichte g_n alle einander gleich gesetzt (g ohne Index) mit Ausnahme des nullten, für welches das zweifelhaft ist. Für g_0 werden wir die Annahmen $g_0 = 0$ und $g_0 = g$ prüfen (§ 3 und 4 bzw. § 5). Der Zahlenwert von g ist 1 oder $N!$, je nachdem man in dem bekannten Disput über die »Division durch $N!$« PLANCK oder EHRENFEST beipflichtet. Für die beobachtbaren Gesetze ist das belanglos, doch bitten wir den Leser, zur Fixierung der Gedanken unter g den einen oder den anderen dieser beiden Werte zu verstehen, damit er jeweils das ihm gewohnte Formelbild erblicke.

Die thermodynamische Energie U und der Druck p werden als Funktion der Temperatur und des Volumens bekanntlich durch die Differentialquotienten von Ψ folgendermaßen bestimmt:

$$U = T^2 \frac{\partial \Psi}{\partial T} = -T\beta \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad p = T \frac{\partial \Psi}{\partial V} = -\frac{2}{3} \frac{T\beta}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \tag{5}$$

woraus die allgemeingültige Beziehung folgt[1]

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V}. \tag{6}$$

[1] Diese Beziehung hängt daran, daß die Ψ-Funktion T und V nur in der Verbindung $TV^{\frac{2}{3}}$ enthält. — Vgl. a. A. EINSTEIN, Berl. Ber. 1924, S. 264, ferner ebendort 1925, S. 18.



Für die näherungsweise Berechnung von Ψ, U und p werden wir einige Feststellungen über die Monotonie dieser Größen benötigen. Nach (3) ist

$$e^{\frac{\Psi}{k}}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta} = -\sum_1^\infty g n^{\frac{2}{3N}} e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}} < 0. \tag{7}$$

$\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}$ ist also stets negativ, was übrigens wegen des nichtnegativen Charakters der Energie auch aus (5) hätte geschlossen werden können. Ψ selbst nimmt also mit wachsendem β, also auch mit abnehmender Temperatur bei konstantem Volumen, monoton ab. Ebenso findet man

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2} &= e^{-\frac{2\Psi}{k}}\left\{\left(g_0+\sum_1^\infty g e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}}\right)\left(\sum_1^\infty g n^{\frac{4}{3N}} e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}}\right)-\left(\sum_1^\infty g n^{\frac{2}{3N}} e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}}\right)^2\right\}\\ &= e^{-\frac{2\Psi}{k}}\left\{g_0\sum_1^\infty g n^{\frac{4}{3N}} e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}} + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{g^2}{2}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\left(m^{\frac{2}{3N}}-n^{\frac{2}{3N}}\right)^2 e^{-\beta\left(n^{\frac{2}{3N}}+m^{\frac{2}{3N}}\right)}\right\} > 0.\end{aligned} \tag{8}$$

$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right|$ nimmt also mit wachsendem β monoton ab. Daher nehmen nach (5) Energie und Druck mit abnehmender Temperatur bei konstantem Volumen monoton ab (das Produkt βT ist nämlich nach (4) von der Temperatur unabhängig). Zusammenfassend: Ψ, U und p ändern sich bei konstantem V gleichsinnig mit T.

Ferner orientieren wir uns über die Größenordnung von β. Diese Größe ist nach (4) für gleiche Dichte und Temperatur (und gleiche Gassorte) noch mit der Zahl der wirklich vorhandenen Moleküle proportional. Für Wasserstoff unter Normalbedingungen wäre ($h = 6.55\times 10^{-27}$, $k = 1.372 \times 10^{-16}$, $m = 3.32\times 10^{-24}$, $T = 273$, $V/N = \frac{22412}{6.06\times 10^{23}}$, $e = 2.718$)

$$\beta = 1.398\times 10^{-4} N. \tag{9}$$

β ist also eine ungeheuer große Zahl, die bei Abkühlung und Kompression der Größenordnung N nahekommen kann. Bei flüchtiger Betrachtung der Zustandssumme, d. i. das Argument des Logarithmus in Gleichung (3), könnte man glauben, daß dieselbe schon unter Normalbedingungen auf ihr nulltes Glied (g_0) degeneriert, wenn man nicht exakt $g_0 = 0$ macht. Schon ihr erstes Glied ($n = 1$) hat gegen das nullte einen so unerhört kleinen Wert (Größenordnung $e^{-10^{19}}$), daß die Möglichkeit, auch nur die erste Energiestufe zu erreichen, praktisch auszuscheiden scheint. — Dieser Schluß wäre übereilt und falsch. Von $n = 1$ an nimmt nämlich der zweite Faktor ($n^{2/3N}$) des Expo-

nenten so unerhört langsam zu, daß die Kleinheit dieser Glieder durch ihre ungeheure Anzahl mehr als wettgemacht wird. Wir werden im § 4 zeigen, daß auch mit $g_0 = g$ noch bis zu sehr tiefen Temperaturen herab die idealen Gasgesetze sehr exakt erfüllt sein würden. Nur der Umstand, daß die Größe dieser untersten Energiestufe schließlich doch eine makroskopische Unstetigkeit des Gasverhaltens herbeiführen müßte, wird uns mit großer Wahrscheinlichkeit zum Ausschluß des energielosen Zustandes ($g_0 = 0$) veranlassen.

Die relative Abnahme des Summengliedes von n auf $n+1$ ist für $n \gg 1$ angenähert gegeben durch

$$\frac{d}{dn}\left(\beta n^{\frac{3}{3N}}\right) = \frac{2\beta}{3N} \frac{1}{n^{1-\frac{2}{3N}}} \infty \frac{2\beta}{3Nn}. \tag{10}$$

Sie ist also unter Normalbedingungen schon für kleine n von der Größenordnung 10^{-4}, für große n noch viel kleiner. Das ermöglicht eine sehr genaue Abschätzung der $\sum\limits_1^\infty$ durch ein bestimmtes Integral, solange β die Größenordnung N nicht erreicht hat. Um aber die Abschätzung für beliebiges β gebrauchen zu können, fügen wir nach bekannter Regel[1] zu dem approximierenden Integral noch das mit einem positiven echten Bruch ϑ multiplizierte erste ($n = 1$) Glied additiv hinzu. So erhalten wir aus (3)

$$\Psi = k \lg \left\{ g_0 + g \left[\int_1^\infty e^{-\beta n^{\frac{2}{3N}}} dn + \vartheta e^{-\beta} \right] \right\} \tag{11}$$

mit

$$0 < \vartheta < 1. \tag{12}$$

(Innerhalb dieser Grenzen kann und wird ϑ mit β variieren.)

In dem Integral führen wir als Variable ein

$$\beta n^{\frac{2}{3N}} = x$$

und benutzen fortan die Abkürzung

$$\frac{3N}{2} = l. \tag{13}$$

Nun erhält man aus (11) durch leichte Umformung

$$\Psi = k \lg \left\{ g\,(l!)\,\beta^{-l} \left[1 + \frac{g_0}{g} \frac{\beta^l}{l!} - \int_0^\beta \frac{e^{-x} x^{l-1}\, dx}{(l-1)!} + \vartheta \frac{\beta^l e^{-\beta}}{l!} \right] \right\}. \tag{14}$$

[1] Vgl. M. PLANCK, Berliner Berichte 1925, S. 52.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer übt durch seine Abweichung von 1 den »Quanteneinfluß« aus. Denn sofern er gleich 1 ist, hat man mit (4) und (13)

$$\Psi = \frac{3R}{2} \lg T + R \lg V + R \lg \frac{(2\pi m k)^{\frac{3}{2}} e g^{\frac{1}{N}}}{h^3 N}. \qquad (15)$$

$$(R = Nk)$$

Das ist der klassisch-gastheoretische Ausdruck der Ψ-Funktion. (Die Entropiekonstante erhält den Stern-Tetrodeschen Wert, wenn man $g = 1$ nimmt, andernfalls ($g = N!$) ist sie um $k \lg(N!)$ größer.)

Für das Folgende ist es bequemer, auch im klassischen Teil die Abkürzungen β und l beizubehalten. Doch trennen wir ihn ab:

$$\Psi = lk \lg\left(\frac{l g^{\frac{1}{l}}}{e\beta}\right) + k \lg\left[1 + \frac{g_0}{g}\frac{\beta^l}{l!} - \int_0^\beta \frac{e^{-x} x^{l-1} dx}{(l-1)!} + \vartheta \frac{\beta^l e^{-\beta}}{l!}\right]. \qquad (16)$$

Es handelt sich jetzt um das Studium des zweiten Logarithmus als Funktion von β. Da müssen wir die Fälle $g_0 = 0$ und $g_0 = g$ trennen, da im zweiten Fall das Glied mit g_0 allein den Verlauf bestimmt. Wir behandeln zunächst den ersten Fall.

§ 3. Der energielose Zustand wird ausgeschlossen ($g_0 = 0$).

Wir richten also jetzt das Augenmerk auf die letzten beiden Glieder der eckigen Klammer in (16). Das ϑ-Glied überschreitet niemals die Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{l}}$. Das $\int_0^\beta$ hat ebenfalls sehr kleine Werte, solange β noch merklich kleiner ist als l. Beim Überschreiten der Stelle $\beta = l$ wächst es explosionsartig auf nahezu 1 an. Das Argument des Logarithmus, um dessen Abschätzung es sich uns handelt, wird dann sehr klein, von derselben Größenordnung wie das ϑ-Glied. Wegen der Unkenntnis von ϑ wird daher die Formel (16) für $\beta > l$ völlig wertlos.

Aber noch für $\beta = l$ ist das $\int_0^\beta$ merklich von 1 und von 0 verschieden, und daher der in Rede stehende Logarithmus von der Größenordnung 1. Wir bezeichnen die zugehörige Temperatur als Entartungstemperatur, also nach (4) und (13)

$$T_e = \frac{1}{2\pi e^{\frac{5}{3}}} \frac{h^2 N^{\frac{2}{3}}}{m k V^{\frac{2}{3}}} \qquad (17)$$

und können sagen

$$\Psi = lk \lg\left(\frac{l g^{\frac{1}{l}}}{e\beta}\right) + k\, O(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{für } \beta \ll l \\ \text{d. i. } T \gg T_e \end{array} \right. , \qquad (18)$$

indem wir mit $O(x)$ hier und im folgenden stets irgendeine Größe »von (höchstens) der Ordnung x« bezeichnen.

(18) ist die »Näherung für hohe Temperatur«.

Wir leiten jetzt eine »Näherung für tiefe Temperatur« direkt aus (3) ab. Man findet leicht (g_0 ist gleich 0 gesetzt):

$$\Psi = k \lg g - k\beta + k \lg \sum_{1}^{\infty} e^{-\beta\left(n^{\frac{1}{l}} - 1\right)}. \tag{19}$$

Zur Abschätzung der hier auftretenden Summe kann, sobald $\beta > l$ geworden ist, die aus der Primzahltheorie bekannte ζ-Funktion dienen.

$$\zeta\left(\frac{\beta}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{l}}} \tag{20}$$[1]

ist eine Majorante unserer Summe. Denn

$$n^{\frac{\beta}{l}} e^{-\beta\left(n^{\frac{1}{l}} - 1\right)} = e^{-\beta\left[n^{\frac{1}{l}} - 1 - \lg\left(n^{\frac{1}{l}}\right)\right]} < 1,$$

weil $n^{\frac{1}{l}} - 1$ eine positive Zahl ist, sagen wir x, und $x > \lg(1 + x)$. Daher folgt aus (19)

$$\Psi = k \lg g - k\beta + kO(1), \tag{21}$$

so lange die abschätzende ζ-Funktion (20) die Größenordnung 1 nicht überschreitet, was sie nur in unmittelbarer Nähe ihres beim Argumentwert $+1$ (d. i. $\beta = l$) gelegenen Poles tut.

Damit sind aber die beiden Näherungsformeln (18) und (21) schon fast aneinander angeschlossen. Denn für $\beta = l$ folgt aus (18)

$$\Psi = k \lg g - k\beta + kO(1) \tag{22}$$

übereinstimmend mit (21).

Es fehlt nur noch ein kleines Gebiet in der unmittelbaren Nachbarschaft $\beta \geqslant l$. Die ζ-Funktion hat hier bekanntlich einen Pol erster Ordnung, verhält sich wie

$$\left(\frac{\beta}{l} - 1\right)^{-1} = \frac{l}{\beta - l}.$$

Beschränken wir β auf

$$\beta \geqslant l + \sqrt{l},$$

so ist

$$\zeta\left(\frac{\beta}{l}\right) = O(\sqrt{l}),$$

also statt (21) wenigstens

$$\Psi = k \lg g - k\beta + kO(\sqrt{l}), \tag{23}$$

[1] Den Hinweis auf diese Gleichung verdanke ich meinem Kollegen Hrn. Prof. R. FUETER.

während für $\beta = l$ Formel (22) gilt. Daraus folgt aber, daß (23) auch in dem winzigen Zwischengebiet, das uns noch fehlt, gelten muß, mithin für alle $\beta \geqslant l$. Denn da Ψ monoton ist, muß es in dem fraglichen Gebiet zwischen den beiden sichergestellten Randwerten liegen, und diese unterscheiden sich, wie ein Blick lehrt, höchstens um $kO(\sqrt{l})$.

Wir fassen zusammen: die Ψ-Funktion wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} \Psi &= lk \lg \left(\frac{lg^{\frac{1}{l}}}{e\beta} \right) + kO(\sqrt{l}) \text{ für } T \gg T_e, \\ \Psi &= k \lg g - k\beta + kO(\sqrt{l}) \text{ für } T \ll T_e. \end{aligned} \tag{24}$$

Der Gleichförmigkeit wegen haben wir der Korrektionsgröße überall den ungünstigsten Wert erteilt, der in Wahrheit nur in einem winzigen Temperaturgebiet knapp unterhalb der Entartungstemperatur erfordert würde. Wir finden damit das Auslangen und bemühen uns gar nicht um eine bessere Abschätzung. Sie hätte physikalisch kaum viel Sinn, weil schon der statistische Schwankungsbereich einer Ψ-Funktion ganz generell von ebendieser Größenordnung ist.

§ 4. Berechnung des Druckes und der Energie für diesen Fall ($g_0 = 0$).

Zur Berechnung des Druckes und der Energie muß nach (5) die Ψ-Funktion nach β differenziert werden. Wir müssen noch zeigen, daß die Korrektionsgrößen in (24) sich dabei nicht störend bemerkbar machen, was an sich möglich wäre, da sie uns gänzlich unbekannt sind und verhältnismäßig raschen Änderungen unterliegen könnten. Dazu dient wieder die Kenntnis der Monotonie von U und p als Temperaturfunktionen. Nach (5) haben wir

$$U = T^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T}.$$

Mittelt man das bei konstantem Druck über ein Temperaturgebiet $\Delta T \ll T$, über das wir sogleich näher verfügen werden, so kommt

$$\overline{U} = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} U dT = \frac{(T + \vartheta' \Delta T)^2}{\Delta T} [\Psi(T + \Delta T) - \Psi(T)]; \quad 0 < \vartheta' < 1.$$

Trägt man auf der rechten Seite eine der beiden Funktionen (24) ein, so liefert die Korrektionsgröße $kO(\sqrt{l})$ höchstens einen Beitrag von der Größenordnung

$$\begin{gathered} \frac{kT^2}{\Delta T} O\sqrt{l} = \frac{3RT}{2} \cdot \frac{T}{\Delta T} O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) \\ \left(R = Nk,\ l = \frac{3N}{2}\right). \end{gathered} \tag{25}$$

Nun wähle man etwa

$$\Delta T = T l^{-\frac{1}{4}},$$

dann wird der Beitrag (25) zu $\overline{U}$ verschwindend klein, anderseits ist das ΔT-Intervall klein genug, um aus dem Mittelwert, in Anbetracht der Monotonie von U, mit hinreichender Schärfe auf die Einzelwerte der Funktion schließen zu können. Für p erübrigt sich ein besonderer Nachweis wegen (6).

Die eben gegebene Abschätzung ließe sich für den größten Teil des Temperaturgebietes, vielleicht für das ganze, noch sehr verfeinern. Vielleicht wäre das sogar wünschenswert, wenn man höhere Differenzialquotienten (Kompressibilität, spezifische Wärme) benötigt. Denn jede weitere Differentiation verschlechtert die Abschätzung. Die Schwierigkeiten, denen man dabei im Entartungsgebiet begegnen würde, sind übrigens durchaus reell, nicht durch mangelhafte Abschätzung vorgetäuscht. Denn schon die eben genannten Größen sind im Entartungsgebiet praktisch unstetig. Ihre Differentialquotienten sind nicht mehr monoton, sondern erreichen im Entartungsgebiet vorübergehend enorme Beträge.

Doch wollen wir uns nicht weiter an diese rechnerischen Fragen verlieren, denen wir nur nachgegangen sind, um das wirklich recht absonderliche Resultat, das in den Formeln (24) drinsteckt, gegen jeden Zweifel sicherzustellen.

Wir stellen die Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen jetzt in der gewohnten Bezeichnungsweise übersichtlich zusammen. Es ist

für $T \gg T_e$:

$$-T\Psi = \text{freie Energie} = -\frac{3RT}{2}\lg T - RT\lg V - RT\lg\frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}} e\, g^{\frac{1}{N}}}{h^3 N}$$

$$= \frac{3RT}{2}\left(1 - \lg\frac{T}{T_e}\right) - kT\lg g$$

$$U = \frac{3RT}{2}$$

$$p = \frac{RT}{V} \tag{26a}$$

$$S = \Psi + \frac{U}{T} = \frac{3R}{2}\lg T + R\lg V + R\lg\frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{N}}}{h^3 N}$$

$$= \frac{3R}{2}\lg\left(\frac{T}{T_e}\right) + k\lg g\,.$$

für $T \leq T_e$:

$$-T\Psi = \text{freie Energie} = U - kT \lg g = \frac{3RT_e}{2} - kT \lg g$$

$$U = \frac{3RT_e}{2} = \frac{3h^2 N^{\frac{2}{3}}}{4\pi e^{\frac{5}{3}} mk} \frac{R}{V^{\frac{2}{3}}} \qquad (26\text{b})$$

$$p = \frac{RT_e}{V} = \frac{h^2 N^{\frac{2}{3}}}{2\pi e^{\frac{5}{3}} mk} \frac{R}{V^{\frac{5}{3}}}$$

$$S = k \lg g\,.$$

Die erste Formelgruppe sind einfach die idealen Gasgesetze. Alle angeführten Größen sind auch bei $T = T_e$ stetig. (Die höheren Differentialquotienten, wie spezifische Wärme, Kompressibilität, sind es nicht mehr.) Die Entartung besteht darin, daß Energie und Druck plötzlich temperaturunabhängig, reine Volumfunktionen werden. Die Entropie wird überhaupt konstant.

Um dem Nernstschen Theorem auch formal zu genügen, hat man $g = 1$ zu setzen. Bei dieser Festsetzung erscheint die Entartungstemperatur als diejenige Temperatur, bei welcher die ideale Gasformel den Entropiewert 0 liefert. Die Voraussagen des Nernstschen Theorems für $T = 0$ erfüllen sich schon bei der Entartungstemperatur, wie denn überhaupt die weitere »Abkühlung« unterhalb der Entartungstemperatur ein rein gedanklicher Prozeß ist: tatsächlich hat das Gas einen Zustand erreicht, bei dem es mit jedem Wärmereservoir zwischen 0 und T_e ohne merklichen Energieaustausch ins Gleichgewicht treten kann. T_e ist von V abhängig, liegt um so höher, je kleiner V. Es verdient Erwähnung, daß der Entartungspunkt auf jeden Fall dem Gebiet der Übersättigung angehört, sofern die Stern-Tetrodesche Dampfdruckformel gilt. Denn nach ihr ist die Entropie für den gesättigten Dampf stets noch positiv, nämlich mindestens gleich der durch die Temperatur dividierten Verdampfungswärme.

§ 5. Der energielose Zustand wird zugelassen ($g_0 = g$).

Wir kehren zurück zur Gleichung (16). Die für die Entartung charakteristische Größe in der eckigen Klammer zeigt jetzt ein ganz anderes Verhalten. Die früher maßgebenden Glieder — die letzten beiden — können jetzt ganz außer Betracht bleiben, denn lange bevor sie auch nur der Größenordnung $l^{-\frac{1}{2}}$ nahekommen, hat schon das Glied mit g_0 numerisch große Werte angenommen und eine vollkommene Entartung, allerdings von gänzlich abweichendem Typus herbeigeführt. Der Kürze halber lassen wir jene beiden Glieder von vornherein weg, haben also jetzt

$$\Psi = lk \lg\left(\frac{lg^{\frac{1}{l}}}{e\beta}\right) + k \lg\left[1 + \frac{\beta^l}{l!}\right]. \qquad (27)$$

Nun ist nach der Stirlingschen Formel sehr angenähert

$$\lg \frac{\beta^l}{l!} = l\left(\lg \frac{\beta}{l} + 1\right). \tag{28}$$

Dieser Logarithmus wächst sehr rasch von sehr großen negativen zu sehr großen positiven Werten, wenn β wachsend den Wert $\frac{l}{e}$ überschreitet. In der Tat sei

$$\beta = \frac{l}{e}(1+\delta); \quad |\delta| \ll 1,$$

dann wird

$$\lg \frac{\beta^l}{l!} = l\delta.$$

Die besagte sehr rasche Änderung vollzieht sich also wirklich in einem relativ außerordentlich kleinen β-Bereich, etwa in dem Gebiet

$$-l^{-\frac{1}{2}} < \delta < l^{-\frac{1}{2}}.$$

In diesem Gebiet wächst also das zweite Glied in der eckigen Klammer der Gleichung (27) von einer gegen 1 sehr kleinen zu einer gegen 1 sehr großen Zahl an. Außerhalb dieses Gebietes, und zwar auf beiden Seiten desselben, steht also zur Abschätzung des lg [⋯] die gewöhnliche Reihenentwickelung zur Verfügung, nur ist auf der einen Seite des kritischen Gebietes das eine, auf der anderen das andere von den beiden Gliedern das »kleine«. Die Durchführung ergibt:

$$\begin{aligned} \Psi &= lk \lg\left(\frac{lg^{\frac{1}{l}}}{e\beta}\right) + k\frac{\beta^l}{l!} \qquad &\text{für } \beta < \frac{l}{e}\left(1-\frac{1}{\sqrt{l}}\right) \\ \Psi &= k \lg g + k\frac{l!}{\beta^l} \qquad &\text{für } \beta > \frac{l}{e}\left(1+\frac{1}{\sqrt{l}}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Setzt man in diese beiden Formeln die respektiven beiden Randwerte des kritischen Gebietes

$$\beta = \frac{l}{e}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{l}}\right)$$

ein — natürlich den einen in die eine, den anderen in die andere —, so erhält man beide Male

$$\Psi = k \lg g + kO(\sqrt{l}). \tag{30}$$

Wegen der Monotonie von Ψ muß diese Formel auch im Zwischengebiet Geltung haben.

Definieren wir für den vorliegenden Fall als Entartungstemperatur

$$T_e' = \frac{h^2 N^{\frac{2}{3}}}{2\pi e^{\frac{2}{3}} mk V^{\frac{2}{3}}} \tag{31}$$

(sie ist genau im Verhältnis $e:1$ größer als T_e), so darf man offenbar setzen

$$\begin{aligned} \Psi &= lk \lg\left(\frac{l g^{\frac{1}{l}}}{e\beta}\right) + kO(\sqrt{l}) \qquad \text{für } T > T_e' \\ \Psi &= k \lg g + kO(\sqrt{l}) \qquad \text{für } T < T_e', \end{aligned} \tag{32}$$

was wir mit (24) zu vergleichen bitten.

Der Nachweis, daß auch Energie und Druck aus (32) unter Beseitesetzung der Korrektionsglieder hinreichend genau zu berechnen sind, wird genau so erbracht wie im früheren Fall (s. § 4)[1]. Oberhalb der Entartungstemperatur gelten wie früher die klassischen Gasgesetze. Die Entartungstemperatur ist jetzt diejenige, wo nach der idealen Gasformel (mit der Stern-Tetrodeschen Entropiekonstante) nicht — wie früher — die Entropie, sondern wo die freie Energie verschwindet. Die Entropie erreicht unmittelbar vor der Entartung den Wert $\frac{3R}{2}$[2]. Bei $T = T_e'$ sinkt sie, ebenso wie die Energie und der Druck, »fast plötzlich«, d. h. in einem winzigen Temperaturbereich, auf Null. Für alle drei Größen (U, p, S) folgt das unmittelbar aus dem Konstant- bzw. Nullwerden der Ψ-Funktion. Der Zustand unterhalb der Entartungstemperatur ist, wie früher, von der Temperatur unabhängig, vom Volumen hängt er nur insofern ab, als durch Volumvergrößerung die Entartungstemperatur eventuell unter die herrschende Temperatur sinken und dadurch die Entartung aufgehoben werden kann.

Im Gegensatz zu früher ist der Vorgang der Entartung jetzt mit dem Austritt der sehr beträchtlichen Energiemenge $\frac{3RT_e'}{2}$ verbunden. Er hat überhaupt die allergrößte Ähnlichkeit mit der Kondensation. In dieser Auffassung könnte man bestärkt werden durch den Umstand, daß der Austritt der eben genannten Energiemenge sich innerhalb eines Temperaturbereiches von der Größenordnung der spontanen Temperaturschwankung vollzieht, so daß ein Gleichgewicht zwischen entarteter und nichtentarteter Phase nichts Widerspruchsvolles wäre. Gleichung (31) wäre als »Dampfdruckkurve« (richtiger »Dampfvolumkurve«) aufzufassen, die übrigens auch in die geläufigere Form

$$\frac{3R}{2}\ln T_e' + R\ln V + R\ln\frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{5}{2}}}{h^3 N} = \frac{1}{T_e'}\cdot\frac{3RT_e'}{2} \tag{33}$$

gebracht werden kann (Entropie = Verdampfungswärme/Temperatur).

Demungeachtet halte ich diese Analogie für schief und glaube, daß keine andere Annahme über g_0 als die in den §§ 3 u. 4 durchgeführte mit dem wirklichen Verhalten eines Gases irgendetwas zu schaffen haben kann. Die letzte

[1] Einige Mühseligkeiten, die wegen der (makroskopischen) Unstetigkeit von U und p bei der Entartungstemperatur auftreten, seien hier bloß erwähnt.

[2] Wir passen die Ausdrucksweise einfachheitshalber der Normierung $g = 1$ an.

Energiestufe des Gases (zwischen $n = 0$ und $n = 1$), über welche es bei dem eben betrachteten »Kondensationsvorgang« herabfällt, ist nämlich von derselben Größenordnung wie die »Kondensationswärme«. In der Tat hat diese Energiestufe nach (2) und (4) für $\beta = \frac{l}{e}$ — im Gegensatz zu allen folgenden Energiestufen — den enormen Wert

$$\beta k T_e' = \frac{l}{e} k T_e' = \frac{1}{e} \cdot \frac{3 R T_e'}{2}.$$

Der Entartungsprozeß verläuft also nicht etwa so, daß das Gas innerhalb eines sehr kleinen Temperaturbereiches seinen Energieinhalt zeitlich stetig abgibt, vielmehr bringen unsere Grundannahmen (Quantelung des Gaskörpers, nicht der einzelnen Moleküle) es mit sich, daß ungefähr das letzte Drittel, genauer e-tel, der »Entartungswärme« nur auf einmal abgegeben oder aufgenommen werden kann. Das würde bei der Entartungstemperatur sprunghafte Zufallsschwankungen der Temperatur und des Druckes von makroskopischer Größe herbeiführen, die schon deshalb widersinnig sind, weil kein Rezeptor da zu sein braucht, um diese energetischen Explosionswellen aufzunehmen bzw. zu liefern.

§ 6. Physikalische Bedeutung.

Die physikalische Bedeutung der in den §§ 3 u. 4 gefundenen Gesetze kann keinesfalls die sein, daß etwa ein wirkliches Gas das geschilderte thermodynamische Verhalten zeigt. Denn die theoretische Entartung fällt in ein Zustandsgebiet, wo nach der klassischen Gastheorie und nach der Erfahrung die idealen Gasgesetze kaum noch näherungsweise zutreffen können. Und unser Ansatz für das Phasenvolum (linke Seite der Gleichung 1) entspricht, da nur die kinetische Translationsenergie in Rechnung gestellt und für jedes Molekül unabhängig von den übrigen jeder Ort innerhalb des Volumens V für möglich erklärt ist, dem idealen Gaszustand: punktförmige Moleküle ohne Wechselwirkungskräfte. Den so gefundenen Gesetzen kann man daher bestenfalls die Bedeutung einer sinngemäßen Extrapolation der klassischen Gasgesetze in das Gebiet tiefster Temperatur beimessen. Als solche bestechen sie durch ihre außerordentliche Einfachheit.

Daß diesen idealen Gesetzen, selbst wenn es die richtigen sind, im Gebiet tiefer Temperatur und großer Dichte leider nicht dieselbe Bedeutung zukommen kann wie im entgegengesetzten Grenzfall, darf man sich nicht verhehlen. Der »idealen Entartung« werden sich die aus den Kohäsionskräften und aus dem Eigenvolum der Moleküle entspringenden Abweichungen von den klassischen Gasgesetzen natürlich nicht einfach superponieren. Vielmehr muß man erwarten, daß beide Umstände — vor allem wohl die im »Eigenvolum« sich manifestierenden, so rätselvollen Repulsionskräfte — die Lage der Quantenstufen des Gaskörpers in entscheidender Weise beeinflussen werden, ganz ähnlich wie etwa beim festen Körper die Abweichungen vom HOOKEschen Gesetz unmittelbar die Quantenstufen und dadurch das thermo-

dynamische Verhalten abändern. Nur ist diesfalls die Möglichkeit einer begrifflichen und experimentellen Trennung dadurch gegeben, daß die Abweichungen vom HOOKEschen Gesetz bei hoher, der typische Quanteneinfluß bei tiefer Temperatur in Erscheinung tritt. Beim Gas dagegen müssen sich die VAN-DER-WAALS-Korrektionen und der Quanteneinfluß beide bei tiefer Temperatur und kleinem Volum in steigendem Maße bemerkbar machen. Das dürfte die Möglichkeit ihrer auch nur begrifflichen Trennung in Frage stellen.

Eine Theorie der Gasentartung, welche die Zusammenstöße der Moleküle berücksichtigt, wurde an anderer Stelle[1] zu skizzieren versucht. Wegen der stark abweichenden Grundlage — dort: Quantelung der einzelnen Moleküle, nicht des Gaskörpers als Ganzen — ist ein Vergleich mit der hier durchgeführten Theorie der »idealen Entartung« nicht ohne weiteres möglich.

[1] Physik. Zeitschr. **25**, 41. 1924.

Ausgegeben am 11. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

IV. Gesamtsitzung. **4. Februar.**

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Sering sprach über die jetzige Krisis in der deutschen Landwirtschaft und Industrie.

Das Ansteigen und die Verfeinerung des deutschen Verbrauchs haben den Farmern der agrarischen Exportländer in den Erntejahren 1924 und 1925 gewinnbringende Preise verschafft. Aber die eigene reiche deutsche Ernte mußte zum großen Teil verschleudert werden, weil die kurzfristigen Schulden zu Notverkäufen zwangen. Unter dem Druck der Industriekrisis droht auch der letzte Rückhalt (Milchwirtschaft, Schweinezucht) verlorenzugehen. Die Industriekrisis brach aus, sobald die künstliche aus der Kreditinflation hervorgegangene Preiskonjunktur zu Ende ging und es sich nun herausstellte, daß die Industrie die hohen Zinsen und Steuern so wenig tragen kann wie die Landwirtschaft. Der Vortrag schloß mit einer Kritik der Theorie, welche dem Dawesplan zugrunde liegt.

2. Hr. Schäfer übersandte sein Buch »Mein Leben« (Berlin u. Leipzig 1926).

3. Hr. Franke legte den nachgelassenen 2. Band des Werkes von J. J. M. de Groot »Chinesische Urkunden zur Geschichte Asiens« (Berlin und Leipzig 1926) und seinen Vortrag »Der geschichtliche Konfuzius« (Sonderabdr. Leipzig 1925) vor.

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. W. Caland übersandte seine Arbeit »Eine dritte Mitteilung über das Vādhūlasūtra (Sonderabdr.).

5. Hr. Heinrich Maier überreichte »Kants gesammelte Schriften« Bd. 17 (Berlin und Leipzig 1926),

6. Hr. Engler das 12. und 13. Heft der mit Unterstützung der Hermann-und-Elise-geb.-Heckmann-Wentzel-Stiftung herausgegebenen »Beiträge zur Flora von Papuasien« (Leipzig 1925).

7. Vorgelegt wurden endlich von dem mit Unterstützung der Akademie herausgegebenen »Siebenbürgisch-sächsischen Wörterbuch« Bd. I Lief. 6 und Bd. II Lief. 4, herausgegeben vom Ausschuß des Vereins für Siebenbürgische Landeskunde (Berlin und Leipzig o. J.) und die mit Benutzung des Archivs der Akademie bearbeitete Schrift von Gustav Abb »Schleiermachers Reglement für die Königliche Bibliothek zu Berlin vom Jahre 1813 und seine Vorgeschichte« (Berlin 1926).

Die Preußische Regierung hat am 27. Januar die Wahl des ordentlichen Professors an der Technischen Hochschule zu Berlin Hrn. Johannes Stumpf zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Ausgegeben am 9. März.



SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

V. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Rubner sprach über die Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen. (Ersch. später.)

Der Vortragende schildert zunächst ein neues Verfahren zur Berechnung der Größe des Stoffverbrauchs und der muskulären Vorgänge und gibt sodann eine zahlenmäßige Übersicht über den Nahrungsbedarf der wichtigsten Berufe einer Bevölkerung, der Grenzwerte des beruflichen und sportlichen Arbeitsaufwandes, über die experimentelle Feststellung der rationellsten Muskelleistung.

2. Hr. Zimmermann legte eine Untersuchung über die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung vor.

Mit Hilfe der Ergebnisse der am 7. Januar vorgelegten Untersuchung über die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung wird gezeigt, daß die herkömmliche Meinung, als könnten querbelastete Stäbe die Eulersche Knickgrenze nicht erreichen, irrig ist. Es werden die Knickbedingungen und die an der Knickgrenze eintretenden Ausbiegungen für verschiedene Anordnungen derartiger Stäbe allgemein angegeben und durch Zahlenbeispiele erläutert.

Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung.

Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie.

Von H. ZIMMERMANN.

Man ist bis vor kurzer Zeit der Meinung gewesen, daß ein auf Druck beanspruchter Stab die Eulersche Knickgrenze nur bei vollkommener Fehlerfreiheit, d. h. bei gerader Achse und achsrechtem Lastangriff erreichen könne. Auf Seite 262 u. f. der Sitzungsberichte von 1923 ist nachgewiesen, daß das ein Irrtum war. Am Schluß ist die grundsätzliche Seite dieses Irrtums dahin aufgedeckt, daß nicht die Abwesenheit aller Fehler erforderlich ist, sondern daß das gleiche Ziel auch erreicht wird, wenn sich die Wirkungen der Fehler nur aufheben. Der Nachweis, daß das bei einem nicht geraden und nicht achsrecht belasteten Stabe möglich ist, und die Angabe der Bedingungen, unter denen es geschieht, bildete den Inhalt der damaligen Untersuchung[1]. Außer diesen beiden Fehlern, deren Auftreten man die fragliche Störung zuschrieb, kommt aber auch noch der Einfluß einer Querbelastung des Stabes in Frage, der man gleichfalls die Eigenschaft beilegt, das Erreichen der Eulerschen Knickgrenze zu verhindern. Wirkt eine solche Querlast allein auf den vollkommen geraden und achsrecht gedrückten Stab, so ist dies ohne Zweifel richtig[2]. Wenn dagegen der Stab mit Krümmungsfehlern behaftet oder nicht achsrecht belastet, oder wenn beides zugleich der Fall ist und nun noch eine Querlast hinzutritt, so darf nach der eben erwähnten allgemeinen Betrachtung erwartet werden, daß die Eulersche Knickgrenze trotz all dieser störenden Einflüsse doch erreicht werden kann. Zu zeigen, daß und unter welchen Bedingungen dies in der Tat möglich ist, ist der Zweck der folgenden Untersuchung.

In der früheren Arbeit ist ermittelt, in welchem Maße ein nicht gerader Stab sich verbiegt, ehe die Knickgrenze erreicht wird. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß die Ausbiegung einen unbestimmten Wert annimmt. Die Größe, die sie kurz vorher besitzt, wollen wir Grenzausbiegung nennen. Ihr Betrag ist nicht gleichgültig. Nur wenn er sehr klein ist, darf man erwarten, daß nicht schon vor Erreichung der Knickgrenze bleibende Formänderungen eintreten. Um hierüber Gewißheit zu erhalten, mußte außer der Knickbedingung selber in jedem Falle auch die Grenzausbiegung ermittelt werden, was etwas weitläufige Rechnungen erfordern kann. Es ist jetzt ge-

[1] Sonderdruck: »Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse«.
[2] Vgl. ELWITZ, Lehre von der Knickfestigkeit S. 129. — MAYER, Knickfestigkeit S. 25—27.

lungen, das Verfahren so zu verbessern, daß die Knickbedingung und die ihr entsprechende Ausbiegung in ein und derselben Gleichung erhalten werden, womit zugleich der — allerdings nur scheinbare — Widerspruch beseitigt wird, daß die Ausbiegung an der Knickgrenze unbestimmt werden und doch auch einen bestimmten endlichen Wert haben soll. Näheres hierüber weiterhin. Bei Berechnung der mit der Grenzausbiegung verknüpften Stabspannungen darf natürlich nicht vergessen werden, daß die Biegemomente nicht nur von der elastischen Formänderung abhängen, wenn der Stab eine Anfangskrümmung hat. Für die Ermittlung der Knickgrenze dagegen genügt es, den Einfluß zu berücksichtigen, den eine solche Krümmung auf die elastische Verformung der Stabachse ausübt.

I. Die elastische Ausbiegung.

Die Unterlagen für die jetzt auszuführenden Rechnungen sind schon durch die vor kurzem erschienene Arbeit über die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung gegeben. Die Anordnung des Stabes und die Art des Lastangriffes zeigt das beistehende Bild 1. Von der Anfangsform

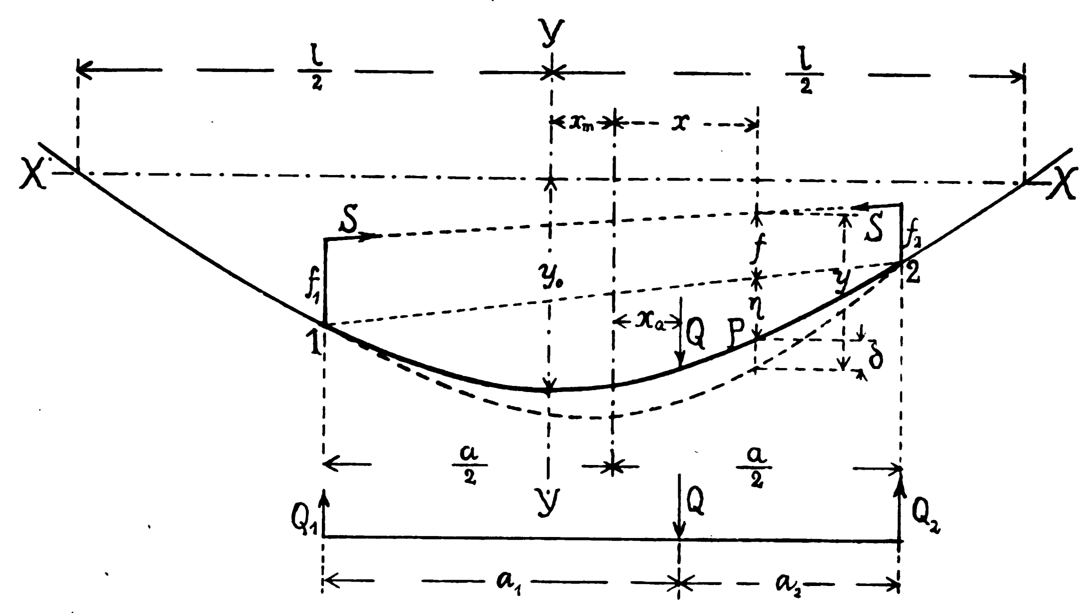


Bild 1. Gekrümmter Stab mit Längs- und Querbelastung.

sei nur kurz wiederholt, daß sie als flach gekrümmte Kosinuslinie mit der Scheitelhöhe y_0 und der Wellenlänge l gedacht ist, deren Scheitel um das Maß x_m von dem Lot durch die Mitte der Stabsehne a absteht. Die Aufgabe, die elastische Ausbiegung eines beliebigen Punktes eines solchen Stabes zu bestimmen, ist auf Seite 3 bis 14 der Sitzungsberichte für 1926 allgemein gelöst, und zwar auch unter der Annahme, daß die beiden Enden des Stabes in verschiedenem Grade elastisch eingespannt sind. Jetzt den Knickfall ebenso allgemein zu behandeln, würde zwar keine theoretischen Schwierigkeiten

bieten, aber einen großen Aufwand an Raum erfordern und keinen dementsprechenden Nutzen gewähren. Der Beweis, um den es sich handelt, kann ausreichend und dabei in leichter zu übersehendem Umfange geführt werden, wenn man die Annahmen etwa so vereinfacht, wie es für das im Abschnitt VI der vorgenannten Arbeit auf Seite 14 der Sitzungsberichte gebrachte Beispiel geschehen ist; d. h. durch symmetrische Anordnung des Ganzen zur Stabmitte. In einigen Punkten weichen wir jedoch von dem Beispiel ab, indem wir die Voraussetzung, daß die Wellenlänge l der Kosinuslinie gerade gleich der Stablänge a sei und daß keine Fehlerhebel vorhanden seien, jetzt fallen lassen. Anderseits wird von der Einspannung der Stabenden abgesehen. Das rechtfertigt sich dadurch, daß die Ermittlung des Einflusses der Einspannung die vorausgehende Bestimmung des Verhaltens des nicht eingespannten Stabes verlangt, dann aber ohne weiteres nach einem schon früher mitgeteilten Verfahren erfolgen kann[3].

Wie in dem genannten Beispiel beschränken wir uns auch jetzt auf die Berechnung der Ausbiegung

$$y_m$$

für die Mitte des Stabes. Ihr Unbestimmtwerden soll als Merkmal für die Erreichung der Knickgrenze dienen. Bezeichnet S die Stabkraft und

$$K = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 EJ \tag{1}$$

die Eulersche Knicklast, so ist das Ziel, zu beweisen, daß y_m unbestimmt wird bei

$$S = K.$$

In der früheren Untersuchung tritt auch die Kraft

$$K_l = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ \tag{2}$$

auf, die einen geraden Stab von einer Länge gleich der Wellenlänge l der Fehlerlinie und mit einem Querschnitt gleich dem des gegebenen Stabes bei freier Drehbarkeit der Enden und achsrechtem Angriff an die Eulersche Knickgrenze bringen würde. Wir beseitigen diese Größe, indem wir

$$\frac{a}{l} = n, \quad \text{also} \quad K_l = n^2 K \tag{3}$$

setzen. Es drückt also die Zahl n aus, wie viel ganze oder Bruchteile von Wellen der Fehlerlinie auf die Stablänge a gehen.

[3] S. Sitzungsberichte 1924, Seite 277: »Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung«. (Sonderdruck.)



Nach diesen Vorbereitungen können nun die Gleichungen für die drei Anteile, die die Querlast Q, die Stabkrümmung y_0 und die Fehlerhebel f zu der elastischen Gesamtausbiegung y_m liefern, angeschrieben werden, wie folgt:

Einfluß von Q:

$$\frac{y_m}{a} = \frac{Q}{4S}\left[\frac{\sin\alpha/2 - \alpha/2\cos\alpha/2}{\alpha/2\cos\alpha/2}\right]. \tag{4}$$

Einfluß von y_0:

$$\frac{y_m}{a} = \frac{y_0}{a}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\,\frac{\cos\alpha/2 - \cos n\pi/2}{\cos\alpha/2} + \cos n\pi/2 - 1\right]. \tag{5}$$

Einfluß der f:

$$\frac{y_m}{a} = \frac{f}{a}\left[\frac{1-\cos\alpha/2}{\cos\alpha/2}\right]. \tag{6}$$ [1]

Hierin ist

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}. \tag{7}$$

II. Die Knickbedingungen und Grenzausbiegungen.

Die beiden Fälle, daß die Wellenlänge der Fehlerlinie gleich der Stablänge, also $n = 1$, und daß sie davon verschieden ist, sind getrennt zu behandeln. Aus bestimmten Gründen stellen wir den ersten — übrigens leichter zu erledigenden — Fall voran.

Erste Annahme: $n = 1$.

Die Größe n tritt nur in Gleichung (5) auf. Mit $n = 1$ wird $\cos n\pi/2 = 0$ und geht (5) über in

$$\frac{y_m}{a} = \frac{y_0}{a}\,\frac{\frac{S}{K}}{1-\frac{S}{K}}. \tag{8}$$

[1] Die drei Gleichungen sind aus der Arbeit »Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung« zu entnehmen, und zwar (4) aus (44) von S. 15; (5) aus (20) bis (22) mit $x = \xi = x_m = 0$ und $a : l = n$ von S. 10; (6) aus (24) mit $x = \xi = 0$ und $f_1 = f_2 = f$ von S. 11 des gegenwärtigen Jahrganges. (Sonderdruck.) Gl. (7) steht daselbst als Gl. (9) auf S. 6. — Gl. (4) findet sich übrigens schon in E. Winklers Lehre von der Elastizität und Festigkeit (Prag 1867) auf Seite 180 unter 103.

Die Summe der drei Einflüsse ergibt sich hiernach als Funktion von $S:K$ aus den Gleichungen (4) bis (7) wie folgt:

$$(9)\qquad \frac{y_m}{a} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Q}{4S} \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} - \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} \cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}}}{\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} \cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}}} \\ + \dfrac{y_0}{a} \dfrac{\dfrac{S}{K}}{1 - \dfrac{S}{K}} \\ + \dfrac{f}{a} \dfrac{1 - \cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}}}{\cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}}} . \end{array} \right.$$

Wenn man nun hierin ohne weiteres $S = K$ setzen wollte, so würden die Nenner aller drei Glieder Null und die Gleichung würde unbrauchbar. Um dem abzuhelfen, verwandeln wir sie in eine andere, die $y_m : a$ nicht mehr als Funktion von $S:K$, sondern als Funktion einer kleinen Abweichung hiervon darstellt. In diesem Kunstgriff liegt die Neuheit des Verfahrens. Es ist in nachstehender Weise durchzuführen.

$$\textbf{(10)}\qquad \text{Gesetzt:}\ \sqrt{\frac{S}{K}} = 1 - u .$$

Hiermit durch Reihenentwicklung bis zur zweiten Potenz von u:

$$(11)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{S}{K} = 1 - u(2-u)\,; \quad \dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{K}(1 + 2u) . \\ \sin \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} = 1 : \quad \cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} = \dfrac{\pi}{2} u\,; \quad \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{S}{K}} = \dfrac{\pi^2}{4} u . \end{array} \right.$$

Wenn man diese Werte in (9) einführt und die drei Ausdrücke der rechten Seite auf den gemeinschaftlichen Nenner $u(2-u)$ bringt, so ergibt sich

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{y_m}{a} u(2-u) = {} & \frac{Q}{4K}\left(\frac{4}{\pi^2} - u\right)(1 + 2u)(2-u) \\ & + \frac{y_0}{a}(1 - 2u + u^2) \\ & + \frac{f}{a}\left(\frac{2}{\pi} - u\right)(2-u) . \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren im Zähler entstehen Glieder, die teils frei sind von u, teils u in der ersten, teils in höheren Potenzen enthalten. Es sei nun u so klein, daß die letzteren vernachlässigt werden dürfen. Dann kann man auch im Nenner u gegen 2 streichen und erhält man aus (12)

$$(13) \qquad \frac{y_m}{a} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{Q}{K} + \dfrac{1}{2}\dfrac{y_0}{a} + \dfrac{2}{\pi}\dfrac{f}{a}}{u} \\ -\left[\dfrac{Q}{4K}\left(1 - \dfrac{6}{\pi^2}\right) + \dfrac{y_0}{a} + \dfrac{f}{a}\left(1 + \dfrac{1}{\pi}\right)\right]. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung gilt um so genauer, je kleiner u ist, d. h. je näher S der Knicklast K kommt.

Wir nehmen jetzt an, die Größen Q, y_0 und f seien so beschaffen, daß sie der Gleichung

$$(14) \qquad \frac{1}{\pi^2}\frac{Q}{K} + \frac{1}{2}\frac{y_0}{a} + \frac{2}{\pi}\frac{f}{a} = 0$$

genügen. Dann hat $y_m : a$ den Wert

$$(15) \qquad \left[\frac{y_m}{a}\right]_g = -\left[\frac{Q}{4K}\left(1 - \frac{6}{\pi^2}\right) + \frac{y_0}{a} + \frac{f}{a}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\right].$$

Dies gilt für jedes $u > 0$ auch bei beliebig weit getriebener Annäherung von S an K. Damit ist erwiesen, daß das durch (15) bestimmte $y_m : a$ die Grenzausbiegung darstellt. Wir haben es deshalb schon durch den Zeiger g als solche gekennzeichnet.

Wird nun aber in aller Strenge

$$(16) \qquad u = 0, \text{ also } S = K.$$

dann folgt mit (14) aus (13)

$$(17) \qquad \frac{y_m}{a} = \frac{0}{0}.$$

Die Ausbiegung wird also unbestimmt. Und damit erweist sich die Gleichung (14) als die gesuchte Knickbedingung. Sie lehrt, daß zwei von den drei Größen Q, y_0, f beliebig angenommen werden können, und bestimmt dann die dritte so, daß die Ausbiegung y_m der Stabmitte bei $S = K$ unbestimmt wird. Die Lösung gilt aber nur, solange sich mit den fraglichen drei Werten von Q, y_0, f aus (15) ein Betrag von $y_m : a$ ergibt, der genügend klein ist, um unzulässige Spannungen an der Knickgrenze auszuschließen.

So ist ein überraschend klarer Einblick in das Innere des Geschehens bei unbegrenzter Annäherung der Stabkraft an die Knicklast gewonnen.

Wenn die Querlast fehlt, geht die vorliegende Aufgabe in die schon früher gelöste über, in der nur f und y_0 als bestimmende Größen auftraten. Dies gibt Gelegenheit zu einer Rechenprobe.

Mit $\boldsymbol{Q=0}$ folgt aus (14) als Knickbedingung

$$\frac{f}{y_0} = -\frac{\pi}{4}\,. \tag{18}$$

und damit aus (15) als Grenzausbiegung

$$\frac{[y_m]_g}{y_0} = \frac{\pi-3}{4}\,. \tag{19}$$

Die Gleichung (18) stimmt mit (7), und (19) mit (9) auf Seite 266 der Sitzungsberichte für 1923 überein, da $[y_m]_g$ und δ_g die gleiche Bedeutung haben. (Näheres in dem in Anmerkung 1 genannten Sonderdruck.)

Zweite Annahme: $n \gtrless 1$.

Wir führen diesmal nicht erst den Wert von $\alpha/2$ aus (7) in die Gleichungen (4) bis (6), sondern benutzen gleich den Ersatz von $S:K$ durch u gemäß (10) und (11). Es zeigt sich, daß die Brüche in den Klammern von (4) und (6) den Nenner u erhalten, während in (5) der Nenner $(n^2-1+2u)u$ erscheint. Bringt man auch (4) und (6) auf diesen Nenner, und bildet man aus allen drei Gleichungen die Summe, so folgt

$$\frac{y_m}{a} = \frac{\frac{1}{\pi^2}\frac{Q}{K} - \frac{2}{\pi}\frac{y_0}{a}\frac{n^2}{n^2-1}\cos n\pi/2 + \frac{2}{\pi}\frac{f}{a}}{u} \tag{20}$$
$$+\frac{Q}{K}\left[\frac{2n^2:\pi^2}{n^2-1} - \frac{1}{4}\right] + \frac{y_0}{a}\left[\frac{1}{n^2-1} + \cos n\pi/2\right] + \frac{f}{a}\left[\frac{4:\pi}{n^2-1} - 1\right].$$

Hier greifen nun wieder ganz dieselben Erwägungen Platz wie bei der ersten Annahme. Die Knickbedingung lautet also

$$\mathbf{(21)}\qquad \frac{1}{\pi^2}\frac{Q}{K} - \frac{2}{\pi}\frac{y_0}{a}\frac{n^2}{n^2-1}\cos n\pi/2 + \frac{2}{\pi}\frac{f}{a} = 0\,,$$

womit nach (20) die Grenzausbiegung:

$$\mathbf{(22)}\qquad \left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \frac{Q}{K}\left[\frac{2n^2:\pi^2}{n^2-1} - \frac{1}{4}\right] + \frac{y_0}{a}\left[\frac{1}{n^2-1} + \cos n\pi/2\right] + f\left[\frac{4:\pi}{n^2-1} - 1\right].$$

Auch in diesem Falle gestattet die Annahme $\boldsymbol{Q=0}$ eine Rechenprobe durch Vergleich mit den Ergebnissen der vorher erwähnten Arbeit. Aus (21) folgt nämlich als Knickbedingung

$$\frac{f}{y_0} = \frac{\cos n\pi/2}{1-\frac{1}{n^2}}\,. \tag{23}$$

und damit aus (22) als Grenzausbiegung

$$(24)\qquad \frac{[y_m]_g}{y_0} = \left(\frac{4:\pi}{n^2-1} - 1\right)\frac{\cos n\pi/2}{1-\frac{1}{n^2}} + \cos n\pi/2 + \frac{1}{n^2-1}$$

$$= \frac{\frac{4}{\pi} + \frac{1}{n^2} - 1}{n^2 + \frac{1}{n^2} - 2}\cos n\pi/2 + \frac{1}{n^2-1}\,.$$

Die Gleichung (23) stimmt mit (6), und (24) mit (8) auf Seite 265 und 266 der Sitzungsberichte für 1923 überein, wie auch aus dem in Anmerkung 1 genannten Sonderdrucke zu ersehen ist. Man erkennt hieraus, daß die vorliegende Untersuchung einen wesentlichen Teil der früheren mit umfaßt.

Übergang von $n \gtrless 1$ zu $n = 1$.

Die Gleichungen (21) und (22) werden unbrauchbar für $n = 1$. Dieser Fall ist nun zwar schon als erste Annahme erledigt. Es würde aber eine erwünschte Rechenprobe abgeben, wenn man die Gleichungen (14) und (15) auch aus (21) und (22) herleiten könnte. Daß dies möglich sein muß, unterliegt aus mathematischen Gründen keinem Zweifel. Es ist auch leicht ausführbar für (21). Setzt man nämlich

$$n = 1 + v\,.$$

wo v eine beliebige verschwindend kleine Größe bedeutet. so ergibt ein einfacher Grenzübergang mit $v = 0$

$$(25)\qquad \frac{\cos n\pi/2}{1-\frac{1}{n^2}} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{für } n = 1\,.$$

Hierdurch ist (21) auf (14) zurückgeführt.

Mit (22) und (15) gelingt es nicht — warum, das liegt nicht so ganz klar zutage. Erst durch eingehende Prüfung wird der Grund ersichtlich. Die drei Größen Q, y_0 und f sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Gleichung (21) verknüpft. Infolgedessen kann auch der Grenzübergang von (22) nicht unabhängig von (21) stattfinden. Das deutet den einzuschlagenden Weg an: Man berechnet eine beliebige von den drei Größen Q, y_0, f aus (21) und setzt ihren durch die beiden anderen ausgedrückten Wert in (22) ein. Diese Gleichung enthält dann nur noch zwei voneinander unabhängige Größen. Deren Faktoren müssen daher je **für sich** die Grenzbedingung erfüllen. Nachdem der Übergang zu $v = 0$ bewirkt ist, kann darauf die dritte Größe vermöge ihrer vorher gefundenen Beziehung zu den beiden anderen wieder eingeführt und so eine alle drei enthaltende Gleichung für $[y_m : a]_g$ gewonnen werden. Ein Beispiel wird das erläutern.

Als diejenige Größe, die durch die beiden anderen ausgedrückt werden soll, wählen wir $y_0 : a$. Dann folgt aus (21)

$$(26)\qquad \frac{y_0}{a} = \left(\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{K} + \frac{f}{a}\right)\frac{n^2-1}{n^2\cos n\pi/2}\,.$$

Dies in (22) ergibt bei Ordnen nach $Q:K$ und $f:a$

$$(27)\qquad \left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \left\{\begin{array}{l} \frac{Q}{K}\left[\frac{2n^2:\pi^2}{n^2-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n^2\cos n\pi/2} + \frac{1}{2\pi}\frac{n^2-1}{n^2}\right] \\ + \frac{f}{a}\left[\frac{4:\pi}{n^2-1} - 1 + \frac{1}{n^2\cos n\pi/2} + \frac{n^2-1}{n^2}\right]. \end{array}\right.$$

Durch Ausführung des Grenzüberganges mit $n = 1 + v$ wird hieraus

$$(28)\qquad \left[\frac{y_m}{a}\right]_g = -\frac{Q}{K}\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{2\pi^2}\right) - \frac{f}{a}\left(1 - \frac{3}{\pi}\right).$$

Derselbe Grenzübergang mit (26) ausgeführt ergibt, wie (25) zeigt,

$$(29)\qquad 0 = -\frac{Q}{K}\frac{2}{\pi^2} - \frac{y_0}{a} - \frac{f}{a}\frac{4}{\pi}\,.$$

Dies zu (28) hinzufügend, erhält man schließlich die Gleichung (15). Damit ist nachgewiesen, daß die einmal mit $n = 1$, das andere Mal mit $n \gtrless 1$ entwickelten Gleichungen miteinander übereinstimmen.

III. Beispiele.

(In den Bildern sind die Anfangsformen der Stabachse durch stärkere Linien hervorgehoben.)

1. Gerader Stab: $y_0 = 0$.

Aus (14) oder (21) folgt der Fehlerhebel

$$\frac{f}{a} = -\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{K} = -0.159\,\frac{Q}{K}\,.$$

Dies in (15) ergibt die Grenzausbiegung

$$\left[\frac{y_m}{a}\right]_g = -\frac{Q}{K}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi}\right) = 0.112\,\frac{Q}{K}\,.$$

Um das bequem bildlich darstellen zu können, setzen wir

$$\mathbf{Q = 0.01\,K} \quad \text{und} \quad \mathbf{a = 1000\ mm},$$

womit

$$\mathbf{f = -1.59\ mm} \quad \text{und} \quad \mathbf{[y_m]_g = 1.12\ mm}\,.$$

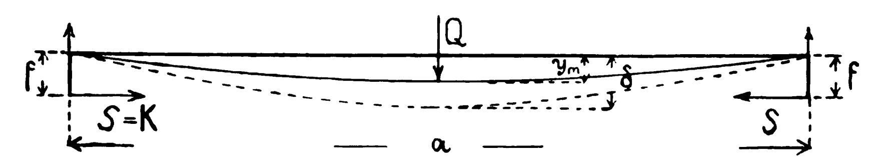


Bild 2. Knickform des geraden Stabes.

Bild 2 deutet die entsprechende Knickform an.

Bezeichnet man die Durchbiegung, die derselbe Stab bei fehlender Längskraft annehmen würde, mit δ, so ist bekanntlich

$$\delta = \frac{1}{48}\frac{Qa^3}{EJ}.$$

Dies mit
$$K = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 EJ$$
multipliziert

ergibt
$$\delta K = \frac{\pi^2}{48} Qa$$

oder
$$\frac{\delta}{a} = \frac{\pi^2}{48}\frac{Q}{K} = 0.206\frac{Q}{K}.$$

Mit den vorher benutzten Zahlenwerten von $Q:K$ und a wird also

$$\delta = 2.06 \text{ mm}.$$

Die entsprechende Biegelinie — eine Kurve dritten Grades — ist im Bild 2 gestrichelt angedeutet. Man kann sich das Zustandekommen der Knickform hiernach so vorstellen, daß der Stab zunächst nur mit 0.01 K querbelastet, und daß dann die Eulerkraft K an den Hebelarmen -1.59 mm wirkend angebracht wird. Der Stab biegt sich hierbei nach oben und gelangt in die im Bild angegebene Grenzlage mit unbestimmtem Gleichgewicht. Bei der geringsten Steigerung der Achslast über K biegt er sich dann unbegrenzt nach oben oder unten aus. (Nach der strengen Theorie ist die Ausbiegung nicht unbegrenzt, sondern kann der Stab eine neue Gleichgewichtslage einnehmen. Technisch ist dies aber bedeutungslos, weil schon bei einem äußerst geringen Anwachsen von S über K hinaus ganz unzulässige Formänderungen eintreten, bevor die neue Gleichgewichtslage erreicht ist. S. Sitzungsberichte 1925, Seite 498, oder Sonderdruck: »Der Begriff der Knickgrenze. II.«)

2. Einwellig krummer Stab: $n = 1$; Fehlerhebel $f = 0$.

Aus (14) folgt die Querlast

$$\frac{Q}{K} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{y_0}{a} = -4.935\frac{y_0}{a}.$$

Dies in (15) ergibt die Grenzausbiegung

$$\left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \frac{y_0}{a}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{7}{4}\right) = -0.516\frac{y_0}{a},$$

oder

$$\left[\frac{y_m}{y_0}\right]_g = -0.516 .$$

Die Ausbiegung an der Knickgrenze ist also negativ und ungefähr halb so groß wie der anfängliche Krümmungspfeil y_0. Um die Krümmung des Stabes in solchem Maße zu verkleinern, muß eine negative Querlast angebracht

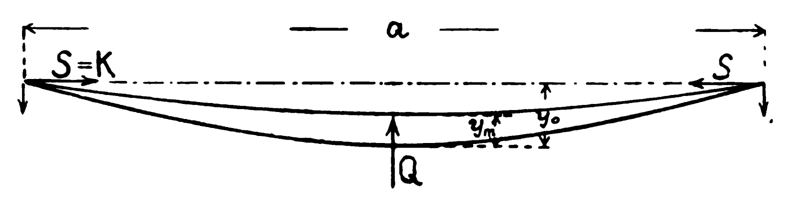


Bild 3. Knickform des einwelligen Stabes.

werden, deren Verhältnis zur Knicklast von dem Verhältnis des Pfeiles y_0 der Anfangskrümmung zur Stablänge a abhängt. Angenommen, es sei im Bild 3

$$y_0 = 2 \text{ mm} \quad \text{und} \quad a = 1000 \text{ mm} .$$

Dann wird

$$\frac{Q}{K} = -0.0099 \quad \text{und} \quad [y_m]_g = -1.03 \text{ mm} .$$

Es genügt also eine der Anfangskrümmung entgegenwirkende Querlast von rund $^1/_{100}$ der Knicklast, um den schädlichen Einfluß der Krümmung auszugleichen und den Stab an die Eulergrenze zu bringen. Es könnte auffallen, daß dabei noch ein Krümmungsrest von $2 - 1.03 = 0.97$ mm verbleibt, da man annehmen möchte, daß der Stab erst gerade gebogen sein müßte, bevor er die achsrecht angreifende Knicklast K zu tragen vermag. Dabei würde aber übersehen, daß an den Enden des Stabes nicht nur die Achslasten K, sondern auch noch die lotrechten Auflagergegendrücke $Q:2$ der Querlast Q wirken.

3. Dreiwellig krummer Stab: $n = 3$.

Wegen $\cos n\pi/2 = 0$ ist nach (21)

$$\frac{f}{a} = -\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{K} = -0.159\frac{Q}{K}$$

wie beim geraden Stabe.

Aus (22) folgt

$$\left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \frac{Q}{K}\left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\frac{y_0}{a} = 0.112\frac{Q}{K} + \frac{1}{8}\frac{y_0}{a} .$$

Wenn die Querlast fehlt, ist $f = 0$ und

$$\frac{[y_m]_q}{y_0} = \frac{1}{8}.$$

Dies Ergebnis findet sich schon in der in Anmerkung 1 genannten Untersuchung auf Seite 270 und 271. Dort ist auch mitgeteilt, daß, solange wie S kleiner ist als K, die Scheitel der äußeren Wellen sich ebensoviel nach oben ausbiegen wie der Scheitel der mittleren Welle nach unten, und daß die Schnittpunkte der Achse mit der Stabsehne (das sind die Wendepunkte der Kosinuslinie) an ihrer Stelle bleiben. Erst wenn $S = K$ wird, weichen die Wendepunkte nach oben oder unten aus. Tritt nun aber eine positive Last Q hinzu, so werden negative Gegenhebel erforderlich, um die Erreichung der Knickgrenze zu ermöglichen. Daß diese Hebel genau so groß sein müssen wie wenn der Stab gerade wäre, ist oben schon bemerkt. Durch Q wird die Stabmitte weiter nach unten gebogen als bei dem Stab ohne Querlast. An der Knickgrenze ist der Mehrbetrag $\doteq 0.112\ Q:K$, also wiederum ebenso groß wie beim geraden Stabe im ersten Beispiel die Gesamtausbiegung. Nebenher geht als Grenzausbiegung der einzelnen Wellen nach unten und oben der

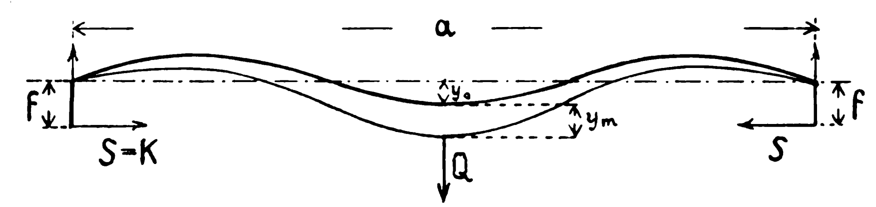


Bild 4. Knickform des dreiwelligen Stabes.

Betrag $1/8\ y_0$. Im Bild 4 ist dieses Verhalten des Stabes andeutungsweise dargestellt. Man kann sich also die Ausbiegungen des dreiwelligen Stabes mit Querlast und Gegenhebeln zusammengesetzt denken aus denen des geraden Stabes mit denselben Einwirkungen und denen des dreiwelligen Stabes ohne diese.

Hiermit kommen wir am Schluß noch zu einem Punkte von allgemeinster Bedeutung. In der in Anmerkung 1 genannten Untersuchung ist gezeigt, daß die anfänglich nur für die einfache Kosinuslinie abgeleiteten Ergebnisse auch für alle Kurven gelten, deren Höhen aus denen einer beliebigen Zahl verschiedener Kosinuslinien zusammengesetzt werden können. Im Heft 4 der »Bautechnik« von 1924 ist das auf Seite 25 und 26 noch durch eine größere Zahl von Beispielen und Bildern erläutert worden. Es ist klar, daß dieser Satz auch für den Stab mit Querbelastung gelten muß, und das vorstehende Beispiel 3 hat es bestätigt. Er gilt auch für Stäbe mit vieleckiger Anfangsform.

Die Verdünnungswärme von Salzen bei sehr kleinen Konzentrationen.

Von W. Nernst und Dr. W. Orthmann
in Berlin.

(Vorgetragen am 14. Januar 1926 [s. oben S. 21].)

Einleitung. Die neueren Theorien[1] der Elektrolytlösungen gehen davon aus, daß bei starken Elektrolyten bei hinreichend großen Verdünnungen (etwa unter 0.05 normal) lediglich die elektrischen Ladungen der Ionen die Abweichungen bedingen sollen, die man von denjenigen Werten findet, die sich unter Anwendung der Gasgesetze und Annahme vollständiger Dissoziation berechnen lassen. Auf diese Weise wird sofort der bekannte Befund erklärlich, daß analog konstituierte Salze, d. h. Salze, die aus gleichwertigen Ionen bestehen (z. B. KCl und LiCl), gleiche Werte des osmotischen Drucks in äquimolekularen Konzentrationen aufweisen. In idealen Lösungen, d. h. bei Gültigkeit der Gasgesetze, muß die Verdünnungswärme null sein; die erwähnten Theorien verlangen daher, daß etwa auftretende Verdünnungswärmen, selbstverständlich auf hinreichend kleine Konzentrationen bezogen, ebenfalls für analog konstituierte Elektrolyte gleich groß sind, wie übrigens auch Debye[2] gelegentlich angemerkt hat, und wie in einer soeben in der Zeitschrift für physikalische Chemie erscheinenden ausführlichen Arbeit von Bjerrum des näheren ausgeführt wird (vgl. weiter unten).

Die Methoden zur Bestimmung selbst äußerst kleiner Verdünnungswärmen sind in dem von einem von uns früher geleiteten Göttinger Institut für physikalische Chemie[3] wohl bereits weitgehend ausgearbeitet.

Es kann wohl überraschen, daß die für die erwähnten neueren Theorien offenbar fundamentale Frage der Verdünnungswärmen bisher experimentell nicht behandelt worden ist. Diese Lücke soll durch die im folgenden beschriebenen Messungen ausgefüllt werden. Und um unser Hauptresultat vorweg zu nehmen: Das Ergebnis unserer Messungen dürfte in der fundamentalen Frage der Verdünnungswärme mit der Grundlage der obenerwähnten neueren Theorien schwer vereinbar sein.

Apparatur. Für unsere Messungen stellte uns in freundlichster Weise Hr. von Steinwehr[4] das für andere Zwecke von ihm kürzlich benutzte Kalorimeter zur Verfügung. Wegen aller Einzelheiten sei auf diese Arbeit ver-

---

[1] Milner, Phil. Mag. 23, 551, 1912; 25, 743, 1913. J. Ch. Ghosh, Zeitschr. f. phys. Chem. 98, 211, 1921. P. Debye u. E. Hückel, Phys. Zeitschr. 24, 185, 1923.

[2] A. a. O. S. 193.

[3] H. v. Steinwehr, Zeitschr. f. phys. Chem. 38, 185, 1901. G. Rümelin, Zeitschr. f. phys. Chem. 58, 449, 1907.

[4] H. v. Steinwehr, Zeitschr. f. phys. Chem. 88, 229, 1914.

wiesen; bemerkt sei nur, daß die Temperaturen mit Hilfe von 20 Eisenkonstantan-Thermoelementen gemessen wurden und daß es sich um ein Differentialkalorimeter handelt, indem zwei genau gleiche Kalorimetergefäße benutzt werden. Zur Bestimmung der Thermokraft verwandten wir das für solche Zwecke höchst brauchbare Galvanometer von Diesselhorst in der Ausführung der Firma Siemens. Da wegen der Trägkeit der Thermoelemente die Einstellung des Temperaturgleichgewichts — die Verdünnungswärme stellt sich natürlich praktisch momentan ein — etwa 25 Sekunden erforderte, so konnte mit höchster Schwingungsdauer und starker Dämpfung gearbeitet werden, d. h. wir durften auf den sonst meistens erforderlichen Ballastwiderstand verzichten. Der Widerstand der Galvanometerleitung war Widerstand des Galvanometers 55 Ohm + Widerstand der Thermoelemente 26 Ohm, zusammen 81 Ohm. Die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde nach jeder Messung in der Weise kontrolliert, daß an ein in der Galvanometerleitung liegendes Normalohm ein Westonelement mit 100000 Ohm Vorschaltwiderstand angelegt wurde. Es ergab sich ein Ausschlag von 1 mm für 0.121 Grammkalorien. Da jedes Kalorimeter eine Wärmekapazität von etwa 1000 Kalorien besaß, so konnte man bei einer Ablesungsgenauigkeit bis auf etwas mehr als 0.1 mm etwa bis auf hunderttausendstel Grade messen. Die Eichung des Galvanometers auf Kalorien geschah in der üblichen Weise mit Hilfe elektrischer Erwärmung, indem die Spannung an den Enden eines Widerstandes (etwa 2 Ohm, bestehend aus einem mit Quecksilber gefüllten und gebogenen Glasrohr, das zum Teil in eine äußerst feine Kapillare ausgezogen war) und der in 10 bis 20 Sekunden hindurchgeleitete Strom gemessen wurden. Wir begnügten uns absichtlich mit einem Ausschlag von wenigen Millimetern, machten die Eichung fast nach jeder Versuchsreihe und überzeugten uns, daß wir trotz eines so kleinen Ausschlags, wie er ähnlich ja auch nur bei unseren Messungen auftrat, durch Mittelnehmen aus mehreren Messungen durchaus zuverlässige Werte erhielten. Mit anderen Worten: wir imitierten die thermochemische Messung möglichst durch eine entsprechende Messung elektrischer Energie, die unter vollkommen vergleichbaren Umständen erfolgte, und gewannen so die Sicherheit, daß unsere Messungen durch grobe Fehler unbekannten Ursprungs wohl unmöglich entstellt sein können.

Die Genauigkeit jeder einzelnen Messung hängt natürlich sehr von der Regelmäßigkeit des Temperaturganges vor und nach dem zu messenden Wärmeeffekt ab. Die Galvanometerablesung erfolgte jede halbe Minute. Die Messungen wurden in der üblichen Weise unter Berücksichtigung des Temperaturganges berechnet. Natürlich war dieser Temperaturgang bisweilen etwas unregelmäßig, weil er von vielen Zufälligkeiten abhängt. Wir wollen daher einer Einzelmessung im allgemeinen, d. h. besonders günstige Umstände ausgenommen, keine größere Genauigkeit als 0.5 mm zuschreiben. Da aber jede einzelne Zahl das Mittel aus mehreren Versuchen ist, so dürfte im allgemeinen nur mit einer Unsicherheit von einigen Zehntel Millimetern Galvanometerablesung zu rechnen sein, was auch die überaus zahlreichen elektrischen Eichungen bestätigen. Da wir die Überzeugung gewonnen haben, daß durch eine große Anzahl Verbesserungen (Steigerung der Galvanometerempfindlichkeit auf etwa das Hundert-

fache, mechanische Rührung anstatt der Rührung mit Hilfe der Hand, Vermehrung der Zahl der Thermoelemente, Verringerung des Einflusses der Außentemperatur dadurch, daß man auf die vortrefflichen mit dem Kupferkalorimeter gemachten Erfahrungen hin die beiden Kalorimeter mit einem dickwandigen, ebenfalls innerhalb des Vakuumgefäßes befindlichen, vollkommen geschlossenen Kupfermantel umgibt) die Genauigkeit der Messungen wohl noch ganz außerordentlich gesteigert werden kann, so bitten wir, den nachfolgend beschriebenen Messungen mehr einen vorläufigen Charakter zuschreiben zu wollen, wobei aber betont sei, daß die von uns behandelte Frage bereits durch das nachfolgende Beobachtungsmaterial weitgehend geklärt ist. Mit anderen Worten: nicht zur Prüfung der vorhandenen Theorien, die sich bezüglich der Verdünnungswärme als unbrauchbar ergeben haben, sondern als Prüfungsmaterial für etwaige künftige, offenbar andersartige Theorien ist beabsichtigt, auch die Verdünnungswärmen mit der gleichen Exaktheit zu bestimmen, wie es für die Gefrierpunktserniedrigungen sehr verdünnter Lösungen durch die von einem von uns veranlaßten Arbeiten früher geschehen ist[1].

Art der Vermischung der Lösung. Die schwierigste von uns zu lösende Frage bestand in der Art und Weise, wie die Vermischung der konzentrierteren mit der verdünnteren Lösung zu erfolgen hat. Da bereits jede Unregelmäßigkeit des Rührens — der bei unseren Versuchen benutzte, vollkommen symmetrisch gebaute Doppelrührer wurde nach dem Takte eines Metronoms mit der Hand betätigt, so daß etwaige dadurch hervorgerufene Wärmeentwickelungen durch Berücksichtigung des Temperaturganges herausfallen — nach unseren früheren Erfahrungen gewaltige Fehler bedingen kann, so mußte auf das sorgfältigste geprüft werden, ob nicht die notwendigerweise mit einer kleinen Extrarührung verbundene Vermischung störend wirken kann. Als wir die konzentriertere Lösung in einem Reagenzgläschen unterbrachten, dessen Boden durch einen kleinen innerhalb desselben befindlichen Rührer durchstoßen wurde, zeigten sich bei »Leerversuchen« (Benutzung der gleichen Lösung innerhalb des Reagenzgläschens und außerhalb desselben) sofort unregelmäßige Wärmeeffekte, die eine genauere Messung unmöglich machten.

Nach einigen weiteren Versuchen bewährte sich folgende Einrichtung: Auf ein Reagenzgläschen mit abgesprengtem Boden wurde ein kurzes Stückchen Gummischlauch geschoben, in welches ein tellerförmig gestanztes Stückchen Messingblech als Bodenabschluß eingesetzt wurde. Durch einen leisen Druck des Rührers wurde der Verschluß herausgedrückt und durch den inneren Rührer für rasche Vermischung gesorgt. In jedes Kalorimeter wurden zwei Reagenzgläschen eingetaucht, so daß unmittelbar hintereinander immer vier Versuche zur gegenseitigen Kontrolle ausgeführt werden konnten. In jedem Reagenzglas befanden sich immer 15 ccm der konzentrierteren Lösung, während die Kalorimeter stets 900 ccm einer verdünnteren Lösung des gleichen Elektrolyten enthielten. Ein »Leerversuch«, wozu innen und außen die gleiche verdünnte Chlorkaliumlösung diente, ergab die Galvanometerausschläge 0.0; 0.3; 0.0; 0.0, d. h. die Vermischung verlief ohne merkliche sekundäre Wärme-

[1] W. Nernst, Theoretische Chemie. 11.—15. Aufl., 1926, S. 303.

entwicklung. Vor jedem Versuch wurde natürlich auch die Lösung im Reagenzgläschen ein wenig gerührt, um etwaige Temperaturdifferenzen zwischen innen und außen möglichst auszugleichen. Daß bei den eigentlichen Messungen die Vermischung vollständig war, wurde in mannigfaltiger Weise kontrolliert. z. B. auch in der Weise, daß man die Reagenzgläschen mit einer ziemlich konzentrierten Lösung beschickte und sich davon überzeugte, daß die in diesem Falle erhebliche Temperaturänderung rasch (in etwa 30—50 Sekunden) zur vollständigen Messung gelangte, daß sich also in der Tat keine nachträglichen Vermischungen, die sich durch weitere Wärmeeffekte hätten verraten müssen, abspielten.

Versuchsergebnisse. In der folgenden Tabelle befinden sich unter:

1 der untersuchte Elektrolyt,

2 die benutzten Konzentrationen innen und außen, ausgedrückt in Molen pro Liter,

3 das Defizit an osmotischer Arbeit W, welches sich bei der betreffenden Verdünnung infolge der (scheinbaren) unvollständigen Dissoziation des benutzten Elektrolyten ergibt, und zwar ausgedrückt in Grammkalorien. Diese Größe wurde von W. Orthmann in leicht ersichtlicher Weise durch graphische Integration aus den Gefrierpunktserniedrigungen berechnet. Dieselbe bezieht sich also auf null Grad, doch ist bekannt, daß der Temperaturkoeffizient dieser Größe jedenfalls klein ist, so daß sie in erster Annäherung direkt mit den von uns bei etwa 16 Grad gemessenen Verdünnungswärmen in Parallele gesetzt werden kann. Für analog gebaute Elektrolyte hat sich diese Größe bekanntlich als von der Natur des (starken) Elektrolyten praktisch unabhängig erwiesen[1],

4 die Größe $U_e = \frac{3}{2} W$,

5 die beobachtete Wärmetönung in Grammkalorien. Es sei nochmals hervorgehoben, daß diese Größe, allerdings wohl nur in seltenen Fällen, um mehrere Hundertstel Kalorien unsicher sein kann. Die thermochemisch übliche Umrechnung auf ein Molgehalt der zu verdünnenden Lösung, die ja sehr einfach erfolgen kann, haben wir hier nicht ausgeführt, weil in einer künftigen ausführlicheren Arbeit das Beobachtungsmaterial erweitert und der Abfall der Verdünnungswärme mit abnehmender Konzentration in weiter verfeinerter Apparatur näher untersucht werden soll,

6 die unter Berücksichtigung der Elektrostriktion nach Bjerrum berechneten Werte.

Im Gebiete konzentrierter Lösungen ergab sich für

LiCl: Verdünnungswärme +1.68 (Konz. 1.0; 0.0086)
» +0.40 (Konz. 0.33; 0.0032)

[1] Vgl. z. B. neuerdings J. Ch. Ghosh a. a. O.

Tabelle.

1	2		3	4	5	6
KCl	0.1;	0.0016	−0.21	−0.31	ca. −0.02	+0.10
KNO_3	0.1;	0.0016	−0.21	−0.31	−0.15	+0.10
$LiCl$	0.1;	0.0011	−0.22	−0.33	+0.08	+0.10
	0.03:	0.0027	−0.025	−0.038	ca. +0.03	+0.012
$CaCl_2$	0.10;	0.0016	−0.591	−0.888	+0.194	+0.280
	0.033;	0.0011	−0.125	−0.187	+0.036	+0.059
$Ca(NO_3)_2$	0.10;	0.0016	−0.591	−0.888	−0.060	+0.280
	0.033:	0.0011	−0.125	−0.187	−0.018	+0.059
$ZnSO_4$	0.0167;	0.0007	−0.133	−0.200	+0.048	+0.063
	0.033;	0.0011	−0.335	−0.503	+0.061	+0.158
	0.10;	0.0016	−1.455	−2.180	+0.266	+0.687
CaS_2O_6	0.033:	0.0027	−0.249	−0.374	+0.023	+0.118
	0.10:	0.0011	−1.537	−2.306	+0.135	+0.726

Allgemein ergibt sich als erste Annäherung eine für die Kontrolle der Messungen nützliche Regel, daß die Verdünnungswärme, gleichgültig ob positiv oder negativ, auf $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ sinkt, wenn die Konzentration der zu verdünnenden Lösung auf etwa $\frac{1}{3}$ vermindert wird.

Man ersieht aus obiger Tabelle, daß KCl und KNO_3 auch in recht verdünnten Lösungen negative, $LiCl$ positive Verdünnungswärmen aufweisen. Ferner fand (a. a. O. S. 195) von Steinwehr, daß HCl bis zu 0.005 normal herab bei Verdünnung Wärme entwickelt. — Ebenso weisen die beiden ebenfalls unter sich analog gebauten Salze $CaCl_2$ und $Ca(NO_3)_2$ Verdünnungswärmen von entgegengesetzten Vorzeichen auf. — Die beiden letzten, wiederum unter sich analogen Salze $ZnSO_4$ und CaS_2O_6 haben stark verschiedene positive Verdünnungswärmen. Der Gegensatz zu den Folgerungen der Theorie konnte kaum krasser sein, als er sich in diesen Ergebnissen ausdrückt.

Zur Theorie der Verdünnungswärme. Debye geht von der Gleichung aus

$$P = n P_0 - \frac{\partial W}{\partial V},$$

worin P den beobachteten, P_0 den aus den Gasgesetzen berechneten osmotischen Druck, n die Zahl der Ionen des betreffenden Elektrolyten, V das Volumen der Lösung, das ein Mol enthält, und W das nach dieser Gleichung aus den Gefrierpunktsmessungen oben berechnete Defizit an osmotischer Arbeit bedeutet. Die Verdünnungswärme setzte er zunächst für stark verdünnte Lösungen[1]

$$U_e = -\sum \frac{N_i z_i^2}{2} \frac{\varepsilon^2 \varkappa}{D}, \quad \text{wo } \varkappa^2 = \frac{4\pi\varepsilon^2}{DkT} \sum n_i z_i^2 \text{ ist.}$$

[1] P. Debye u. E. Hückel, Phys. Zeitschr. 24, 193, 1923.

Darin bedeutet: N_i die Gesamtzahl, n_i die Zahl pro ccm, z_i die Wertigkeit der Ionen der i-ten Sorte, ε das elektrische Elementarquantum, D die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, T die absolute Temperatur und k die Boltzmannsche Konstante. Ferner sei hervorgehoben, daß nach Debye W und U_e durch folgende Formel miteinander verknüpft sind:

$$U_e = \frac{3}{2} W.$$

In einer freundlichen brieflichen Mitteilung gibt er jedoch an, daß durch Berücksichtigung der Elektrostriktion des Lösungsmittels sich ergibt

$$U = \frac{3}{2} W \left(1 + \frac{T}{D} \frac{dD}{dT} \right),$$

eine Formel, die sich übrigens auch in der oben erwähnten Arbeit Bjerrums abgeleitet findet.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, kann man folgendes feststellen. Die Theorie von Debye verlangt, ebenso wie die ältere Theorie von Ghosh, daß, ebenso wie der osmotische Druck verdünnter Elektrolytlösungen, so auch die Verdünnungswärme nur von den Ladungen der Ionen abhängig, also für analog konstituierte Elektrolyte ebenso mindestens annähernd gleich groß sein muß, wie es bekanntlich für den osmotischen Druck sehr nahe zutrifft. Unsere Versuche zeigen aber, wie schon soeben hervorgehoben, daß Größe und selbst Vorzeichen der Verdünnungswärme auch in recht verdünnten Lösungen für analog gebaute Elektrolyte sich ganz verschieden herausstellt.

Von einer numerischen Übereinstimmung zwischen den gemessenen Verdünnungswärmen und den, sei es nach dem ersten Ansatz von Debye, sei es nach den korrigierten Formeln von Debye oder Bjerrum berechneten Werten, kann also gar keine Rede sein, wie auch der Vergleich der Kolumne 5 mit 4 bzw. 6 lehrt.

Zusammenfassung. Die neueren Theorien, welche die scheinbar unvollständige Dissoziation starker Elektrolyte wesentlich auf die elektrischen Ladungen zurückführen wollen, versagen, sobald man von diesem Standpunkt die Verdünnungswärmen hinreichend verdünnter Lösungen deuten will. Da Verdünnungswärme und osmotische Arbeit bereits durch die ältere Thermodynamik, besonders aber durch den neuen Wärmesatz aufs engste miteinander verknüpft sind, muß wohl infolge gänzlichen Versagens der Theorie im ersten Falle auch die etwaige Anwendbarkeit der Theorie auf den zweiten Fall als mehr oder weniger zufällig bezeichnet werden.

Ausgegeben am 9. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

VI. Gesamtsitzung. 18. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. v. Laue trug vor eine Untersuchung gemeinsam mit Hrn. Dr. H. Mark über die Zerstreuung inhomogener Röntgenstrahlen an mikrokristallinen Körpern.

Sie zeigt, wie sich aus der Theorie der Interferenzen an Kristallen die älteren und die von den Verfassern selbst angestellten Streuversuche ohne jede besondere Annahme über die Atomstruktur deuten lassen. Insbesondere ergibt sich zwangsläufig die immer wieder beobachtete Bevorzugung der Richtungen, welche dem einfallenden Strahl nahe liegen.

2. Hr. Wiegand überreichte einen Bericht: »Zur Geschichte der Ausgrabungen von Olympia«.

Es werden darin ausführliche Nachrichten über die Mitwirkung Kaiser Wilhelms I. und des Fürsten Bismarck auf Grund der Akten des Reichsfinanzministeriums mitgeteilt. Dem persönlichen Eingreifen des Kaisers ist es zu verdanken, daß die olympischen Arbeiten nicht vorzeitig abgebrochen wurden, sondern ihrem vollen wissenschaftlichen Abschluß zugeführt werden konnten.



Die Zerstreuung inhomogener Röntgenstrahlen an mikrokristallinen Körpern.

Von M. v. Laue und H. Mark.

Einleitung.

In der älteren Literatur[1] über die Röntgenstrahlen spielt deren Zerstreuung an der Materie als eine der auffälligsten Erscheinungen an ihnen eine große Rolle. J. J. Thomson entwickelte eine bekannte Theorie dafür[2], die von dem Mitschwingen von Elektronen spricht, welche um eine Ruhelage hin und her pendeln; deren Ausstrahlung sollte die Streustrahlung sein. Sowohl den Zerstreuungskoeffizienten für Elemente von geringem Atomgewicht und Strahlung von nicht zu hoher Frequenz als auch die Tatsache der Polarisation der um 90° abgelenkten Streustrahlung gab diese Theorie richtig wieder. Aber sie versagte gegenüber den Beobachtungen über die Richtungsverteilung der gestreuten Intensität. Nach der Thomsonschen Formel sollte die Funktion

$$\psi(\vartheta) = 1 + \cos^2\vartheta$$

die Abhängigkeit der Intensität vom Ablenkungswinkel ϑ angeben, wenn das einfallende Licht im wesentlichen unpolarisiert ist. Die Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wäre danach Symmetrieebene der Verteilung, eine Forderung, welche auch durch die ersten Versuche von Barkla und Ayres[3] bei der Streuung von weißem Licht an Kohle recht gut bestätigt wurde, und zwar um so besser, je weicher die verwendete Primärstrahlung im Mittel war. Beim Übergang zu größerer Härte ergaben sich merkliche Abweichungen von der symmetrischen Verteilung in dem Sinne, daß die kleinen Winkel stark bevorzugt wurden. Im teilweisen Gegensatz hierzu fand Owen[4] bei der Zerstreuung weißen Röntgenlichts an Papier, daß die Asymmetrie der Verteilung bei weicher Strahlung zunimmt; Crowther[5] teilte in mehreren Arbeiten Versuche an verschiedenen

---

[1] Eine recht vollständige Zusammenstellung dieser Literatur findet man bei A. H. Compton: Bulletin of the Nat. Res. Council 1922. Nr. 20.

[2] Z. B. J. J. Thomson, Cond. of El. through Gases. 2. Aufl. p. 138.

[3] C. G. Barkla und T. Ayres, Phil. Mag. **21**, 270 (1911).

[4] E. A. Owen, Proc. Cambr. Soc. **16**, 161 (1911).

[5] J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. **85**, 29 (1911); Proc. Cambr. Soc. **16**, 177 (1911); Proc. Cambr. Soc. **16**, 365 (1911).

Streustrahlen (Al, Ni, Cu, Sn) mit und fand ebenfalls eine sehr beträchtliche Asymmetrie der Intensitätsverteilung in Form einer starken Bevorzugung der kleinen Streuwinkel.

Für diese Diskrepanz zwischen Theorie und Erfahrung hat man mancherlei Erklärungen gegeben. Ziemlich verbreitet ist die Ansicht, daß durch die Koppelung einer Mehrzahl von Elektronen im gleichen Atom ein ähnlicher Richtungseffekt entstünde, wie man ihn bei der gerichteten drahtlosen Telegraphie benutzt und als Interferenzerscheinung leicht deuten kann. Uns scheint aber die Annahme, daß das Atom anders als ein Dipol streut, hierfür überflüssig zu sein, vielmehr glauben wir, die genannte Tatsache auf den Einfluß der mikrokristallinen Struktur des Streustrahlers zurückführen zu können, also im wesentlichen darauf, daß die eine Voraussetzung der THOMSONschen Formel: keine Phasenbeziehungen zwischen den streuenden Elektronen, unzutreffend ist. Die Gründe dafür liegen aber nicht im Bau des einzelnen Atoms, sondern in der Anordnung der Atome zu einem Raumgitter. Doch ist auch das nicht ganz richtig; denn bei fehlender Wärmebewegung würde die Verteilungskurve doch wieder ungefähr symmetrisch zur Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Nur die durch Wärmebewegung leicht gestörte Raumgitteranordnung bringt die wesentliche Unsymmetrie hervor, die beobachtet worden ist.

Dieser Einfluß läßt sich gut berechnen, so daß sich für die von CROWTHER sowie von BARKLA und AYRES gefundene Asymmetrie die Möglichkeit ergibt, die Versuchsergebnisse ohne Einführung einer neuen Hypothese zu verstehen. Bei der Zerstreuung am Papier scheitert die Durchführung einer entsprechenden Überlegung an unserer Unkenntnis über das Zustandekommen der Streuungsbilder von Flüssigkeiten und amorphen Festkörpern.

Sämtliche Streuversuche mit mikrokristallinen Medien sind mit einer Strahlung angestellt worden, in der das breite, kontinuierliche Bremsspektrum stark die charakteristischen Emissionslinien überwiegt. Daß eine Spektrallinie bei der Streuung an einem ungeordneten Kristallpulver eine beschränkte Zahl voneinander getrennter scharfer Streuringe liefert, ist durch die an DEBYE und SCHERRER[1] anknüpfenden Strukturuntersuchungen bekannt. Wir wollen hier zunächst die entsprechende Theorie für das kontinuierliche Spektrum geben. Wir sind uns dabei klar, daß auch bei dieser Mitberücksichtigung der Mikrokristallinität nur eine rohe Theorie der Zerstreuung herauskommen kann. Die Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung der Atome, wie sie EWALD und DARWIN im Gegensatz zur elementaren Theorie berücksichtigen, ist zwar bei der Anwendung auf kleine Kristallstücke wenig bedenklich. Bedenklicher ist z. B., daß die COMPTON-Strahlung[2], die nach unserer heutigen Kenntnis stets auch einen mehr oder weniger großen Anteil der gestreuten Strahlung ausmacht, dabei nicht in Rechnung gestellt wird. Es bleibt ferner außer Betracht, daß bei einer Substanz wie Al zwischen den Kristalliten auch amorphe Teile oder Teile von stark gestörter Gitterstruktur liegen können

[1] z. B. DEBYE und SCHERRER, Atombau, Phys. Ztschr. **19**, 474 (1918).
[2] Vgl. z. B. G. WENTZEL, Phys. Ztschr. **26**, 436 (1925).

und daß die Absorption der Strahlung im Streustrahler die räumliche Intensitätsverteilung beeinflußt. Schließlich können wir das rätselhafte, aber vielleicht doch wirklich vorhandene J-Phänomen BARKLAS[1] in keiner Weise berücksichtigen.

Aber andererseits sind auch die Messungen der Intensität wenig genau; wir halten bei der von uns angewandten photographischen Bestimmung relativer Intensitäten Fehler von 15% für möglich. Eine wesentliche Verfeinerung der Berechnung schiene deshalb vorläufig überflüssig, selbst wenn sie leicht durchführbar wäre. Unser Ziel ist lediglich, die wesentlichsten Züge der Beobachtungen auf die bekannten Gesetze der Interferenzen an Kristallen zurückzuführen.

§ 1. Die Streuung der Bremsstrahlung am Kristallpulver.

Das Raumgitter der Kriställchen kennzeichnen[2] wir durch die drei primitiven Translationen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$; wir wählen sie so, daß das skalare Produkt $(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{a}_1\, [\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3])$ positiv ist; ihnen zugeordnet sind die reziproken Vektoren

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{[\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3]}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)}; \quad \mathfrak{b}_2 = \frac{[\mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_1]}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)}; \quad \mathfrak{b}_3 = \frac{[\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2]}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)}. \tag{1}$$

$\mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{s}$ sind Einheitsvektoren in der Richtung des einfallenden Strahls und der Richtung vom Kristall zum Aufpunkt; λ ist die Wellenlänge der Strahlung und

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2}$$

Ferner definieren wir:

$$\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{h}; \quad A_i = k(\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{h}) \qquad i = 1, 2 \text{ und } 3. \tag{3}$$

Liegt zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_0$ der Winkel ϑ, so folgt aus (2) durch Quadrieren

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \mathfrak{h}^2. \tag{4}$$

Die Auflösung der Gleichungen (3) nach $\mathfrak{h}$ lautet

$$k\mathfrak{h} = \sum_1^3 A_i \mathfrak{b}_i, \tag{5}$$

wie man durch Einsetzen leicht bestätigt. Da ferner nach (2)

$$\mathfrak{h}^2 = 2(\mathfrak{s}\, \mathfrak{h}), \tag{6}$$

folgt aus (5):

$$k = \frac{\left(\sum_1^3 A_i \mathfrak{b}_i\right)^2}{2\left(\mathfrak{s}_1 \sum_1^3 A_i \mathfrak{b}_i\right)} \tag{7}$$

---

[1] C. G. BARKLA, Phil. Mag., Maiheft 1925. C. G. BARKLA und KASTGIR, Phil. Mag. Nov. 1925. C. G. BARKLA. Phil. Mag. 50. 542 (1926).

[2] Vgl. Encyklopädie d. Math. Wiss. V Artikel Wellenoptik.

Für den einzelnen, mit monochromatischem Röntgenlicht bestrahlten Kristall ist die Intensität in der Richtung $\mathfrak{s}$, soweit sie auf der regulären Interferenz beruht, proportional einer Funktion $f(A_i)$, welche sich aus der Summe

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} e^{i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3)} \tag{8}$$

ergibt, indem man das Quadrat des absoluten Wertes bildet. Dieser Wert läßt sich bisher nur für Kristalle explizit angeben, welche parallelepipedisch begrenzt sind. Es genügt aber hier, zu wissen, daß die Funktion f scharfe Maxima hat, wo die drei Bedingungen

$$A_i = 2 h_i \pi \tag{9}$$

mit ganzzahligen h_i erfüllt sind, und daß sie wie jeder Summand in (8) in jedem A_i periodisch mit der Periode 2π ist. Daraus folgt, daß die Art ihres Abfalls von einem der erwähnten Maxima unabhängig ist von den Zahlen h_i, welche dies Maximum kennzeichnen. Außerdem ist die Intensität proportional dem Quadrat des Strukturfaktors $S(A_i)$, dem Atomformfaktor ψ und dem Temperaturfaktor w. Auch der letztere, der zumeist als Funktion von $k^2 \mathfrak{h}^2$ angegeben wird, ist nach (5) eine Funktion von $(\sum A_i \mathfrak{b}_i)^2$ also der A_i. Der Atomformfaktor hingegen könnte, rein theoretisch betrachtet, auch noch von anderen Argumenten abhängen. Der Zweck unserer Arbeit ist gerade der Nachweis, daß man ihn für die Deutung der allgemeinen Streuung unpolarisierter Strahlung gleich $1 + \cos^2 \vartheta$ setzen kann, wie wenn er sich auf einen Dipol bezöge. Die Unabhängigkeit dieses Faktors von der Wellenlänge λ (bzw. von k) ist eine Folgerung aus der THOMSONschen Theorie der Streuung, die wir hier beibehalten. Jedenfalls sind diese drei Faktoren langsam veränderlich gegen die Interferenzfunktion $f(A_i)$.

Zu dieser Intensität des regulären Interferenzeffektes tritt dann selbst beim regelmäßigsten Kristall infolge der Wärmebewegung noch eine (bei gewöhnlicher Temperatur, mittlerer Wellenlänge λ und den üblichen anorganischen Substanzen dagegen schwache) unregelmäßig gestreute Intensität. Auch für sie gibt die Theorie einen bestimmten Wert, und wir werden sie weiter unten zur Erklärung der Erscheinung qualitativ mitverwenden. Doch sehen wir in der zunächst folgenden Rechnung von ihr ab und setzen

$$J = (1 + \cos^2 \vartheta)\, w(A_i) \cdot S(A_i) \cdot f(A_i)\,. \tag{10}$$

Die Teilchen des Kristallpulvers betrachten wir vorläufig als gleich nach Größe und Form, um auf alle dieselbe Interferenzfunktion $f(A_i)$ anwenden zu können. Da sie völlig nach Zufall orientiert sein sollen, haben die im Raum festliegenden Richtungen $\mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{s}$ alle möglichen Richtungen zu den (im allgemeinen schiefwinkeligen) Achsenkreuzen der $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{b}_i$. Dasselbe gilt von dem in (2) definierten Vektor $\mathfrak{h}$, dessen Betrag zwar durch (4) festgelegt ist, der aber zum Achsenkreuz der $\mathfrak{b}_i$ jede Richtung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit annehmen kann. Außerdem soll k zwischen zwei festen Grenzen k^0 und k^1 variieren, und zwar soll die Funktion $\varphi(k)$ die Energie-

verteilung im einfallenden Strahl bestimmen. Zur Beobachtung in der Richtung $\mathfrak{s}$ kommt dann nach (10) die Intensität

$$J_{\text{Pulver}} = (1 + \cos^2 \vartheta) \int_{k^0}^{k^1} d k \int d \Omega \, \phi(k) \, w(A_i) \cdot S(A_i) \cdot f(A_i) \, ; \qquad (11)$$

$d\Omega$ bezeichnet dabei einen Spielraum für die Richtung von $\mathfrak{h}$. Die Integration ist über alle Richtungen auszuführen.

Zur Auswertung des Integrals in (11) betrachten wir einen Raum, in welchem der Vektor

$$k \mathfrak{h} = \sum A_i \mathfrak{b}_i$$

(vgl. 5) den Radiusvektor vom Anfangspunkt zum Aufpunkt bedeutet. In ihm sind die A_i kartesische, im allgemeinen schiefwinkelige Koordinaten und die Vektoren $\mathfrak{b}_i$ die Koordinatenachsen. Da

$$(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3) = \frac{1}{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)}$$

das Volumen des von den $\mathfrak{b}_i$ aufgespannten Parallelepipeds ist, so ist das Volumenelement jenes Raumes

$$d V = (\mathfrak{b}_1 d A_1 \cdot \mathfrak{b}_2 d A_2 \cdot \mathfrak{b}_3 d A_3) = \frac{d A_1 d A_2 d A_3}{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)} .$$

Andererseits ist jede Fläche $k = \text{const}$ eine Kugel um den Nullpunkt mit dem Halbmesser $k|\mathfrak{h}|$. Infolgedessen ist

$$d V = k^2 \mathfrak{h}^2 d\Omega \cdot |\mathfrak{h}| dk = k^2 |\mathfrak{h}|^3 dk \, d\Omega ,$$

so daß

$$dk \, d\Omega = \frac{dA_1 \, dA_2 \, dA_3}{k^2 |\mathfrak{h}|^3 (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)} = \frac{dA_1 \, dA_2 \, dA_3}{k^2 (2 \sin \vartheta/2)^3 (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)}$$

wird. Aus Gleichung (11) finden wir somit unter Fortlassung konstanter Faktoren

$$J = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta/2} \iiint \frac{\phi(k)}{k^2} \cdot w(A_i) \cdot S(A_i) f(A_i) \, d A_1 \, d A_2 \, d A_3 . \qquad (12)$$

Dabei ist k durch (7) als Funktion der A_i bestimmt; den Integrationsbereich stellt die ganze Schale zwischen den Kugeln

$$\left| \sum A_i \mathfrak{b}_i \right| = \begin{matrix} 2 k^1 \sin \vartheta/2 \\ 2 k^0 \sin \vartheta/2 \end{matrix}$$

dar. Weiter ist

$$\frac{\phi(k)}{k^2} = \frac{\lambda^4}{(2\pi)^3} L(\lambda)$$

und $L(\lambda)$ die auf den Wellenlängenbereich $d\lambda$ bezogene spezifische Intensität im Spektrum der einfallenden Strahlung.

Im Raum der Koordinaten A_i ist nun die Interferenzfunktion $f(A_i)$ nur in nächster Nähe der durch (9) bestimmten »ganzzahligen« Punkte merklich von Null verschieden; und zwar hat das Integral

$$F = \iiint f(A_i)\, dA_1\, dA_2\, dA_3,$$

erstreckt über die Umgebung eines solchen Punktes, einen von den kennzeichnenden ganzen Zahlen h_i unabhängigen Wert. Da alle anderen Faktoren im Integranden von (12) gegen $f(A_i)$ langsam veränderlich sind, läßt sich das Integral als Summe von Gliedern darstellen, deren jedes sich auf einen in der genannten Kugelschale liegenden ganzzahligen Punkt bezieht. Also (bis auf den Faktor $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$):

$$J = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta/2} F \sum \lambda_{h_i}^4 L(\lambda_{h_i})\, w(2\pi h_i)\, S(2\pi h_i). \tag{13}$$

Die Wellenlänge λ_{h_i} ist dann diejenige, welche in dem betreffenden Interferenzmaximum am stärksten vertreten ist. Rechnerisch ergibt sie sich aus (7), wenn man daselbst k durch $\frac{2\pi}{\lambda}$ und A_i durch $2\pi h_i$ ersetzt.

Tatsächlich sind nun die Teilchen eines solchen Pulvers nicht alle gleich nach Form und Größe; vielmehr wird höchstens eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung zwischen ihnen bestehen. Dann müssen wir die Funktion $f(A_i)$ als einen Mittelwert aus den Interferenzfunktionen dieser Teilchen auffassen. Die wesentlichen Züge an ihr, nämlich die scharfen Maxima in den ganzzahligen Punkten und die Gleichheit ihres Verlaufs in der Nähe jedes derartigen Maximums übertragen sich ohne weiteres auf diesen Mittelwert. Die obige Rechnung bleibt somit erhalten.

Die Tatsache, daß es keine scharf definierte Richtung des einfallenden Strahls, sondern einen endlichen Richtungskegel gibt, ändert bei der langsamen Veränderlichkeit von J mit ϑ nichts an Gleichung (13), solange dessen Öffnung nicht zu groß ist.

Eine Überlegung ähnlicher Art, die ebenfalls mit der geometrischen Vorstellung eines Raumes der Koordinaten A_i operiert, läßt sich auch zur Ableitung des LORENTZschen Intensitätsfaktors verwenden, der die Intensität in einem Interferenzpunkt eines einheitlichen Kristalls bei Bestrahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum aus vielen etwas verschiedenen Richtungen bestimmt. Diese Betrachtung, welche gegenüber der früheren Ableitung jenes Faktors eine große Vereinfachung bringt, wird demnächst in der Zeitschrift für Kristallographie erscheinen. Sie hängt mit der obigen auch sachlich eng zusammen, dadurch nämlich, daß in Gleichung (13) λ^4 als Faktor auftritt, was von dem Divisor k^2 in (12) herrührt.

§ 2. Eigene Versuche über die Streuung an Aluminium.

Versucht man mit Hilfe der Gleichung (13) die Befunde von CROWTHER am Aluminium zu erklären, so sieht man zunächst, daß dies qualitativ mög-

lich ist, da gerade ein derartig starkes Ansteigen der Intensität unter kleinen Winkeln von der Formel wegen des Faktors $\frac{1}{\sin^3 \vartheta/2}$ gefordert wird. Zur quantitativen Durchrechnung fehlen aber genauere Angaben über die Natur des verwendeten Bremsstrahlspektrums. Wir haben daher einige Versuche angestellt, bei deren Durchführung alle in der Gleichung (13) gebrauchten Größen besonders mitbeobachtet wurden.

Es wurde ein polykristallines Aluminiumstäbchen von etwa 0.8 mm Durchmesser, das keinerlei Anisotropiestruktur zeigte, in einer Debye-Scherrer-Kamera mit weißem Röntgenlicht (Öffnungskegel etwa 2—3°) beleuchtet und der erhaltene Film photometriert. Das Photogramm ist als Fig. 1 beigelegt; die in ihm vorhandenen, besonders intensiven Linien rühren daher, daß neben der weißen Strahlung noch monochromatische Linien der Wo-L-Serie im Spektrum enthalten waren. In der folgenden Rechnung wurden die zum Vergleich mit dem Experiment herangezogenen Richtungen $\mathfrak{s}$ stets so gewählt, daß das dem kontinuierlichen Untergrunde überlagerte monochromatische Debye-Scherrer-Diagramm hierbei nicht störte.

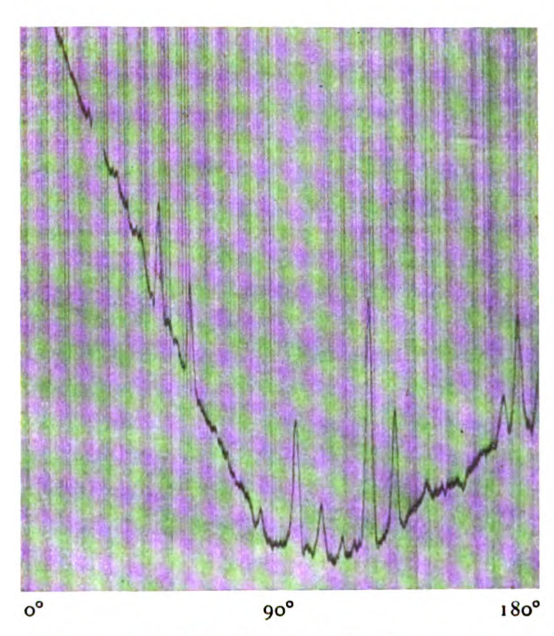


Fig. 1. Azimutale Verteilung der Streustrahlung beim Al.

Aluminium kristallisiert kubisch mit allseitig flächenzentrierter Translationsgruppe und besitzt eine Würfelkantenlänge von $a = 4.07$ Å. Die allgemeinen Vektoren $\mathfrak{a}$ des § 1 werden dann zueinander senkrecht und erhalten den Betrag

$$|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = |\mathfrak{a}_3| = a = 4.07 \cdot 10^{-8} \text{ cm} .$$

Der Ablenkungswinkel ϑ ist durch (4), die ganzzahligen Punkte im Raum der Koordinaten A_i sind durch die drei Gleichungen (9) bestimmt.

Zur Berechnung der Intensität J in einer bestimmten Richtung hat man den Ausdruck (13) zu berechnen. Hierzu ist zunächst die Kenntnis der spektralen Verteilung $L(\lambda)$ nötig. Um sie zu erlangen, wurde während der Aufnahme des Al-Diagramms — also unter denselben Spannungsverhältnissen am Rohr — ein Spektraldiagramm an einem Calcitkristall unter Verwendung derselben Filmsorte aufgenommen, durchphotometriert und nach den von Wagner und Kulenkampff[1] aufgestellten Regeln auf die wirkliche Verteilung korrigiert. Die gefundene und die korrigierte Kurve der photographischen Intensität $L(\lambda)$ sind in Fig. 2 als Kurve 1 bzw. 2 gezeichnet. Entsprechend einer Maximal-

[1] E. Wagner und H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **68**, 369 (1922).

spannung von etwa 80000 Volt liegt der kurzwellige Abbruch bei etwa 0.135 Å; dann steigt die Intensität rasch an und erreicht bei etwa 0.3 Å ihren Maximalwert. In dem Abfall nach der langwelligen Seite prägen sich die Absorptionskanten des Ag (0.485 Å) und des Broms (0.917 Å) deutlich aus. Es ist schon erwähnt worden, daß auch die Massenabsorption der Röntgenstrahlen im Streustrahler einen Einfluß auf die azimutale Intensitätsverteilung hat. In dem vorliegenden Fall war aber dieser Einfluß nicht sehr groß, da das Maximum des verwendeten Bremsspektrums bei etwa 0.3 Å lag, eine Wellenlänge, welche in Al einen Massenabsorptionskoeffizient von 0.537 besitzt. Es wird erst in einer Schicht von 4.8 mm die Strahlung auf die Hälfte geschwächt.

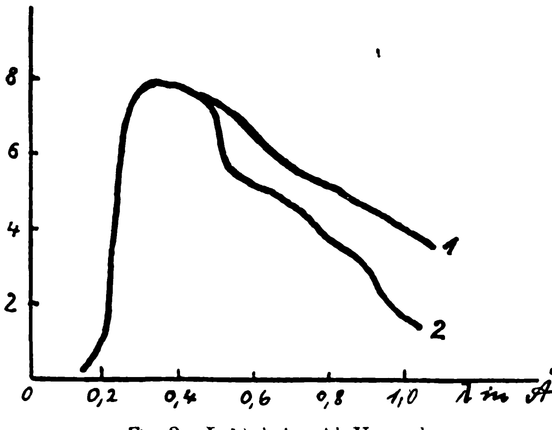


Fig. 2. $L(\lambda)$ beim Al-Versuch.
1 Unkorrigierte Spektralkurve. 2 Korrigierte Spektralkurve.

Nun wurden mit Hilfe der Gleichungen (9) alle ganzzahligen Punkte aufgesucht, die in die Kugelschale mit den Radien

$$k^1 |\mathfrak{h}| \text{ und } k^0 |\mathfrak{h}|$$

fallen; für λ^1 in $k^1 = \frac{2\pi}{\lambda^1}$ wurde hierbei der Wert $0.22 \cdot 10^{-8}$ eingesetzt, da nach Fig. 2 von hier ab die Intensität der Strahlung bereits weniger als 15 % des Maximums betrug, während für λ^0 in k^0 der Wert 1.00 Å genommen wurde, der jenseits der Bromabsorptionskante liegt und von dem ab die Intensität der Bremsstrahlung ebenfalls bereits weniger als 15 % der maximalen beträgt. Die Dicke der Kugelschale beträgt

$$2 \Delta k \sin \vartheta/2 ;$$

sie nimmt also mit wachsendem Ablenkungswinkel ϑ zu und mit ihr auch die in ihr enthaltene Zahl der ganzzahligen Punkte gemäß Gleichung (9).

Die Strukturfaktoren aller ganzzahligen Punkte, deren Indizes h_i entweder alle gerade oder alle ungerade sind, sind im kubisch allseitig flächenzentrierten Gitter gleich, fallen also als konstanter Faktor in Gleichung (13) bei Vergleich der Intensität unter verschiedenen Winkeln fort. Die ganzzahligen Punkte hingegen, deren Indizes teils gerade, teils ungerade sind, haben den Strukturfaktor Null; sie sind gar nicht in Rechnung zu setzen und werden deshalb im folgenden nicht weiter erwähnt. In Tabelle I sind z. B. für $\vartheta = 20°$ alle in Betracht kommenden, in der genannten Kugelschale liegenden ganzzahligen Punkte aufgeführt; mit der Beschränkung, daß nur positive Werte h_i genannt sind, und das von allen Punkten, deren Indizes durch eine Permutation aus einander hervorgehen, nur je einer hingeschrieben ist. Diese Beschränkungen gleicht man bei der Berechnung der Summe in (13) dadurch aus, daß man den Anteil eines der genannten Punkte multipliziert mit der »Zähligkeit« z, die in Spalte 3 der Tabelle steht.

Tabelle 1.

$h_1\, h_2\, h_3$	λ_{h_i}	z	Bereich	$h_1\, h_2\, h_3$	λ_{h_i}	z	Bereich
200	0.86	6	B_1	531	0.30	48	B_2
220	0.61	12	$\overline{J_\lambda} = 4$	600	0.28	6	$\overline{J_\lambda} = 7.5$
311	0.52	24		442	0.28	24	
222	0.49	8		620	0.27	24	
400	0.43	6		622	0.26	24	
331	0.39	24	B_2	533	0.26	24	B_3
420	0.38	24	$\overline{J_\lambda} = 7.5$	444	0.245	8	$\overline{J_\lambda} = 4$
422	0.34	24		551	0.24	24	
551	0.33	24		711	0.24	24	
440	0.31	12		640	0.23	24	

Man hätte nun für jeden ganzzahligen Punkt das Produkt unter dem $\sum$-Zeichen der Gleichung (13) zu bilden, das aus dem Strukturfaktor S der betreffenden, dem Faktor der von ihr reflektierten spektralen Intensität L, dem Wärmefaktor w und dem Faktor $\lambda^4_{h_i}$ besteht.

Der Faktor ψ gilt zwar in der in Gleichung (13) verwendeten Form nur für gänzlich unpolarisiertes Licht, was im Bremsstrahlspektrum nicht vorliegt, da gewisse, hart an der kurzwelligen Grenze liegende Wellenlängen polarisiert sind. Diese Polarisation der Bremsstrahlung ist aber nur für so wenige Wellenlängen wirklich merklich vorhanden, daß in dem vorliegenden Fall keine Rücksicht darauf genommen wurde. Diese Vernachlässigung ist experimentell dadurch gerechtfertigt, daß ein mit derselben weißen Strahlung aufgenommenes vierzähliges Einkristalldiagramm keine Intensitätsasymmetrie in bezug auf die durch den Kathodenstrahl bevorzugte Achse zeigte.

Der Faktor w hat nach P. Debye[1] die Form

$$w = e^{-M},$$

während J. Waller auf Grund einer anderen Abzählungsmethode die Eigenschwingungen des Gitters den Ausdruck

$$w = e^{-2M}$$

erhält[2]. Der Exponent M ist hierbei durch

$$M = \tau r^2 = \tau k^2 (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2 = \tau \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \vartheta/2 \tag{14}$$

gegeben, worin τ eine für das Material charakteristische Temperaturfunktion darstellt:

$$\tau = \frac{\varkappa T}{f} = \frac{3\, T \cdot N \cdot h^2}{4\pi^2 A \cdot \varkappa \cdot \Theta^2}. \tag{15}$$

[1] P. Debye, Ann. d. Phys. **43**, 49 (1914).
[2] J. Waller, Dissertation Upsala, 1925.

Hierin bedeuten

T = absolute Temperatur; im vorliegenden Fall etwa 300°,
N = LOSCHMIDTsche Zahl = $6.06 \cdot 10^{23}$,
h = PLANCKsche Konstante = $6.54 \cdot 10^{-27}$,
$\varkappa$ = BOLTZMANNsche Konstante = $1.36 \cdot 10^{-16}$,
Θ = charakteristische Temperatur für das verwendete Material; beim Al etwa 400 Grad[1].

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man beim Al für τ den Wert $0.9 \cdot 10^{-18}$. Man hätte nun für jeden ganzzahligen Punkt $h_1 h_2 h_3$ den Faktor w zu bilden und die übrigen Faktoren, die sich auf denselben Punkt beziehen, in (13) mit ihm zu multiplizieren.

Diese Produkte hat man dann für alle zwischen die Kugelflächen k^0 und k' fallenden Punkte zu berechnen und zu addieren; für den Fall $\vartheta = 20$ (Tab. 1) ergibt eine Proberechnung

$$J = \text{prop. } 8.56 \cdot 10^{-32}\,. \tag{16}$$

Bei größeren ϑ-Werten wird jedoch die Anzahl der in die Kugelschale $2\Delta k \sin \vartheta/2$ fallenden ganzzahligen Punkte sehr groß (für $\vartheta = 80°$ bereits etwa 1000), so daß eine recht langwierige Rechnung entstünde, deren Genauigkeit doch durch das Mitspielen anderer Faktoren (COMPTON-Strahlung, Unsicherheit des theoretischen Temperaturfaktors, Absorption) beim Vergleich mit dem experimentellen Ergebnis nicht zur Geltung kommen könnte. Im Hinblick auf die Form der spektralen Verteilungskurve $L(\lambda)$ wurden daher 3 Intensitätsgebiete der Kugelschale $\Delta k \sin \vartheta/2$ unterschieden und in jedem von ihnen $L(\lambda)$ gleich einem Mittelwert $\bar{J}_\lambda$ gesetzt:

$$\begin{aligned}
&B_1 \cdots \text{ von } k^0 = \frac{2\pi}{0.95} \cdot 10^8 \text{ bis } \frac{2\pi}{0.50} \cdot 10^8; && \bar{J}_\lambda = 4 \\
&B_2 \cdots \text{ von } k = \frac{2\pi}{0.50} \cdot 10^8 \text{ bis } \frac{2\pi}{0.28} \cdot 10^8; && \bar{J}_\lambda = 7.5 \\
&B_3 \cdots \text{ von } k = \frac{2\pi}{0.28} \cdot 10^8 \text{ bis } k' = \frac{2\pi}{0.22} \cdot 10^8; && \bar{J}_\lambda = 4\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Für λ_{h_i} wurde der mittlere λ-Wert desjenigen Bereiches B genommen, in den der betreffende Punkt h_i gerade hineinfällt; diese Mittelwerte betrugen für

$$\begin{aligned}
B_1 \ldots\ldots \bar{\lambda} &= 0.72\ \text{Å} \\
B_2 \ldots\ldots \bar{\lambda} &= 0.39\ \text{Å} \\
B_3 \ldots\ldots \bar{\lambda} &= 0.25\ \text{Å}\,.
\end{aligned}$$

---

[1] Diesen Wert verdanken wir einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Hrn. Prof. E. GRÜNEISEN.

Man kann dann in (13) für jeden Bereich die Faktoren $\lambda_{h_i}^4$ und $L(\lambda_{h_i})$ vor das Summenzeichen setzen und hat nunmehr für jeden Bereich die Summe

$$\sum S(2\pi h_i)\, w(2\pi h_i) = \sum e^{-2\tau \frac{4\pi^2}{\lambda^4} \sin^2 \vartheta/2} \cdot S(2\pi h_i) = \sum \cdot e^{-2\tau r^2} S(2\pi h_i)$$

zu berechnen. Dies wurde in folgender Weise durchgeführt:

Die Funktion $e^{-2\tau r^2}$ besitzt Kugelsymmetrie in bezug auf den Mittelpunkt der zu betrachtenden Kugelschale; das Volumen einer solchen Schale zwischen den Radien a und b ist

$$v = 4\pi \int_a^b r^2\, dr\,. \tag{18}$$

Das Gitter der ganzzahligen Punkte hat als Einheitszelle das Volumen

$$v_0 = (2\pi)^3 (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3) = \frac{(2\pi)^3}{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)}\,, \tag{19}$$

so daß die Zahl der in der Kugelschale (ab) liegenden Punkte angenähert gleich

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \frac{2}{(2\pi)^2} \int_a^b r^2\, dr$$

ist. Aber drei Viertel aller ganzzahligen Punkte hat den Strukturfaktor Null, so daß die Zahl der in Betracht zu ziehenden Punkte

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \int_a^b r^2\, dr$$

ist. Da jeder von ihnen nicht voll, sondern mit einem Temperaturfaktor $e^{-2\tau r^2}$ zu werten ist, hat man statt dessen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \int_a^b e^{-2\tau r^2} r^2\, dr \tag{20}$$

zu berechnen. Das Integral läßt sich auf das Fehlerintegral zurückführen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-\tau' r^2} r^2\, dr &= -\frac{d}{d\tau} \int_a^b e^{-\tau' r^2} dr = -\frac{d}{d\tau'} \left[\frac{1}{\sqrt{\tau'}} \int_{a\sqrt{\tau'}}^{b\sqrt{\tau'}} e^{-u^2} du \right] \\ &= \frac{1}{2\tau'^{3/2}} \int_{a\sqrt{\tau'}}^{b\sqrt{\tau'}} e^{-u^2} du + \frac{a e^{-\tau' a^2} - b e^{-\tau' b^2}}{2\tau'}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

wobei $\tau' = 2\tau$ gesetzt ist. Wenn man wiederum für die drei oben abgegrenzten Bereiche B_1, B_2 und B_3 in der Kugelschale die drei Funktionen

w_1, w_2 und w_3 unter Einsetzung der entsprechenden a- und b-Werte berechnet und sie als Faktor in die Gleichung (13) hinzunimmt, erhält man für $\vartheta = 20$ (Tabelle 1) an Stelle des durch exakte Summierung erhaltenen Ausdruckes (18) den Wert

$$J = \text{prop. } 8.68 \cdot 10^{-32} . \tag{16a}$$

Man kann aus dem Vergleich mit (16) erkennen, daß schon unter kleinen Winkeln, also bei sehr nahe aneinander liegenden Kugelflächen a und b und bei verhältnismäßig wenig in die Kugelschale fallenden ganzzahligen Punkten die eingeschlagene, näherungsweise Berechnung der Summe (13) gerechtfertigt ist. Um dies zu erweisen, ist die Tabelle 1 aufgenommen und die exakte Rechnung für den Fall $\vartheta = 20^\circ$ durchgeführt worden; bei größeren ϑ-Werten ist die zu erwartende Übereinstimmung sicher noch wesentlich besser.

Auf diese Weise wurden die zu erwartenden Intensitäten für verschiedene ϑ-Werte ausgerechnet; sie sind in der Figur 3 als Punkte gezeichnet. Man sieht, daß sie das charakteristische Ansteigen der Intensität unter kleinen Streuwinkeln im Rahmen der von der ganzen Rechenweise zu fordernden Genauigkeit recht befriedigend wiedergibt.

Dabei ist aber zu bemerken: Wir haben die Intensität weder bei der Messung noch bei der Berechnung absolut bestimmt, sondern nur auf die Verteilung über die Ablenkungswinkel Wert gelegt. Deswegen mußten wir für den Vergleich zwischen der beobachteten und der berechneten Kurve je einen Punkt von ihnen willkürlich in Fig. 3 eintragen. Uns schien es am einfachsten, ihre tiefsten Punkte zusammenfallen zu lassen, obwohl es in Anbetracht der Fortlassung einer Reihe von Momenten, welche die Streuintensität hinaufzusetzen geeignet wäre, vielleicht richtiger gewesen wäre, die berechnete Kurve an dieser Stelle etwas unter die beobachtete zu verlegen.

Die Fig. 3 läßt auch erkennen, daß bei größeren Streuwinkeln die Übereinstimmung zwischen der punktierten errechneten Kurve und der experimentell gefundenen wesentlich schlechter ist als unter kleinen Winkeln. Diese Abweichung glauben wir auf das Mitspielen verschiedener bis jetzt noch nicht hinreichend berücksichtigter Faktoren zurückführen zu können.

1. Es ist bisher stets nur die in den Interferenzmaximis aufgehäufte Intensität berücksichtigt worden; gerade die Wärmebewegung hat aber zur Folge, daß sich auch zwischen den Interferenzen die sekundären Kugelwellen nicht völlig vernichten, sondern eine gewisse kontinuierliche Streuintensität zurückbleibt. Sie wird nach Debye (l. c.) durch

$$w' = (1 - e^{-M})$$

gemessen, während Wallers Theorie einen komplizierteren Ausdruck liefert. Beide Ausdrücke steigen mit wachsendem ϑ an und setzen daher die gesamte Streustrahlung besonders bei großen Winkeln hinauf.

2. Neben der klassisch gestreuten Strahlung von derselben Wellenlänge wie die Primärstrahlen gibt es noch zwei Quantenvorgänge, welche ebenfalls sekundäre Röntgenstrahlen zur Folge haben.



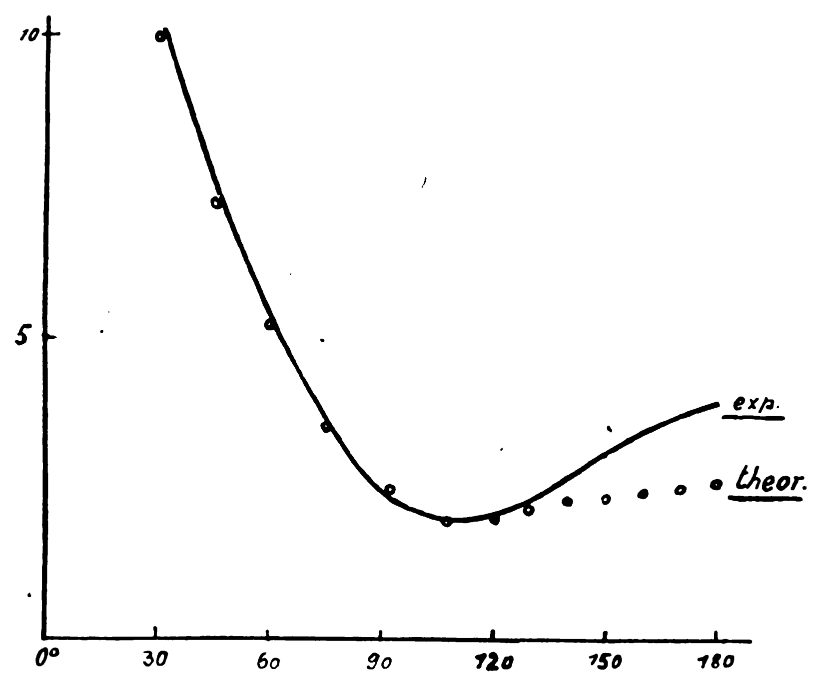


Fig. 3. Vergleich zwischen dem Experiment (Fig. 1) und der nach (13) unter Verwendung von (21) und (17) berechneten theoretischen Verteilung.

a) Der Fluorescenzvorgang, der hier nicht als störend in Betracht kommt, da die K-Strahlung des Al so weich ist, daß sie bereits in der zwischen Präparat und Film liegenden Luftschicht völlig absorbiert wird. Sie hätte außerdem nur zur Folge, daß die gesamte Kurve der räumlichen Intensitätsverteilung um einen konstanten Betrag in die Höhe gerückt wird.

b) Der Comptonsche Streuprozeß. Von der räumlichen Intensitätsverteilung der Compton-Strahlung weiß man noch nicht sehr viel: sie ist in komplizierter Weise von der eingestrahlten Wellenlänge und von der Ordnungszahl des Streustrahlers abhängig, dürfte aber im vorliegenden Fall nur bei den kürzesten Wellen, also im Bereich 3, von derselben Stärke sein wie die klassische Streustrahlung. Hier hat sie allerdings zur Folge, daß die Intensität in der Gegend von 90° ein Minimum besitzt und nachher gegen 180° wieder ansteigt. Trotzdem kann sie nur wenig im vorliegenden Fall ausmachen; denn wegen des Faktor λ^4 in (13) spielt dieser Bereich überhaupt nur eine untergeordnete Rolle.

3. Endlich hat auch, wie schon erwähnt, die Absorption der Strahlung in dem beleuchteten Präparat einen Einfluß auf die räumliche Verteilung der Streuintensität. Da dieser mit steigender Absorption (steigender Wellenlänge) zunimmt, kommt er in unserem Falle nur für den Bereich mit den längsten Wellen (B_1) in Betracht, wo die Halbwertsdicke für Al etwa 0.5 mm beträgt. Er ist bisher nicht explizit durchgerechnet, hat aber jeden-

falls zur Folge, daß die großen Ablenkungswinkel gegenüber den kleineren etwas bevorzugt werden.

Zieht man diese hier aufgezählten Einflüsse in Betracht, so kann man das Nichtübereinstimmen der theoretischen und experimentellen Kurve zwischen 90 und 180° qualitativ verstehen.

§ 3. Die Versuche an Diamantpulver.

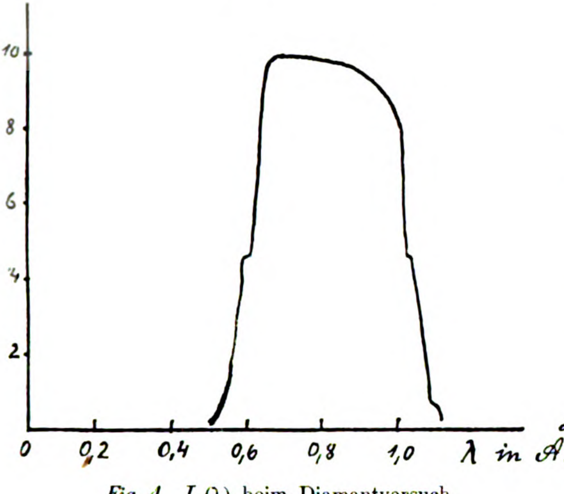


Fig. 4. $L(\lambda)$ beim Diamantversuch.

Wir haben es aber doch für zweckmäßig gehalten, auch auf experimentellem Wege durch Veränderung verschiedener Versuchsbedingungen die Richtigkeit dieser Überlegungen sowie überhaupt die hier vorgeschlagene Erklärung für die Abweichungen von der Thomsonschen Formel zu prüfen.

Aus der Formel (13) geht hervor, daß für die Intensitätsverteilung im wesentlichen die Funktionen $w(2\pi h_i)$ und $L(\lambda_{h_i})$ und $\lambda^4_{h_i}$ maßgebend sind, wenn wie zumeist die Strukturfaktoren aller ganzzahligen Punkte vergleichbare Beträge besitzen. Wenn man diese Funktionen beträchtlich abändert, müßte auch die räumliche Intensitätsverteilung eine wesentliche Änderung erfahren. Der folgende Versuch hatte den Zweck, diesen Zusammenhang zu prüfen.

Das verwendete Bremsspektrum wurde diesmal so gewählt, daß nur ein einziger Bereich von verhältnismäßig konstantem $L(\lambda)$ in ihm vorhanden war. Dies ließ sich dadurch erreichen, daß von einem Bremsstrahlspektrum, welches mit etwa 30000 Volt Effektivspannung erregt wurde, mit Hilfe einer Molybdänfolie der kurzwellige Teil — die Absorptionskante des Molybdäns liegt bei $\lambda = 0.618$ — herausgeblendet wurde. Die langwellige Seite des Bremsstrahlberges wurde mit Al-Folien durch nichtselektive Absorption abgeschwächt. Die Fig. 4 zeigt die hierdurch erreichte Form der Funktion $L(\lambda)$.

180° 90° 0°

Fig. 5. Azimutale Verteilung der Streustrahlung beim Diamanten.

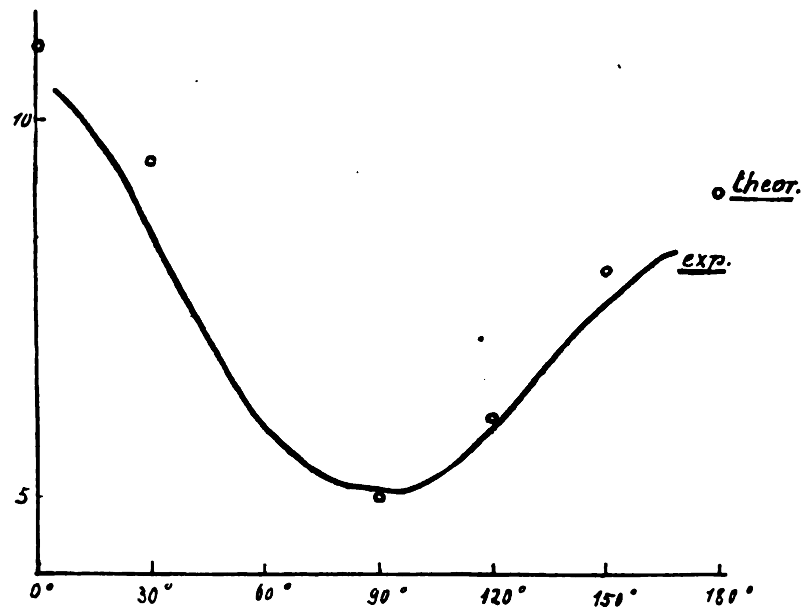


Fig. 6. Vergleich zwischen Experiment und der nach (13) unter Verwendung von (21) und (17) berechneten theoretischen Intensitätsverteilung.

Als Streustrahler wurde Diamant gewählt, welcher eine wesentlich andere charakteristische Temperatur ($\Theta = 1830$) besitzt, so daß, wie die Tabelle 2 zeigt, die Funktion w wesentlich andere Werte annimmt, als beim Al.

Tabelle 2.

Funktion w beim Al	Im Bereich B_1	0.914	0.700	0.487	0.333	0.250
	Im Bereich B_2	0.741	0.331	0.110	0.021	0.013
	Im Bereich B_3	0.511	0.082	0.0055	0.0011	0.0007
w beim Diamanten		0.995	0.970	0.940	0.911	0.886
Streuwinkel ϑ		30°	60°	90°	120°	150°

Das Diamantpulver wurde in lockerer Form in eine Hülse von sehr dünnem Kollodium gebracht, so daß auch die Absorption der Strahlung in dem Präparat nur in geringem Maße störend wirken konnte. Schließlich war infolge des Wegblendens der höheren Frequenzen bei diesem Versuch auch die Störung durch die Compton-Strahlung in geringerem Maße zu befürchten als vorher.

Das erhaltene Photogramm zeigt die Fig. 5. Es unterscheidet sich recht deutlich von dem am Al erhaltenen dadurch, daß der Intensitätsabfall von 0°—90° nicht so außerordentlich stark ist, während der Wiederanstieg gegen 180° noch deutlicher ausgeprägt ist als in Fig. 1 beim Al.

In der Fig. 6 ist die Photometerkurve des Diamantdiagramms als ausgezogene Linie gezeichnet, während die Punkte die theoretisch nach der Gleichung (13) berechneten Werte wiedergeben; die Übereinstimmung ist in Anbetracht der der ganzen Rechnungsweise zugrunde liegenden Vernachlässigungen wohl hinreichend.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

VII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 25. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Heider besprach die Sinneszellen (Sinnesganglienzellen) in der Haut der *Aphroditidae*, speziell die in den Elytren von Acholoë artericola, Sthenelais ctenolepis, Sthenelais dendrolepis und Sigalion squamatum und kommt zu folgenden Ergebnissen:

1. Die Sinnesganglienzellen in der Haut der *Aphroditidae* sind im ganzen überall nach dem gleichen Typus gebaut. Sie unterscheiden sich nur durch die Art ihrer Lokalisation, je nachdem, ob sie einfach im Elytrenrande sitzen oder in Fortsätzen (Digitellen, Arborellen, Plumellen) untergebracht sind.
2. Die Sinnesganglienzellen kommen in der Haut zerstreut und vereinzelt vor. Es finden sich bei meinen Objekten im allgemeinen keine zusammengesetzten Hautsinnesorgane, welche aus Gruppen von Sinnesganglienzellen bestehen, wie solche von anderen Familien (Glyceridae, Nereidae) beschrieben worden sind.
3. Es handelt sich stets um primäre, niemals um sekundäre Sinneszellen. Von dem Vorkommen freier Nervenendigungen, wie sie Retzius für Glycera festgestellt hat, habe ich mich an meinen Objekten nicht mit Sicherheit überzeugen können.
4. Die mir vorliegenden Bilder sprechen für die Ansicht, daß die Erregungsleitung in den Primitivfibrillen der Sinneszellen und Nervenstränge erfolgt.

2. Hr. Bieberbach überreichte die 2. Aufl. seines Werkes »Theorie der Differentialgleichungen« (Berlin 1926).

Ausgegeben am 16. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

VIII. Gesamtsitzung. 4. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

*1. Hr. Meinecke erörterte die Frage nach dem Wesen der Kulturwerte und ihrer Bedeutung für den Geschichtschreiber.

Kultur ist Offenbarung und Durchbruch eines geistigen Elements innerhalb des allgemeinen Kausalzusammenhanges. Kulturleistungen sind auch Kulturwerte. Die Auswahl derer, die der Historiker darstellt, wird nicht nur durch den Grad ihrer kausalen Wirksamkeit, sondern auch durch ihren eigenen inneren Wert, durch das Maß von Geistigkeit, das in ihnen erreicht wird, bestimmt. Das darf aber nicht zur Überschätzung der kontemplativ erarbeiteten Kulturwerte führen. Die politische Geschichtschreibung behält ihre zentrale Stellung innerhalb der historischen Wissenschaften.

2. Der vorsitzende Sekretar legte einen Bericht der HH. Geheimrat Prof. Dr. Bernhard Moritz und Prof. Dr. Carl Schmidt in Berlin vor: Die Sinai-Expedition im Frühjahr 1914.

Die Sinai-Expedition wurde vom Ausbruch des Krieges überrascht und mußte das gesamte Expeditionsgut in Suez zurücklassen. Wie jetzt die Nachforschungen festgestellt haben, sind die Effekten vom Liquidator verkauft und das wissenschaftliche Material von der englischen Militärbehörde in Kairo als Konterbande vernichtet. Die beiden Teilnehmer geben einen kurzen Überblick über die wissenschaftlichen Arbeiten, die von diesem unersetzlichen Verlust betroffen sind.

3. Hr. Burdach überreichte seine Aufsätze »Die Disputationsszene und die Grundidee in Goethes Faust« (Stuttgart 1926. Sonderabdr.) und »Aus der Sprachwerkstatt des jungen Goethe« (München 1926. Zwei Sonderabdr.).

4. Das auswärtige Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Wilhelm Branca in München hat am 28. Februar sein 50jähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm bei diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

5. Die Akademie hat durch ihre philosophisch-historische Klasse 2100 RM bewilligt als Beitrag zu den Druckkosten und zur Deckung der Auslagen bei der Bearbeitung des Decretum Bonizonis durch Prof. Dr. Perels in Berlin.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Georg Friedrich Knapp in Darmstadt am 20. Februar und das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Heike Kamerlingh Onnes in Leiden am 21. Februar durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Wilhelm Branca zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Februar 1926.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zu der stolzen Rückschau auf fünfzig Jahre reichen Forschens, die heute zu tun ein freundliches Geschick Ihnen vergönnt, beglückwünscht Sie die Preußische Akademie der Wissenschaften, die Sie seit mehr als einem Vierteljahrhundert zu den Ihrigen zählt, in herzlicher Kollegialität.

Der Beruf des Landwirts, dem Sie sich in Ihrer Jugend gewidmet hatten, ließ Sie später, als das sonst im Leben des Gelehrten die Regel ist, auf den Weg zu wissenschaftlichen Arbeiten treten. Gewiß ist aber jener Beruf mitbestimmend gewesen für Ihr Forscherleben, ist doch die Landwirtschaft zu erklecklichem Teile angewandte Geologie, ein Stück jener Wissenschaft, in welcher Sie durch Ihr Lebenswerk zu den lichtesten Höhen emporgestiegen sind.

Reich ist der Weg, den Sie gegangen sind, und glücklich. Reich ist er dadurch geworden, daß Sie nie den schmalen Pfad des beengten Spezialistentums gegangen sind, sondern daß Sie, wie das heute keinem Geologen mehr möglich wird, auf allen den vielen Teilgebieten der Allgemeinen und der Historischen Geologie sowie auf denen der Paläontologie den Boden gepflügt und fruchtschwere Garben geerntet haben. Und glücklich war Ihr Weg: Wo auch immer Sie Hand anlegten, da entlockte dem Stein der Schlag Ihres Hammers klar klingende Antwort, da schlugen Sie nicht nur mit glücklicher Hand die ersten sicheren Stufen zu neuen Wegen, sondern Sie bauten diese Wege und führten auf ihnen zur leuchtenden Zielhöhe. Ob wir in der Paläontologie der Cephalopoden oder der Säugetiere nachschlagen oder in den Blättern vom Gange des Lebens, ob wir in die Stockwerke des Jura uns vertiefen oder den Rätseln des Vulkanismus nachgehen, denen durch alle Zeiten Ihres Forschens Sie Ihre Kraft mit besonderer Liebe weihten, immer leuchtet Ihr Name als der eines sicheren Führers uns entgegen.

Wie Sie einst mit der Kraft Ihrer Jugend vor Düppel eingetreten sind für das Vaterland, so haben Sie unermüdlich durch ein halbes Jahrhundert des Manneslebens der deutschen Wissenschaft gedient, auf daß sie führe im Reiche des Geistes. Dafür danken wir Ihnen heute und feiern mit Ihnen den freuden- und ehrenreichen Tag Ihres goldenen Doktorjubiläums.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 16. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

IX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. **11. März.**

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*Hr. Correns besprach Versuche über das genetische Verhalten kleistogamer Blütenpflanzen.

Die Nachkommenschaften zweier daraufhin geprüfter Individuen des *Lamium amplexicaule* vom selben Standort unterschieden sich sehr deutlich in der Prozentzahl offener Blüten, die sie unter möglichst gleichen Außenbedingungen neben den geschlossen bleibenden hervorbrachten. Bei der einen Sippe waren es 42.75 ± 0.69 Prozent ($n = 5128$), bei der anderen 16.01 ± 0.60 Prozent ($n = 3678$) der überhaupt gebildeten Blüten. Die beiden Sippen brachten, auf gleiches Trockengewicht berechnet, gleich viel Blüten hervor. Die Individuen der Sippe mit mehr offenen Blüten waren im Durchschnitt um ein Geringes kräftiger (schwerer); dies Plus steht aber in gar keinem Verhältnis zu der größeren Zahl offener Blüten.

Die Versuche zeigen, daß selbst innert einer Spezies die bisher vernachlässigte erbliche Veranlagung zur Bildung kleistogamer Blüten auffällig verschieden sein kann.

Ausgegeben am 16. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

X. Gesamtsitzung. 18. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Fick sprach über Maßverhältnisse an der Oberen Gliedmaße des Menschen und den Gliedmaßen der Menschenaffen unter Vorweisung von Lichtbildern. (Ersch. später.)

Er fand u. a., daß die Gorillahand im Gegensatz zu der des Orang und Schimpansen verhältnismäßig kürzere Finger hat als die Menschenhand. Den mehr queren Verlauf der Haupt-»Handlinien« (Hauptbeugungsfalten) der Affenhand leitet er aus der untergeordneten Rolle des Daumens bei ihr ab und erklärt die »Fallhand«-Erscheinung bei den Affen aus der geringeren Kraft der Streckmuskeln, d. h. der »Ziel- oder Geistgruppe« der Muskeln.

2. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte sein Buch »Euripides Ion« (Berlin 1926).

3. Vorgelegt wurden die 48. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: Scelionidae, bearbeitet von Prof. J. J. Kieffer (†) (Berlin und Leipzig 1926), und die 1. Lieferung des I. Bandes des »Nomenclator animalium generum et subgenerum« (Berlin 1926).

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Camillo Golgi in Pavia Ende Januar 1926 durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 27. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 25. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Schmidt las über Grundlagen der Arithmetik.

Es werden die Brouwerschen Einschränkungen der Anwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und die Grundgedanken der Hilbertschen Methode zum Beweise der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik besprochen.

2. Hr. Johnsen legte vor eine Arbeit von Hrn. Wilhelm Hartwig in Berlin »Die Kristallstruktur einiger Mineralien der regulären HgS-Reihe«.

Es wird röntgenometrisch mit der Debye-Scherrer-Methode die Kristallstruktur der Mineralien Guadalcazarit, Onofrit, Tiemannit und Coloradoït ermittelt, d. h. von kubischen Kristallen und Mischkristallen der Verbindungen HgS, HgSe, HgTe, ZnS und ZnSe. Sie ergaben Zinkblende-Struktur; die Gitterkonstanten sind bis auf etwa 1 pro Mille genau.

3. Hr. Johnsen legte vor eine Arbeit von Hrn. Dr. Carl W. Correns in Berlin »Über die Erklärung der sogenannten Kristallisationskraft«.

Es wird die den wachsenden Kristall hebende Kraft, die von manchen Forschern bisher für eine besondere »Kristallisationskraft« erklärt wurde, als gewöhnliche **Kapillarkraft** nachgewiesen. Zwischen Kristall (1), Mutterlauge (2) und untergelegter Glasplatte (3) herrschen die Kapillarkonstanten σ_{12}, σ_{23} und σ_{13}, und die einander berührenden Flächen haben je die Größe ω. Ist nun $\omega\sigma_{13} > \omega\sigma_{12} + \omega\sigma_{23}$, so wird eine Oberflächenenergie $\omega\sigma_{13} - \omega\sigma_{12} - \omega\sigma_{23}$ Arbeit leisten und den Kristall heben, indem sich Mutterlauge zwischen Kristall und Glasplatte schiebt.

Versuche mit Alaunkristallen ergaben, daß diese nur um etwa $^1/_{10}$ des vorigen Betrages gehoben wurden, wenn die Glasplatte durch eine Glimmerplatte ersetzt worden war, weil sich dabei die Größen σ_{13} und σ_{23} derart ändern, daß die positive Differenz $\sigma_{13} - \sigma_{12} - \sigma_{23}$ sich stark verkleinert.

4. Hr. Haberlandt überreichte die 3. Aufl. seines Werkes »Eine botanische Tropenreise. Indo-malaiische Vegetationsbilder und Reiseskizzen« (Leipzig 1926).



Die Kristallstruktur einiger Mineralien der regulären HgS-Reihe.

Von WILHELM HARTWIG
in Berlin.

Vorgelegt von Hrn. JOHNSEN.

Die Untersuchung erfolgte auf röntgenographischem Wege nach der DEBYE-SCHERRER-Methode. Dabei wurde eine Hochspannungseinrichtung benutzt, die Hrn. Prof. JOHNSEN von der Akademie der Wissenschaften zur Verfügung gestellt worden ist, sowie eine ihm von der Notgemeinschaft der deutsehen Wissenschaft geliehene Hochvakuumpumpe.

Die Filmaufnahmen fanden in einer Messingkammer von ungefähr 180 mm innerem Zylinderumfang statt, die durch Steinsalzaufnahmen geeicht wurde. Die zu untersuchende Substanz war in Pulverform mit Kollodium auf einem dünnen Glasstäbchen befestigt, das während der Aufnahme um seine Achse gedreht wurde. Die Strahlung wurde einer SIEGBAHN-HADDING-Röhre mit Kupferantikathode entnommen.

Untersucht wurden folgende Mineralien:

1. Metacinnabarit HgS von Lake Cty., Kalifornien.
2. Guadalcazarit (Hg, Zn) (S, Se) von Guadalcazar, Mexiko.
3. Onofrit Hg (S, Se) von Culebras bei San Onofre, Mexiko.
4. Tiemannit HgSe, Grube Charlotte, Clausthal.
5. Coloradoit HgTe, Lake Views, Kalgoorlie, Westaustralien.

Die Struktur des regulären Quecksilbersulfids ist inzwischen schon mehrfach von anderer Seite bestimmt worden, so von

KOLKMEIJER, BIJVOET u. KARSSEN, Proc. Amsterdam Bd. **27**, Nr. 9—10, 1924.
W. LEHMANN, Diss. Hamburg 1924.
S. VON OLSHAUSEN, Z. f. Krist. **61**, 483. 1925.
BUCKLEY u. VERNON, Min. Mag. **20**, 382. 1925.

Meine Strukturuntersuchung ergab, daß alle diese Mineralien derselben Raumgruppe angehören, nämlich T_d^2, also isomorph mit der Zinkblende sind. Für die Kantenlängen der Elementarwürfel ergeben sich folgende Werte:

1. Metacinnabarit	5.822 A	±0.012 A
2. Guadalcazarit	5.781	0.006
3. Onofrit	5.906	0.007
4. Tiemannit	6.069	0.006
5. Coloradoit	6.444	0.006

Zum Vergleich wurden noch Aufnahmen von Zinkblende, Picos de Europa, gemacht, die eine Gitterkonstante 5.400 A ±0.008 A lieferten (Ewald 1914: 5.4 A; Gerlach 1922: 5.390 A; W. Lehmann 1924: 5.4368 A).

Onofrit ist als eine isomorphe Mischung von HgS und HgSe aufzufassen, denn die Aufnahmen ergeben ein einheitliches Gitter mit einer merklichen Verschiebung der Würfelkantenlänge von der des HgS (Metacinnabarit) gegen die des HgSe (Tiemannit) hin. Nimmt man die Vegardsche Regel, die zwar schon in einigen Fällen annähernd verifiziert worden ist, zunächst jedoch wohl nur als rein empirisch betrachtet werden muß und mit der Retgersschen Regel der Additivität der spezifischen Volumina natürlich nicht in Einklang zu bringen ist, als gültig an, nämlich daß die Gitterkonstante eines kubisch binären Mischkristalls sich additiv aus denen der beiden Komponenten berechnen läßt, so findet man für den untersuchten Onofrit einen Gehalt von 34 ± 10 Mol. Prozent HgSe.

Guadalcazarit bestätigt sich als eine isomorphe Mischung von HgS und ZnS, nach den in der Literatur vorliegenden Analysen mit geringen Anteilen von Se an Stelle von S. Die Vegardsche Regel führt hier auf etwa 10 Mol. Prozent ZnS als Beimischung, was einem Gewichtsverhältnis von Zn : Hg = 0.036 entspricht, in guter Übereinstimmung mit den in Hintzes Handb. d. Min. Bd. I, 1 p. 706, 1904 mitgeteilten Analysen von Stücken desselben Fundorts.

Aus den obigen Gitterkonstanten ergeben sich folgende Werte für die Dichten, verglichen mit den in Hintzes Handbuch angegebenen Werten:

	Hartwig		Hintze	
1. Metacinnabarit.	7.722 ± 0.6	Prozent	7.7 —7.8	
2. Guadalcazarit. .	7.396 ± 0.4	»	6.69—7.165	
3. Onofrit.	7.920 ± 0.4	»	7.6 —8.1	
4. Tiemannit	8.199 ± 0.3	»	7.1 —8.5	
5. Coloradoit. . . .	8.025 ± 0.3	»	8.627	anderes Vorkommen!

unter Zugrundelegung von $1.64 \cdot 10^{-24}$ g für die absolute Masse des Wasserstoffatoms.

Gemäß der Braggschen Hypothese der konstanten Atomradien läßt sich ferner aus diesen Gitterkonstanten für den Radius des Quecksilberatoms der Wert 1.46 — 1.50 A ableiten.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die gefundene Struktur sowie die oben angegebenen Werte für die Gitterkonstanten mit einer Annäherung von etwa 0.4 Prozent schon im Mai 1925 gelegentlich eines Berichtes an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft mitgeteilt wurden.

Berlin, Mineralogisches Institut der Universität, 22. März 1926.

Über die Erklärung der sogenannten Kristallisationskraft.

Von Dr. Carl W. Correns
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Johnsen.)

Unter dem Namen »Kristallisationskraft« oder »Wachstumsdruck kristallisierender Substanz« werden von mehreren Autoren eine Reihe von Erscheinungen zusammengefaßt, die alle gemeinsam haben, daß bei der Kristallisation ein Druck auf die Umgebung der kristallisierenden Substanz ausgeübt wird oder ausgeübt scheint. Schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts hat diese Erscheinung zu lebhaften Diskussionen Anlaß gegeben. Die Literatur darüber findet sich bei O. Lehmann (1) angegeben. Die geologisch-mineralogische Literatur bis 1911 hat Andrée (2) zusammengestellt, der in einer zweiten Arbeit (3) auch auf die Deutung der Erscheinungen eingegangen ist. Später haben Liesegang (4), Bruhns und Mecklenburg (5), Taber (6), ferner Becker und Day (8), die schon 1905 (7) wichtige Experimente mitgeteilt hatten, und Steinmetz (9) über diesen Fragenkomplex diskutiert und auch zur Klärung beigetragen. Trotzdem ist über die Deutung keine Einigung erzielt worden, nicht einmal über den Experimentalbefund.

Die Erscheinungen, die zur Annahme eines Wachstumsdruckes geführt haben, lassen sich auf mehrere verschiedene Ursachen zurückführen. Im folgenden sollen diese Möglichkeiten, die meines Erachtens alle in der Natur vorkommen, kurz diskutiert werden. Nur der bisher rätselhaftesten und umstrittensten Erscheinung, nämlich dem Heben von Gewichten durch einzelne wachsende Kristalle in übersättigter Lösung, wird etwas mehr Raum gewidmet werden, da ich über diesen Vorgang durch eigene Experimente einige Aufklärung geben kann.

Mit Recht ist von verschiedenen Autoren darauf hingewiesen worden, daß der Druck, der durch Volumvermehrung beim Übergang von einem Aggregatzustand in einen anderen erfolgt, mit einer »Kristallisationskraft« nichts zu tun hat. Da aber bis in die neueste Zeit dieser häufige und wichtige Fall scheinbarer Kristallisationskraft mißverstanden wurde, sei er kurz erläutert.

Eine Substanz, deren Volumen durch Temperaturveränderung stärker zunimmt, als der ihr zur Verfügung stehende Raum wächst, wird einen Druck

auf diesen ausüben. Dieser Vorgang spielt ja bei der Verwitterung eine Rolle. Der Druck kann als plötzliche explosionsartige Sprengwirkung bei Änderungen des Aggregatzustandes in Erscheinung treten, wenn mit dieser Änderung eine Volumvermehrung verbunden ist, so beim Übergang von einer Modifikation in eine andere. Stellt man z. B. Silikasteine für Hochöfen aus reinem gemahlenen Quarzit her, der nur β-Quarz enthält, so bersten sie beim Erhitzen im Ofen, weil der neugebildete Tridymit ein größeres Volumen als Quarz hat.

Ebenso kann bei der Kristallisation aus Schmelzen in allseitig geschlossenen oder unzureichend offenen Hohlräumen ein Druck ausgeübt werden. Ein allbekanntes Beispiel ist das Eis. Aus dem Zustandsdiagramm kann man ablesen, welchen Druck das Eis bei einer bestimmten Temperatur auszuüben vermag. Hier muß eines Einwandes von Andrée (3) gedacht werden, der sich gegen eine Volumwirkung bei einer Änderung des Aggregatzustandes mit der an und für sich richtigen Bemerkung wendet, daß bei einem Stoffe, welcher unter Volumzunahme fest wird, der Übergang in den festen Aggregatzustand durch Anwendung von Druck verzögert wird. Dieses Argument gilt aber doch nur, wenn der angewendete Druck gleich oder größer als der bei der Volumänderung freiwerdende Druck ist.

Es ist ferner durchaus nicht notwendig, daß das Wasser in vollständig geschlossenen Hohlräumen erstarrt. Wenn die Abkühlung von der oder den Öffnungen her erfolgt, verschließt das Eis diese und schließt für das gefrierende Wasser im Innern einen Hohlraum ab. Es gibt übrigens nur wenige Substanzen, bei denen nachgewiesen ist, daß sie unter Volumzunahme in den festen Aggregatzustand übergehen.

Eine Volumwirkung, die in der Natur nicht selten vorkommt, kann auch bei Ausscheidung von Kristallen aus übersättigten Lösungen eintreten, nämlich in dem Fall, daß das Volumen dieser Lösung kleiner ist als die Summe aus den Volumen der gesättigten Lösung und den ausgeschiedenen Kristallen. Hierher gehören fast alle bekanntgewordenen anorganischen Salzlösungen (mit Ausnahme z. B. von wässeriger Ammoniumchloridlösung). Auch bezüglich der Hohlräume gilt das beim Eis Erwähnte.

Die Übersättigung kann durch Temperaturänderung eintreten z. B. bei Salzen, deren Löslichkeit mit der Temperatur steigt, durch Abkühlen der gesättigten Lösung. Auch durch Verdunsten des Lösungsmittels kann eine Übersättigung erfolgen. Wenn das verdunstende Wasser durch Kapillaren entweichen kann und dabei eine Übersättigung eintritt, die durch Keimbildung von diesen Kapillaren aus plötzlich aufgehoben wird, während die Kapillaren schon durch die Keime geschlossen sind, dann rufen auskristallisierende Salze in Hohlräumen z. B. von Bausteinen Sprengwirkungen hervor, wie sie bei diesen E. Kaiser (10) beschrieben hat. Hierher dürften ebenfalls die von Taber (6) als Beispiel für Kristallisationskraft neuerdings mitgeteilten Sprengwirkungen von auskristallisierenden Lösungen in abgeschlossenen Glasgefäßen, porösen Tonscherben usw. gehören.

Eine zweite Möglichkeit ist unter besonderen Verhältnissen durch das Eintreten von chemischen Reaktionen, z. B. Hydratbildung, gegeben,

wenn nämlich die reagierende Flüssigkeit durch Kapillaren Zutritt zum Reaktionsort hat, die dem Reaktionsprodukt als grobkristallinem, festen Körper verschlossen sind. Hierher gehört z. B. die Bildung von Gips aus Anhydrit. An und für sich findet dabei keine Volumzunahme statt, sondern eine Abnahme. Aus 46 ccm Anhydrit und 36 ccm Wasser bei 4° C entstehen nur 74 ccm Gips. Aber bei der Bildung von Gips aus natürlichem Anhydrit werden nach einer Berechnung von van't Hoff (11) 435—6.84·t cal frei, die in mechanische Arbeit umgesetzt werden können. Wenn nun das Wasser durch Schichten, in deren Poren die Gipskristalle nicht eindringen können, etwa durch Tonschichten, zu einer Anhydritlage zutritt, so können Druckwirkungen auftreten. Ähnlich liegen vielleicht die Verhältnisse bei der Umwandlung von Olivin in Serpentin. Die Volumzunahme ist auch hier nur scheinbar.

Außer der Sprengwirkung wird meistens auch das »Selbstreinigungsvermögen« der Kristalle als Beweis für eine Kristallisationskraft angeführt. Auch hier liegen ähnlichen Erscheinungen wohl verschiedene Ursachen zugrunde. Eiskristalle in Gelatine z. B. verdrängen diese nicht, sondern der Gelatine wird Wasser entzogen, sie zieht sich von den Eiskristallen zurück (Liesegang [4]), die Kristalle wachsen auf Kosten ihrer Umgebung. Auf die Ähnlichkeit dieses Vorgangs mit der Bildung von Eiskristallen im Schlamm hat ebenfalls Liesegang hingewiesen. Vielleicht wirkte ein solcher Wasserentzug auch bei der Bildung der Gipskristalle in Tonen mit, obwohl hier auch noch andere Erscheinungen Einfluß haben dürften.

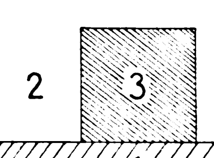
Als solche kommen vor allem Grenzflächenkräfte in Frage. Solche Kräfte wurden von Bruhns und Mecklenburg (5) und Liesegang (4) bereits zur Erklärung herangezogen. Day und Becker (8) bestritten aber ihre Wirksamkeit, und auch Bruhns und Mecklenburg haben in ihrer letzten Veröffentlichung (12) (1917) keine genauere Erklärung gegeben. Diese soll im folgenden versucht werden.

Das Experiment von Becker und Day (7), das der Diskussion zugrunde liegt, ist folgendes: In eine gesättigte Alaunlösung wird ein Alaunkristall gelegt, auf die zum Boden parallele Fläche des Kristalls wird eine Glasplatte gesetzt, die mit einem Gewicht beschwert ist. Der Kristall wächst in der durch Verdunstung allmählich übersättigten Lösung und hebt das Gewicht. Bruhns und Mecklenburg (5) machten diesen Versuch nach und ließen einen zweiten Alaunkristall unbelastet in derselben Lösung als Kontrolle. Die belasteten Kristalle wuchsen in ihren Versuchen nicht, nur die unbelasteten Kontrollkristalle. Taber (6) und ungefähr gleichzeitig mit ihm Becker und Day in einer zweiten Arbeit (8) wiesen darauf hin, daß bei Anwesenheit unbelasteter Kristalle der belastete Kristall, der ja nach dem Rieckeschen Prinzip eine größere Löslichkeit hat, nicht wachsen kann.

Bruhns und Mecklenburg (12) haben eingewendet, daß die Löslichkeitserhöhung nur sehr gering sein könne. Wenn aber die Übersättigung ebenfalls sehr gering ist, so wird sich doch der Löslichkeitsunterschied bemerkbar machen. Auf Grund meiner eigenen Beobachtungen kann ich ergänzend bemerken, daß bei starker Übersättigung und geringer Belastung unbelastete

Kristalle das Wachstum der belasteten nicht merklich stören. Die belasteten hoben also auch in diesem Fall das aufgelegte Gewicht sehr deutlich.

Wie kommt nun diese Hebung zustande? Es ist naheliegend, hier an Kapillarkräfte zu denken, anzunehmen, daß die Mutterlauge zwischen Kristall und Gefäßboden eindringt. BECKER und DAY (8) haben zwar den Einwand gemacht, die Kapillarität müsse den Kristall an den Boden drücken. Sie denken an den bekannten Effekt, daß zwei gleich benetzbare Platten, die in eine Flüssigkeit halb eingetaucht werden, aufeinander zu gezogen werden. Aber da wirkt die Grenzflächenspannung flüssig-gasförmig mit, die in den Versuchen gar nicht vorkommt, die »Oberflächenspannung« im engeren Sinn. Die von den beiden Autoren angegebene Formel bezieht sich ebenfalls auf solche Fälle. Um uns die Bedingungen des Eindringens der Mutterlauge anschaulich zu machen, können wir einer Überlegung von DES COUDRES (13) folgen, die für die Vorgänge zwischen einer festen und zwei flüssigen Grenzflächen aufgestellt war (s. Fig.). In der Terminologie folge ich FREUNDLICH (14).



Wenn der feste Körper 3 in der Flüssigkeit 2 von einer festen Grenzfläche 1, die er berührt, entfernt wird, muß Arbeit geleistet werden, und zwar gegen die Grenzflächenkräfte. Es entstehen dabei zwei neue Grenzflächen fest/flüssig, und es verschwindet die Grenzfläche fest/fest. Wenn mit ω die Größe der neuentstehenden Oberfläche bezeichnet wird, so verschwindet eine Grenzfläche von der Größe ω und der Spannung $\sigma_{1,3}$, und es entstehen dafür zwei neue Grenzflächen von der Größe ω, die eine mit der Spannung $\sigma_{1,2}$, die andere mit der Spannung $\sigma_{2,3}$. Die geleistete Arbeit A beträgt also:

$$\omega \cdot \sigma_{1,3} - \omega \cdot \sigma_{1,2} - \omega \cdot \sigma_{2,3}$$

oder:

$$\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} - \sigma_{2,3} = \frac{A}{\omega}^{*}.$$

Wird $\sigma_{1,3} \geqq \sigma_{1,2} + \sigma_{2,3}$, so ist $\frac{A}{\omega} = 0$ oder positiv. Es kostet keine Arbeit, bzw. man gewinnt Arbeit, wenn 3 von 2 umhüllt wird. Diese Arbeit ist es, die den Kristall hebt. Die Hebung ist also an die Bedingung geknüpft, daß $\sigma_{1,3} > \sigma_{1,2} + \sigma_{2,3}$ ist. Um diesen Satz experimentell zu prüfen, habe ich zunächst versucht, die Grenzflächenspannung $\sigma_{1,3}$ zu ändern. Die bisherigen Versuche waren in der Art angestellt worden, daß Alaunkristalle zwischen Glasflächen wuchsen. $\sigma_{1,3}$ war also die Grenzflächenspannung Glas-Alaun. Dabei findet zweifellos ein Heben statt. Legt man aber Muskowitblättchen zwischen Alaunkristall und Glas, so daß $\sigma_{1,3}$ jetzt der

* Die Arbeit läßt sich in Anlehnung an die LAPLACEschen Gleichungen folgendermaßen ausdrücken: Wenn der Körper 3 um die Strecke x, deren Betrag nur zwischen 0 und der molekularen Wirkungssphäre δ liegen kann, gehoben wird, und mit ψ eine Funktion bezeichnet wird, so ist: $A = \int_0^\delta \psi(x)\, dx$.

Grenzflächenspannung Muskowit-Alaun entspricht und $\sigma_{1,2}$ derjenigen Muskowit-Alaunmutterlauge, so findet nur ein äußerst geringes Heben des Gewichtes statt, das häufig innerhalb der Fehlergrenzen liegt, oder durch Unebenheiten der Glimmeroberfläche erklärt werden kann. $\sigma_{1,3}$ ist in diesem Falle also nahezu gleich $\sigma_{1,2} + \sigma_{2,3}$.

Die Versuche wurden derart angestellt, daß je drei etwa gleich große Kristalle ausgemessen und gewogen wurden. Die Wägungen wurden mit einer Kuhlmannwage vorgenommen (Unsicherheit ± 0.0001 g). Für die Dickenmessungen benutzte ich ein Schraubenmikrometer von Zeiß. Bei glatten Flächen lagen die Fehlergrenzen hier bei ± 0.0001 cm. Bei manchen Kristallen kamen infolge unregelmäßiger Ausbildung auch größere Schwankungen vor. Solche Kristalle sind zu den Versuchen weniger geeignet, zeigten aber doch stets mit der obigen Theorie übereinstimmende Resultate (Versuche 9a und 9c der folgenden Tabelle). Die drei Kristalle wurden in gleich großen Schalen mit gleichen Mengen Mutterlauge in einem annähernd thermokonstanten Keller ($^1/_2$—2° Schwankungen) wachsen gelassen. Der eine wurde mit einer gewogenen Glasplatte bedeckt, der zweite ebenfalls, aber nachdem zwischen Boden und Kristall sowie zwischen Kristall und Glasplatte je ein frisch abgerissenes Muskowitblättchen[1] gelegt war, der dritte wuchs unbelastet.

Der Druck wurde berechnet auf die Oktaederfläche der Unterseite vor Beginn des Wachstums unter Berücksichtigung des Auftriebs. Diese Fläche, die also dem ω der obigen Betrachtung entspricht, wurde mit Hilfe eines Mikrometers in dem einen Okular einer Leitzschen binokularen Lupe gemessen. Eine Auswahl aus solchen Versuchen zu dreien ist in der folgenden Tabelle (S. 86) mitgeteilt.

Es mag noch ausdrücklich betont werden, daß auch sämtliche nicht mitgeteilten Versuche Resultate ergaben, die mit den in der Tabelle zusammengefaßten übereinstimmten. Um Fehler möglichst auszuschließen, wurde übrigens öfters, wie das auch aus den Zahlen der Tabelle ersichtlich ist, derselbe Kristall einmal zwischen Glas und einmal zwischen Muskowit wachsen gelassen.

Es wurde ferner versucht, durch Änderung der Grenzflächenspannung der Lösung gegen die festen Grenzflächen durch Beimengung grenzflächenaktiver Stoffe einen Effekt zu erzielen. Es wurden Propylalkohol und Benzoesäure zugesetzt. In beiden Fällen wurde das Gewicht gehoben, anscheinend sogar stärker als in reiner Alaunlösung, doch fehlen mir noch ausgedehntere Versuchsreihen, um den Einfluß der zugesetzten Stoffe auf die Übersättigung zu prüfen, der das Bild undeutlich macht.

Bei diesen Versuchen traten noch zwei Erscheinungen auf, die auch andern Beobachtern nicht entgangen sind, aber von ihnen mit den Erscheinungen der »Kristallisationskraft« verquickt wurden. Sie seien deshalb kurz erläutert. Die belasteten Kristalle lagern in erster Linie an den freien Flächen Substanz an, da hier die Diffusion nicht behindert ist. Auch auf der

[1] Der Muskowit (von Sludianka bei Irkutsk) wurde mir vom mineralogischen Institut der Universität Berlin zur Verfügung gestellt.



Nr. des Versuchs	Dauer (Stunden)	Art des Versuchs		Höhe des Kristalls in cm		Höhenzunahme		Gewicht des Kristalls in g		Gewichtszunahme in Proz.	Menge der Mutterlauge ccm	Bemerkungen
		Kristall zwischen	Druck mg/qmm	vorher	nachher	in cm	in Proz.	vorher	nachher			
3a	17	Glas	407.3	0.9615	0.9634	0.0019	0.2	0.8828	1.1142	26.23	250	Starke Keimbildung infolge Abkühlung (3a–5c)
3b	17	Muskowit	290.2	0.8661	0.8662	0.0001	0.012	0.8225	1.0526	27.96	250	
3c	17	(Kontrollkristall)		0.7995	0.8544	0.0549	6.87	0.6682	0.9650	44.42	250	
4a	21	Glas	335.6	0.5170	0.5202	0.0032	0.67	0.2787	0.3391	21.64	125	
4b	21	Muskowit	292.4	0.5241	0.5242	0.0001	0.02	0.2898	0.3563	22.95	125	
4c	21	(Kontrollkristall)		0.6379	0.6692	0.0313	4.91	0.3725	0.4765	27.92	125	
5a	21	Glas	364.3	0.3969	0.3984	0.0015	0.38	0.1335	0.1773	25.31	125	
5b	21	Muskowit	348.3	0.4988	0.4989	0.0001	0.02	0.1752	0.2290	30.71	125	
5c	21	(Kontrollkristall)		0.3708	0.4039	0.0331	8.93	0.1224	0.1831	49.60	125	
6a	42	Glas	288.1	0.8666	0.8706	0.0040	0.46	1.2280	1.5093	22.91	250	
6b	42	Muskowit	383.4	0.9630	0.9631	0.0001	0.01	1.3054	1.6160	23.80	250	
6c	42	(Kontrollkristall)		0.8940	0.9219	0.0279	3.12	1.1935	1.4672	22.90	250	
7a	24	Glas	240.5	0.5242	0.5248	0.0006	0.11	0.3563	0.4113	15.44	125	
7b	24	Muskowit	239.2	0.5202	0.5202	0.0000	0.00	0.3317	0.3785	14.11	125	
7c	24	(Kontrollkristall)		0.6692	0.6872	0.018	2.69	0.4765	0.5535	16.18	125	
8a	24	Glas	246.6	0.4488	0.4508	0.0020	0.45	0.2290	0.2593	13.23	125	
8b	24	Muskowit	300.2	0.3984	0.3987	0.0003	0.07	0.1678	0.2058	21.63	125	
8c	24	(Kontrollkristall)		0.4039	0.4209	0.0170	4.21	0.1755	0.2294	38.67	125	
9a	20	Glas	129.7	0.6345 0.6335	0.6411 0.6378	0.0066 0.0043	1.04 0.68	0.8590	1.0048	16.97	250	Starke Keimbildung infolge Abkühlung (9a–11c)
9b	20	Muskowit	135.3	0.6902	0.6905	0.0003	0.04	0.9634	1.1368	18.00	250	
9c	20	(Kontrollkristall)		0.8031 0.7980	0.8421 0.8370	0.0390	4.87	1.0540	1.2929	22.65	250	
11a	20	Glas	251.0	0.3983	0.3989	0.0006	0.15	0.1940	0.2614	34.75	125	
11b	20	Muskowit	405.2	0.4870	0.4872	0.0002	0.04	0.2002	0.2786	39.18	125	
11c	20	(Kontrollkristall)		0.3818	0.4302	0.0484	12.68	0.1164	0.2090	79.53	125	
12a	60	Glas	483.5	0.4872	0.4899	0.0027	0.55	0.2786	0.4081	46.49	125	
12b	60	Muskowit	349.7	0.3989	0.3997 0.3989	0.0008 0.0000	0.21 0.00	0.2614	0.3491	33.55	125	Teilweises Höhenwachst. infolge Unebenheiten d. Muskowitblättchens
12c	60	(Kontrollkristall)		0.4301	0.4707	0.0406	9.44	0.2023	0.3056	51.05	125	

Unterseite wächst der Kristall, hier wird aber nur an einem schmalen Streifen. längs der Kanten Substanz angelagert. Schwankt die Übersättigung der Lösung, z. B. auf Grund von Temperaturunterschieden, findet das Wachstum also periodisch statt, so entsteht auf der Unterseite ein treppenförmiger Hohlraum. Dieser Hohlraum ist nicht etwa durch Auflösung entstanden, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man einen Chromalaunkristall in einer Aluminiumalaunlösung weiterwachsen läßt. Die durchsichtige Alaunsubstanz läßt die neuangelagerte Schicht auf der alten Kristalloberfläche erkennen. Taber (6) erklärt das Wachstum an den Kanten damit, daß an der Unterseite der Kristall unter höherem Druck stehe, so daß die übersättigte Lösung in Bezug auf diese nicht mehr übersättigt ist. An der Stelle, an der der Druck aufhört und die Übersättigung anfängt, eben an der Kante, fällt die Substanz aus der Lösung aus. Da die unbelasteten Kristalle, wenn sie auf dem Boden liegen — sie haben allerdings ihr eigenes Gewicht zu tragen — die gleiche Erscheinung noch ausgeprägter zeigen, glaube ich, daß eine einfachere Erklärung genügt. Die übersättigte Lösung tritt von außen zwischen

Kristall und Gefäßboden ein, sie gibt in der kapillaren Schicht ihren Überschuß ab, drinnen ist also nur gesättigte Lösung.

Die zweite merkwürdige Erscheinung ist die, daß der Kristall auf der Unterseite, aber nicht oder nur ganz unmerklich auf der Oberseite wächst. An der Oberseite stumpfen regelmäßig Rhombendodekaederflächen die Oktaederkanten ab, auf der Unterseite sind die Oktaederkanten scharf ausgebildet. Daß der Kristall nur auf der Unterseite wächst, läßt sich so erklären, daß die Alaunlösung in der Nähe des Bodens am stärksten übersättigt ist. Der Druck auf der Oberseite genügt dann bei sehr schwacher Übersättigung, eine Ausscheidung zu verhindern. Der nur um das Kristallgewicht vermehrte Druck auf der Unterseite hält einer stärkeren Übersättigung gegenüber nicht die Wage, es findet dort Ausscheidung statt. Taber (6) hat auch experimentell nachgewiesen, daß ein am Boden liegender Kristall auf Kosten eines frei aufgehängten Kristalls wachsen kann. Trotz dieses Hinweises lehnt Taber Adsorption und Kapillarität als für die Hebung wirksame Kräfte mit der Begründung ab, daß ja dann der Kristall auch auf der Oberseite wachsen müßte. Eine solche Notwendigkeit ist aber nach dem oben Gesagten nicht einzusehen.

Die Berücksichtigung der Grenzflächenspannungen bei der Kristallisation läßt auch das oft als Argument für eine Kristallisationskraft angeführte »Selbstreinigungsvermögen« der Kristalle verstehen, soweit es sich nicht in Analogie zu den obenerwähnten Eiskristallen durch Wachsen auf Kosten der Umgebung erklären läßt. Ein besonders beliebtes Beispiel ist die Bildung von wasserhellen Gipskristallen in Tonen. Wird die gesättigte Kalziumsulfatlösung zwischen Tonteilchen und Gipskristall gesogen, so wächst dieser rein weiter, gerade wie der Alaunkristall die aufgelegte Glasplatte hebt. Vermag die Grenzflächenenergie den äußeren Widerstand nicht zu überwinden, so wird der Ton umschlossen, wie dies nach Andrée (2) ebenfalls vorkommt. Es ist aber auch möglich, daß der zwischen Alaun und Muskowit beobachtete Vorgang eintritt, daß keine Lösung zwischen Kristall und Fremdkörper gesogen wird oder mit sehr viel geringerer Energie. So wachsen z. B. Kalkspat- und Gipskristalle durch Sande hindurch, indem sie die einzelnen Sandkörner umschließen (kristallisierter Sandstein von Fontainebleau, Gipsrosetten im Wüstensand).

Die Versuche über die Grenzflächenspannungen werden fortgesetzt. Wir wissen ja bis jetzt so gut wie nichts über die Grenzflächenspannungen fester Körper gegeneinander. Gerade diese Grenzflächenspannungen sind aber von besonderem Interesse, da sie z. B. bei der Erscheinung der Rekristallisation eine Rolle spielen dürften. Auch die Bestimmungen von Grenzflächenspannungen fest-flüssig sind gering und beschränkt auf die von W. Ostwald angegebene Methode, die Grenzflächenspannung aus der erhöhten Löslichkeit sehr kleiner Teilchen zu berechnen.

Zusammenfassend läßt sich über den sogenannten Wachstumsdruck der Kristalle sagen, daß die Erscheinungen in der Natur und in Experimenten, die bisher einem solchen zugeschrieben wurden, sich entweder durch Volumvermehrung bei Änderung

des Aggregatzustandes oder durch chemische Reaktionen oder durch Grenzflächenkräfte erklären lassen.

Diese Grenzflächenkräfte werden genauer definiert. Die Erscheinung, daß ein Kristall ein aufgelegtes Gewicht hebt, kann zum Verschwinden gebracht werden, dadurch, daß man die Grenzflächenspannungen entsprechend ändert.

Verzeichnis der im Text angeführten Literatur.

1. Lehmann, O. Molekularphysik. 1. Bd. Leipzig. 1888.
2. Andrée, K. Die geologische Bedeutung des Wachstumsdrucks kristallisierender Substanzen. Geol. Rundschau. Bd. 3, S. 7. 1912.
3. Andrée, K. Über die geologische Bedeutung des Drucks wachsender Kristalle und die Frage nach dessen physikalischer Erklärung. Sitzungsber. d. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturwiss. z. Marburg. Nr. 1. 1911.
4. Liesegang, R. E. Kristallisationskraft. Naturw. Rundschau Nr. 12 der Chemikerzeitg. 1913.
5. Bruhns, W., u. Mecklenburg, W. Über die sogenannte Kristallisationskraft. 6. Jahresber. d. niedersächs. geol. Vereins. S. 92. 1913.
6. Taber, St. The growth of crystals under external pressure. The American Journ. of Science. IV, Bd. 41, S. 532, New Haven. 1916.
7. Becker, G. W., u. Day, A. L. The linear force of growing crystals. Proc. Wash. Acd. of Science. Bd. 7, S. 283. 1905.
8. Becker, G. W., u. Day, A. L. Bemerkungen über d. lineare Kraft wachsender Kristalle. Centralblatt f. Min. etc. 1916. S. 337 u. 364.
9. Steinmetz, H. Über die Kristallisationskraft, insbesondere bei geologischen Vorgängen. Zentralbl. f. Min. etc. 1923. S. 423.
10. Kaiser, E. Über Verwitterungserscheinungen an Bausteinen. Neues Jahrb. f. Min. etc. 1907. II. S. 59.
11. zitiert nach Sackur: »Calcium« in Abegg, Handbuch d. anorg. Chemie. Bd. II, 2. S. 133. Leipzig 1905.
12. Bruhns, W., u. Mecklenburg, W. Über die sogenannte Kristallisationskraft. Zentralbl. f. Min. etc. 1917. S. 123.
13. des Coudres in Rhumbler, L. Physikalische Analyse von Lebenserscheinungen der Zelle. Arch. f. Entwicklungsmechanik d. Organismen. S. 224. 1898.
14. Freundlich, H. Kapillarchemie. 3. Aufl. Leipzig. 1924.

Ausgegeben am 27. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XII. Gesamtsitzung. 15. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. LÜDERS.

*1. Hr. VON WILAMOWITZ-MOELLENDORFF sprach über Hellenismus und Rom.

DROYSEN hat den Namen Hellenismus für die letzten drei Jahrhunderte v. Chr. geprägt. zunächst im Gegensatze zu der attischen Periode, die er ablöst. Grammatiker, welche der attischen Sprache die der Hellenen gegenüberstellen, gaben zu dem Namen den Anlaß. Nach unten haben Griechen und Römer unter den Zeitgenossen des Augustus die Grenzscheide zweier Weltperioden empfunden. Die Einheit des römischen Reiches macht sich auf allen Lebensgebieten fühlbar: die Kultur des Kaiserreiches als Einheit zu erfassen ist nur bisher ungenügend geleistet.

2. Hr. ZIMMERMANN legte eine Untersuchung über die Knickfestigkeit von Stabverbindungen mit Form- und Belastungsfehlern vor.

Im Anschluß an die frühere Untersuchung eines nicht eingespannten Feldes mit solchen Fehlern wird zuerst gezeigt, wie daraus die Knickbedingungen für ein gleiches elastisch eingespanntes Feld abzuleiten sind. Damit werden dann einfache Regeln zur Berechnung der Knickfestigkeit mehrerer solcher miteinander verbundener Felder, also von Stabzügen mit Form- und Belastungsfehlern, entwickelt. Am Schluß folgt ein kurzer Bericht über Knickversuche des Deutschen Eisenbauverbandes.

3. Hr. PLANCK legte eine Mitteilung von Hrn. Prof. Dr. WALTER SCHOTTKY in Rostock vor: Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektrodynamik. (Ersch. später.)

Wenn man die Reziprozitätssätze der klassischen Schwingungslehre auf die Wechselwirkung zwischen einem zu untersuchenden Strahler A und einem Zustrahler B anwendet, gelingt es, bei passender Wahl von B, eine Beziehung herzustellen zwischen den Aufnahme- und Sendeeigenschaften von A allein, für die Richtung der auftreffenden Welle. Diese Beziehung, die in der Mitteilung abgeleitet wird, zeigt, in ihren verschiedenen Formulierungen, das ständige Anwachsen des Aufnahmewirkungsgrades gegenüber dem Sendewirkungsgrad nach tieferen Frequenzen hin (Tiefempfangsgesetz).

4. Hr. ENGLER überreichte die 2. Aufl. des Bandes 14a des von ihm herausgegebenen Werkes »Die natürlichen Pflanzenfamilien«: A. ENGLER, Angiospermae (Leipzig 1926).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. FRANZ PRAETORIUS übersandte seine Schrift »Die Gedichte des Hosea« (Halle a. S. 1926), das korrespondierende Mitglied Hr. KURT SETHE seine Abhandlungen: »Der Ursprung des Alphabets«, »Die neuentdeckte Sinaischrift« (Sonderabdr. Berlin 1926) und das korrespondierende Mitglied Hr. PERCY GARDNER sein Buch »New chapters in greek art« (Oxford 1926).

6. Vorgelegt wurde das Werk des emer. wissenschaftlichen Beamten und Professors der Akademie Hrn. Hermann Dessau »Geschichte der römischen Kaiserzeit«, 2. Bd., 1. Abt. (Berlin 1926).

7. Vorgelegt wurden ferner das im Anschluß an die Acta Borussica erschienene Werk von Friedrich Frhrn. von Schrötter »Das preußische Münzwesen 1806 bis 1873«, 3 Bände (Berlin 1926) und das mit Unterstützung der Akademie herausgegebene 4. Heft des »Archivs für Erdmagnetismus«, hrsg. von Adolf Schmidt (Potsdam 1926).

8. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch die Gesamtakademie:

2000 *RM* für die Fortführung des Biographischen Jahrbuchs:

durch die physikalisch-mathematische Klasse:

6200 *RM* für die Fortführung der Arbeiten am Nomenclator animalium generum et subgenerum,

4200 *RM* für die Fortführung des Unternehmens »Das Tierreich«,

3000 *RM* für die Fortführung des Unternehmens »Das Pflanzenreich«,

500 *RM* für die Fortführung des Werkes »Flora von Papuasien«,

1000 *RM* dem Hrn. Prof. Dr. Baur in Berlin-Dahlem für eine botanische Sammelreise nach Kleinasien,

2000 *RM* dem Hrn. Prof. Dr. Ludendorff in Potsdam zur Beschaffung photographischer Platten für die Expedition des Astrophysikalischen Observatoriums nach La Paz in Bolivien,

600 *RM* dem Hrn. Prof. Dr. Weidenreich in Heidelberg für anthropologische Untersuchungen,

200 *RM* dem Hrn. Prof. Dr. Schmiedeknecht in Bad Blankenburg i. Th. für seine Opuscula Ichneumonologica,

400 *RM* dem Hrn. Dr. Jüngst in Darmstadt für geologische Arbeiten,

500 *RM* dem Frl. Dr. Stein in Berlin für Drucklegung ihrer Untersuchungen über Radiomorphosen,

2000 *RM* dem Hrn. Prof. Dr. Bieberbach in Berlin für die Herausgabe der Werke Kroneckers;

durch die philosophisch-historische Klasse:

600 *RM* für die Herausgabe des Epiphanius durch die Kirchenväterkommission,

300 *RM* für die Herausgabe der Praeparatio des Eusebius durch dieselbe Kommission,

4000 *RM* für die Fortführung der Arbeiten am Ibn Saad,

2500 *RM* für die Fortführung der Arbeiten der Ägyptischen Kommission,

3000 *RM* für die Bearbeitung der Dialektwörterbücher durch die Deutsche Kommission,

1500 *RM* für die Herausgabe der Werke Jean Pauls,
3000 *RM* für die Arbeiten an den Handschriften der Orientalischen Kommission,
3000 *RM* für die Fortführung der Kant-Ausgabe.

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 7. April 1926 die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin Geh. Medizinalrats Dr. Franz Bruno Hofmann zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen mit Form- und Belastungsfehlern.

Von H. ZIMMERMANN.

In früheren Untersuchungen sind die Knickbedingungen für ein Einzelfeld unter der Annahme ermittelt worden, daß die Stabachse nicht gerade, daß der Stab in der Mitte durch eine Einzelkraft querbelastet sei und daß die Längskraft an Fehlerhebeln angreife. Im folgenden soll gezeigt werden, wie ein Stabzug zu berechnen ist, dessen Felder mit solchen Fehlern behaftet sind. Der Vollständigkeit wegen wird außerdem noch eine über die ganze Länge jedes Feldes gleichmäßig verteilte Querbelastung hinzugefügt. Im übrigen ist aus dem Bild 1 im Heft I oder V des gegenwärtigen Jahrganges der Sitzungsberichte (S. 40) zu ersehen, wie die Anordnung eines Feldes gedacht ist und wie die Rechnungsgrößen bezeichnet sind[1].

Wenn die an ein Feld grenzenden Nachbarfelder so beschaffen und belastet sind, daß sie auf die Enden des Zwischenfeldes keine Einspannung ausüben können, so verhält sich dieses natürlich wie ein einfacher Stab. Es gelten dann die vorher erwähnten Knickbedingungen. Wir setzen sie deshalb — als zu einem Grenzfall der jetzigen Aufgabe gehörig — noch einmal hierher, und zwar mit einigen kleinen Ergänzungen; nämlich mit $y_0 \cos \pi x_m : l$ statt y_0 und $(f_1 + f_2) : 2$ statt f. Die Größe y_0 stellt die Scheitelhöhe der Fehlerlinie dar, und die Ausdrücke mit dem Faktor y_0 gelten nur für symmetrische Formen dieser Linie, bei denen der Scheitel in dem Lot der Stabsehnenmitte liegt. Damit sie auch für solche Formen anwendbar werden, bei denen der Scheitel gegen die Stabmitte verschoben ist, also für unsymmetrische Fehlerlinien, braucht man nur y_0 mit $\cos \pi x_m : l$ zu multiplizieren, wo x_m die Scheitelverschiebung und l die Wellenlänge der Fehlerlinie. Es stellt dann $y_0 \cos \pi x_m : l$ den Pfeil der Anfangskrümmung der Stabachse in der Mitte des Feldes dar. In den früheren Arbeiten ist der Faktor $\cos \pi x_m : l$ — mit Hinweis auf die eben geschilderte Sachlage — häufig nur zur Vereinfachung der Formeln weggelassen. Ähnlich liegt es mit der Schreibweise f statt $(f_1 + f_2) : 2$. Diese sollte nicht bedeuten, daß zwei gleiche Fehlerhebel f vorhanden seien, sondern es sollte f nur eine abgekürzte Bezeichnung für den Mittelwert aus f_1 und f_2 sein[2]. Wir sehen

---

[1] Sonderdrucke: »Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung« und »Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung«. (Beide 1926.)

[2] Die Bedeutung der kürzeren Schreibweise ist z. B. in der Untersuchung über die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse im Jahrgang 1923 der Sitzungsberichte auf S. 263 für $(f_1 + f_2) : 2$ und auf S. 274 für $y_0 \cos \pi x^m : l$ hervorgehoben.



jetzt von diesen Vereinfachungen ab, um deutlich hervortreten zu lassen, daß die Ergebnisse auch für Felder mit unsymmetrischen Anfangskrümmungen und mit ungleichen Fehlerhebeln gelten.

I. Die Knickbedingungen und Grenzausbiegungen eines nicht eingespannten Feldes.

Wie schon bemerkt, soll den Gleichungen ein Glied hinzugefügt werden, das den Einfluß einer vollen gleichmäßigen (etwa dem Eigengewicht entsprechenden) Belastung des Feldes mit p für die Längeneinheit ausdrückt. Es ist nach dem für die Einzelquerlast Q entwickelten Verfahren so leicht zu finden, daß wir die Ausrechnung dem Leser überlassen können. Die beiden Fälle $n = a : l = 1$ und $n \gtrless 1$ sind wieder getrennt zu behandeln.

Erste Annahme: $n = 1$.

Die Wellenlänge l der Fehlerlinie ist also gleich der Feldlänge a.

Die Knickbedingung lautet:

$$(1)\qquad \frac{2}{\pi^3}\frac{pa}{K} + \frac{1}{\pi^2}\frac{Q}{K} + \frac{1}{\pi}\frac{f_1+f_2}{a} + \frac{1}{2}\frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l} = 0.$$

Die Grenzausbiegung, d. h. die im Augenblick der Erreichung der Knickgrenze vorhandene elastische Ausbiegung der Stabmitte ist

$$(2)\qquad \left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \frac{pa}{K}\left[\frac{7}{\pi^3} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8}\right] + \frac{Q}{4K}\left[\frac{6}{\pi^2} - 1\right] - \frac{f_1+f_2}{2a}\left[\frac{1}{\pi} + 1\right] - \frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}.$$

K ist die EULERsche Knicklast; also $K = (\pi : a)^2\, EJ$.

Zweite Annahme: $n \gtrless 1$.

Die Wellenlänge l der Fehlerlinie und die Stablänge a sind verschieden.

Die Knickbedingung lautet:

$$(3)\qquad \frac{2}{\pi^3}\frac{pa}{K} + \frac{1}{\pi^2}\frac{Q}{K} + \frac{1}{\pi}\frac{f_1+f_2}{a} - \frac{2}{\pi}\frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}\,\frac{n^2}{n^2-1}\cos n\,\pi/2 = 0.$$

Die dazugehörige Grenzausbiegung ist

$$(4)\qquad \begin{aligned}\left[\frac{y_m}{a}\right]_g = {} & \frac{pa}{K}\left[\frac{4:\pi^3}{n^2-1} + \frac{8}{\pi^3} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8}\right] \\ & + \frac{Q}{K}\left[\frac{2:\pi^2}{n^2-1} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{4}\right] \\ & + \frac{f_1+f_2}{2a}\left[\frac{4:\pi}{n^2-1} - 1\right] \\ & + \frac{y_0}{a}\left[\frac{1}{n^2-1} + \cos n\,\pi/2\right]\cos\pi\frac{x_m}{l}.\end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daß überall nur das arithmetische Mittel der Fehlerhebel auftritt. Die Gleichungen (1) und (3) ergeben bei vorgeschriebenem p, Q und y_0 nicht die einzelnen Werte von f_1 und f_2, sondern nur ihre Summe, d. h. eine Beziehung zwischen ihnen. Wenn $p = Q = y_0 = 0$, also das Feld (abgesehen von den f) fehlerfrei ist, muß

$$f_1 + f_2 = 0$$

sein. Hieraus folgt

$$\text{entweder } f_1 = f_2 = 0. \text{ oder } f_1 = -f_2.$$

Von diesen beiden Gleichungen stellt nur die erste eine Knickbedingung dar: nämlich für den Eulerfall. Die zweite ist bedeutungslos, weil alle Gleichungen unter der Voraussetzung abgeleitet sind, daß die elastische Ausbiegung y_m der Stabmitte eine Funktion der Stabkraft S sei. Bei $p = Q = y_0 = 0$ und $f_1 = -f_2$ wäre aber offenbar $y_m = 0$ für jeden Wert von S, die Voraussetzung also nicht erfüllt.

II. Die Knickbedingungen eines eingespannten Feldes.

Der Einfluß der Einspannungen drückt sich am unmittelbarsten aus in der durch sie bewirkten Änderung der Neigungswinkel der Stabenden. Es liegt daher nahe, das Unbestimmtwerden dieser Winkel als Merkmal für die Erreichung der Knickgrenze zu benutzen. Das läßt sich leicht mit Hilfe der folgenden Gleichungen ausführen, die eine ganz allgemeine Beziehung zwischen den Endneigungen

$$\nu_{01} \text{ und } \nu_{02}$$

eines irgendwie geformten und belasteten Stabes mit der Einspannung Null. und den entsprechenden Neigungen

$$\nu_1 \text{ und } \nu_2$$

des eingespannten Stabes von gleicher Form und Belastung darstellen[3].

$$(5) \qquad \begin{cases} \nu_1 = [(1 + t\mu'')\,\nu_{01} + s\mu'' \cdot \nu_{02}] : N, \\ \nu_2 = [(1 + t\mu')\,\nu_{02} + s\mu' \cdot \nu_{01}] : N. \end{cases}$$

Hierin ist der Wert des Nenners

$$(6) \qquad N = 1 + t(\mu' + \mu'') + u\mu'\mu''.$$

Die zur Abkürzung eingeführten Größen μ haben die Bedeutung

$$(7) \qquad \mu' = \frac{m_1}{aS} \quad \text{und} \quad \mu'' = \frac{m_2}{aS}.$$

worin $\underbrace{m_1}$ und $\underbrace{m_2}$ die Spannziffern für das linke und das rechte Ende des Feldes.

[3] Die Gleichungen (5) sind in den Sitzungsberichten zuerst auf S. 285 von 1924 und später in allgemeinerer Form auf S. 13 von 1926 abgeleitet. Sonderdrucke: »Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung« und »Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung«.



Ferner ist

$$(8)\qquad t = 1 - \alpha : \operatorname{tang} \alpha ; \quad s = \alpha : \sin \alpha - 1 ; \quad u = t^2 - s^2 .$$

Der Hilfswinkel α ist bestimmt durch

$$(9)\qquad \alpha = \pi \sqrt{S : K},$$

also durch das Verhältnis der vorhandenen Stabkraft S zur Eulerlast K des Feldes[4].

Damit nun die Neigungen ν_1 und ν_2 der Enden 1 und 2 des eingespannten Feldes unbestimmt werden, müssen nach (5) die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$(1 + t\mu'')\nu_{01} + s\mu''\nu_{02} = 0 ;$$

$$(1 + t\mu')\nu_{02} + s\mu'\nu_{01} = 0 ;$$

$$N = 0 .$$

Da ν_{01} und ν_{02} frei sind von μ' und μ'', so können die beiden ersten Gleichungen nur dann für alle möglichen Werte von μ' und μ'' erfüllt sein, wenn

$$(10)\qquad \underline{\nu_{01} = 0} \quad \text{und} \quad \underline{\nu_{02} = 0},$$

d. h. wenn das Feld so gekrümmt und belastet ist, daß bei fehlender Einspannung keine Verdrehung der Stabenden eintritt.

Die dritte Gleichung aber, also

$$(11)\qquad \underline{N = 1 + t(\mu' + \mu'') + u\mu'\mu'' = 0}$$

stellt die bekannte Knickbedingung für den geraden achsrecht belasteten Stab dar, dessen Enden mit m_1 und m_2 elastisch eingespannt sind. Sie liefert bei gegebenem m_1, m_2 und S nach (7), (8) und (9) den Wert von $S : K$, also auch $K = (\pi : a)^2 EJ$ und damit das erforderliche Trägheitsmoment J des Stabquerschnittes. Setzt man die aus (11) berechneten Werte $S : K$ und K in die Gleichungen (10) ein, so bilden sie eine Beziehung zwischen den Größen p. Q, $f_1 + f_2$ und y_0, aus denen man eine von ihnen berechnen kann, wenn die übrigen bekannt sind. In diesem Sinne stellen also (10) und (11) zusammen die Knickbedingung für einen Stab dar, der mit den aufgezählten Fehlern behaftet und an beiden Enden in gegebener Weise elastisch eingespannt ist. Es bleiben nur noch die Funktionen ν_{01} und ν_{02} näher anzugeben.

Die hierzu erforderlichen Gleichungen sind der ersten der in Anmerkung 1 genannten Untersuchungen zu entnehmen. Sie lassen sich auf die nachstehenden Formen bringen, in denen zugleich angedeutet ist, aus welchem Einfluß jedes Glied entspringt:

---

[4] Eine umfangreiche Zahlentafel der Größen s, t, u findet sich in der Schrift: »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« (Berlin 1925, Wilhelm Ernst & Sohn).

Einflüsse:

$$(12)\quad v_{01} = \frac{pa}{2S}\left[\frac{\operatorname{tang}\alpha/2}{\alpha/2} - 1\right] \ldots\ldots \text{Verteilte Last}$$
$$+ \frac{Q}{2S}\left[\frac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right] \ldots\ldots \text{Einzellast}$$
$$+ \left[t\frac{f_1}{a} + s\frac{f_2}{a}\right] \ldots\ldots \text{Fehlerhebel}$$
$$- \left[t\phi_1 + s\phi_2\right] + v_\mathrm{I} \ldots \text{Krümmung.}$$

$$(13)\quad v_{02} = -\frac{pa}{2S}\left[\frac{\operatorname{tang}\alpha/2}{\alpha/2} - 1\right] \ldots\ldots \text{Verteilte Last}$$
$$- \frac{Q}{2S}\left[\frac{1}{\cos\alpha/2} - 1\right] \ldots\ldots \text{Einzellast}$$
$$- \left[s\frac{f_1}{a} + t\frac{f_2}{a}\right] \ldots\ldots \text{Fehlerhebel}$$
$$+ \left[s\phi_1 + t\phi_2\right] + v_\mathrm{II} \ldots \text{Krümmung.}$$

Die hierin zur Abkürzung eingeführten Größen ϕ_1, ϕ_2, v_I, v_II sind bestimmt durch die Gleichungen[5]

$$(14)\quad \phi_1 = \frac{y_0}{a}\,\frac{\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} - \frac{n}{2}\right)}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}; \quad \phi_2 = \frac{y_0}{a}\,\frac{\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{n}{2}\right)}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}};$$

$$(15)\quad \left\{\begin{matrix} v_\mathrm{I} \\ v_\mathrm{II} \end{matrix}\right\} = \frac{y_0}{a}\,\frac{\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\left[2\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{n}{2} - \pi n \sin\pi\left(\frac{x_m}{l} \mp \frac{n}{2}\right)\right].$$

Damit ist alles gegeben, was man braucht, um die Gleichungen (10) in der vorher angedeuteten Weise ausnützen zu können. Die Rechnung läßt sich am bequemsten weiterführen, wenn man statt der v_{01} und v_{02} ihre Summen und Unterschiede gleich Null setzt. Für die ersteren ergibt sich

$$(16)\quad (t-s)\left[\frac{f_1 - f_2}{a} - (\phi_1 - \phi_2)\right] + v_\mathrm{I} + v_\mathrm{II} = 0.$$

Hier tritt der Unterschied der Fehlerhebel hervor, der natürlich unabhängig sein muß von den symmetrisch zur Feldmitte wirkenden Lasten p und Q.

---

[5] Die Gleichungen sind in der in Anmerkung 3 erwähnten Untersuchung von 1924 abgeleitet und finden sich dort auf S. 279 unter (5) und (6). In ihnen kommt die Art der Anfangskrümmung der Stabachse zum Ausdruck.

Für die Unterschiede der v ergibt sich

$$(17)\qquad \frac{pa}{S}\left[\frac{\operatorname{tang}\alpha/2}{\alpha/2}-1\right]+\frac{Q}{S}\left[\frac{1}{\cos\alpha/2}-1\right]$$
$$+(t+s)\left[\frac{f_1+f_2}{2a}-(\phi_1+\phi_2)\right]+v_{\rm I}-v_{\rm II}=0\,.$$

Nach (14) und (15) sind die hierin auftretenden Werte

$$(18)\qquad \phi_1-\phi_2=2\,\frac{y_0}{a}\,\frac{\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{n}{2}}{1-\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\,;\qquad \phi_1+\phi_2=2\,\frac{y_0}{a}\,\frac{\cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{n}{2}}{1-\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\,;$$

$$(19)\qquad \begin{cases} v_{\rm I}+v_{\rm II}=2\,\dfrac{y_0}{a}\,\dfrac{\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}{1-\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\left[\sin\pi\dfrac{x_m}{l}\left(2\sin\pi\dfrac{n}{2}-\pi n\cos\pi\dfrac{n}{2}\right)\right]; \\[2ex] v_{\rm I}-v_{\rm II}=2\,\dfrac{y_0}{a}\,\dfrac{\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}{1-\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\cdot\cos\pi\dfrac{x_m}{l}\cdot\sin\pi\dfrac{n}{2}\cdot\pi n\,. \end{cases}$$

Hier zeigt sich nun die unerwartete Erscheinung, daß wir statt der einheitlichen Knickbedingung des nicht eingespannten Stabes zwei solche erhalten haben. Um uns von der Richtigkeit dieses Ergebnisses zu überzeugen, stellen wir die folgende Überlegung an. Es leuchtet ein, daß sich das Feld bei stetig abnehmender Größe der Spannziffern m_1 und m_2 immer mehr dem Zustande eines nicht eingespannten Stabes nähern und diesen schließlich erreichen muß, wenn die Spannziffern Null geworden sind. Läßt man die Gleichungen (16) und (17) den Übergang mitmachen, so müssen sie sich — wenn sie richtig sind — in die schon bekannten Knickbedingungen für den nicht eingespannten Stab verwandeln. Die in ihnen auftretende, für den Übergang maßgebende Größe ist $S:K$. Wenn die Einspannung verschwunden ist, muß $S:K=1$ sein. Wir gehen von einem nahe bei 1 liegenden Werte von $S:K$ aus und setzen

$$(20)\qquad \sqrt{S:K}=1-v\,,$$

wo v eine sich der Null nähernde Größe bedeutet. Dann ist

$$(21)\qquad \begin{cases} S:K=1-2v\,;\quad t+s=(2:v)-2\,;\quad t-s=2\,; \\ \alpha/2=\pi/2\sqrt{S:K}=(1-v)\pi/2\,;\quad \cos\alpha/2=\pi v/2\,;\quad \sin\alpha/2=1\,. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, so ergibt sich nach Teilen mit $t+s$ und Übergang zur Grenze $v=0$

$$(22)\qquad \frac{1}{\pi^2}\frac{pa}{K}+\frac{1}{\pi}\frac{Q}{2K}+\frac{f_1+f_2}{2a}-\frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}\,\frac{n^2}{n^2-1}\cos n\pi/2=0\,.$$

Multipliziert man mit $2:\pi$, so erscheint Gleichung (3). Damit ist bewiesen, daß (17) beim Übergang von S zu K tatsächlich in die Knickbedingung für den nicht eingespannten Stab übergeht. Eine zweite Bedingung gibt es bei diesem nicht. Denn die Gleichungen

$$\nu_{01} = \frac{0}{0} \quad \text{und} \quad \nu_{02} = \frac{0}{0}$$

liefern jede für sich nur ein und dieselbe Knickbedingung. Das erklärt sich dadurch, daß die Gleichungen nicht voneinander unabhängig sind. Wenn eine von ihnen erfüllt wird, ist die andere die notwendige Folge, weil nicht die Verdrehung eines Stabendes bestimmt sein kann, wenn die des anderen unbestimmt ist.

Die Gleichung (16) lehrt, daß sich die Sache beim eingespannten Feld wesentlich anders verhält. Hier sind die Gleichungen

$$\nu_{01} = 0 \quad \text{und} \quad \nu_{02} = 0$$

maßgebend, und die hängen nicht voneinander ab. Jetzt bildet (17) gewissermaßen die Hauptbedingung für das Knicken, was schon daraus hervorgeht, daß (16) die Größen p und Q nicht enthält, die doch offenbar die Knickfestigkeit des Feldes beeinflussen müssen; im übrigen bestätigt die Ableitung von (22) aus (17) diese Annahme. Daneben legt (16) die nur durch die Gestalt der Fehlerlinie bedingte, zur Erreichung der Knickgrenze freilich ebenfalls nötige Verschiedenheit der Hebel f_1 und f_2 fest. Für den geraden Stab ergibt sich daraus $f_1 = f_2$.

III. Anwendung auf den Stabzug.

Im vorigen Abschnitt sind die Einspannungen beider Enden eines Feldes als vorgeschrieben angenommen und ist die rechnerische Erreichung der Knickgrenze dadurch bewirkt, daß bei gegebener Stabkraft S der Wert von $S:K$ aus (11) bestimmt wurde. Bei einem Stabzug liegt der Fall anders. Hier kann bei vorgeschriebener Einspannung des einen Endes eines Feldes dessen $S:K$ (in gewissen Grenzen) beliebig angenommen und damit aus (11) diejenige Größe der Einspannung des anderen Endes berechnet werden, die das Feld an die Knickgrenze bringt. So ergibt z. B. die Auflösung von (11) nach μ'' die bekannte (in der Schrift »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« einem umfassenden Verfahren zugrunde gelegte) Gleichung

$$\mu'' = -\frac{1 + t\mu'}{t + u\mu'}.$$

Dadurch wird auch die Einspannung des folgenden Feldes bestimmt, das nun ebenso behandelt werden kann. Geht man so schrittweise weiter, dann tritt nur in einem Feld, dem Schlußfeld, das erste Verfahren in Kraft, indem die Gleichung (11) dazu dienen muß, aus den Einspannungen am vorletzten und letzten Knotenpunkt den der Knickgrenze entsprechenden Wert von $S:K$, also bei gegebener Stabkraft S den Wert von K zu berechnen, aus dem sich



dann das erforderliche Trägheitsmoment des Stabquerschnittes mit Hilfe der Gleichung

$$J = (a:\pi)^2 K:E$$

ergibt. Bis hierher ist das Verfahren ganz das gleiche, wie in der vorgenannten Schrift für den Stabzug mit geraden, achsrecht und nicht quer belasteten Feldern ausführlich beschrieben. Neu hinzu treten nur für jedes Feld zwei Gleichungen wie (16) und (17). Wenn diese erfüllt sind, verhält sich das Feld hinsichtlich der Knickgrenze so, als ob

$$p = Q = f_1 = f_2 = y_0 = 0\,,$$

d. h. als ob es fehlerfrei wäre. Sind drei von den fünf Fehlerarten — worunter p oder Q sein muß — bekannt, so läßt sich aus (16) und (17) der Wert der beiden anderen berechnen, der die Störungen der drei gegebenen gerade aufhebt.

Zusammenfassend kann man also sagen: Die Gleichung (11) bestimmt die Knickgrenze des elastisch eingespannten, geraden und achsrecht belasteten Feldes; die Gleichungen (16) und (17) bestimmen die Beziehungen, die zwischen den etwa vorhandenen Form- und Belastungsfehlern bestehen müssen, damit das Feld dieselbe Knickgrenze behält wie das ebenso eingespannte, aber fehlerfreie Feld.

Wie einzelne der in Rede stehenden Fehler nach einem Vorschlage von Professor KAYSER (Darmstadt) durch Belastungsversuche am Bauwerk ermittelt werden können, zeigt die in Anmerkung 3 erwähnte Untersuchung von 1926. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß sich auch die übrigen Fehler bei weiterer Ausbildung des Verfahrens so bestimmen lassen werden.

IV. Knickversuche.

Die eben erwähnten Versuche würden nur vorbereitender Art sein. Daneben dürfte es interessieren, hier einmal die bereits ausgeführten eigentlichen Knickversuche zu besprechen — nur im allgemeinen und so weit, wie die im Laufe der letzten Jahre in den Sitzungsberichten veröffentlichten theoretischen Untersuchungen damit zusammenhängen. Daß diese zum Teil durch die Ergebnisse der Knickversuche des Deutschen Eisenbauverbandes angeregt worden sind, ist schon an verschiedenen Stellen hervorgehoben, z. B. im Jahrgang 1923, Seite 197, 262 und 280, wo auch das Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem als ausführende Anstalt genannt ist. Es kann jetzt mitgeteilt werden, daß die theoretischen Ergebnisse auf die Versuchsführung zurückgewirkt haben. Der im genannten Jahrgang Seite 281—282 geäußerte Gedanke, daß man sich nicht mehr übermäßig mit der Herstellung möglichst gerader Stäbe zu bemühen und auch nicht auf die achsrechte Einführung der Kraft besondere Sorgfalt zu verwenden brauche, da man trotz solcher Fehler durch wiederholtes »Zurechtrücken« des Versuchsstabes in der Presse die EULERsche Knickgrenze erreichen könne, hat sich vollkommen bewährt. Der Vorschlag war allerdings nicht neu; denn ein ähnliches Verfahren ist schon 1908 von v. KARMAN bei seinen bekannten (auch von mir auf Seite 96 der Sitzungs-

berichte für 1922 rühmend erwähnten) Versuchen angewendet worden. Aber er bezweckte damit nur »die richtige Zentrierung« der Stäbe; daß auch Anfangskrümmungen dadurch ausgeglichen werden können, war wohl ihm so wenig bekannt wie uns anderen und kam für ihn auch nicht in Betracht, da die Stäbe auf der Hobelmaschine »recht genau« bearbeitet waren. Der eigentliche Urheber des wertvollen Gedankens: aus dem Verhalten des Stabes bei zunehmender Belastung darauf zu schließen, inwieweit seine richtige Einstellung in der Presse erreicht ist, und ihn danach nötigenfalls zurechtzurücken, ist übrigens v. Karmans Lehrer, der ausgezeichnete Göttinger Gelehrte und Forscher Ludwig Prandtl. Darauf hat v. Karman selber hingewiesen. Außerdem ergibt es sich aus Prandtls Doktorschrift vom Jahre 1899: »Kipperscheinungen« Seite 68. (Nürnberg, v. Ebnersche Buchhandlung[6].)

Gegen ein solches wiederholtes Zurechtrücken oder Einrichten, das man als zu »laboratoriumsmäßig« betrachtete, herrschten anfänglich in technischen Kreisen Bedenken. Eine Reihe von Vorversuchen herkömmlicher Art lehrte aber, daß wenig Aussicht bestand, ohne feinere Hilfsmittel weiterzukommen. Auch fiel die Erwägung ins Gewicht, daß eben nicht nur die Fehler der »Zentrierung«, sondern — wie die Theorie bewiesen hatte — auch die Ungenauigkeiten der Anfangsform der Stäbe durch das Einrichten ausgeglichen werden können. Man hat sich daher entschlossen, in Dahlem zu diesem Verfahren überzugehen und hat es dann nach günstigem Ausfall einiger Vorversuche in mustergültiger Weise ausgebildet. Dabei leistete die schon auf S. 280 der Sitzungsberichte für 1923 erwähnte, inzwischen noch vervollkommnete Schneidenlagerung vorzügliche Dienste. Wesentlich ist bei diesen Versuchen, daß die Ausbiegungen der Stäbe nicht nur in der Mitte und in den Viertelpunkten ihrer Länge, sondern auch an den Enden sehr genau gemessen werden (auf 0.01 mm mit Schätzung von 0.001 mm). Denn die Voraussetzung, daß die Enden der Stäbe keine Seitenbewegungen ausführen, ist nie erfüllt. Außerdem dienen die an den Enden angebrachten Meßvorrichtungen dazu, die Verschiebungen zum Zweck des Einrichtens zu messen. Da sich aus den vorher gemessenen Ausbiegungen der Viertelpunkte für jedes Stabende berechnen läßt, um wieviel es zur Ausgleichung des Einflusses der Stabkrümmung verschoben werden muß, so dient die genau abgemessene Verstellung der Stabenden gegen die Lagerschneiden zur Vermeidung planlosen Probierens und zur Zeitersparnis. Ferner werden die Stäbe jetzt verwendet, wie sie aus dem Walzwerk kommen; nur die Endflächen müssen natürlich sauber bearbeitet werden. Die Lager sind so gebaut, daß die Endflächen in die Richtung der Schneiden fallen, daß also die Stablänge auch die Knicklänge ist. Die bei allen anderen Lagerarten erforderlichen störenden Schuhe sind daher entbehrlich.

Mit dieser Einrichtung ist eine große Zahl von Versuchen an Stäben mit rechteckigem Querschnitt ausgeführt worden, über die im »Bauingenieur«, dem Verkündigungsblatt des Deutschen Eisenbauverbandes fortlaufend

[6] Dort findet sich auf Seite 70 auch schon ein Bild der nach der genauen Theorie bei Überschreitung der Eulerschen Knickgrenze eintretenden Ausbiegungen. Das auf Seite 407 der Sitzungsberichte für 1925 gebrachte Bild stimmt damit überein, war also nicht neu.



und eingehend berichtet wird. Es genügt hier die Angabe, daß alle Schlüsse, zu denen die Theorie in versuchstechnischer Hinsicht führt, sich dabei bewährt haben. Es ist sogar mit Ausschußstäben, die Krümmungspfeile bis zu 5 mm auf ein Meter Länge besaßen, anstandslos und rasch die Eulersche Knickgrenze erreicht worden. Und nach den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung wird das auch bei Stäben mit Querbelastung so sein, da man es in der Hand hat, die Hebel f_1 und f_2 durch Verschiebung der Stabenden gegen die Schneiden so abzustimmen, daß die Gleichungen (1) oder (3) erfüllt werden.

Neben den vorhergenannten Körperschaften, zu denen auch die Reichsbahngesellschaft gehört, darf ich die Männer nicht mit Stillschweigen übergehen, die in deren Auftrag die Versuche vorbereitet und ausgeführt haben. Es sind das die HH. Reichsbahndirektor Geheimrat Dr. SCHAPER; Diplomingenieur REIN, gegenwärtig Leiter der technischen Abteilung des Eisenbauverbandes; Prof. PANZERBIETER und die Diplomingenieure BIERETT und BÖTTGER, letztere drei der Abteilung des Direktors Prof. Dr. MEMMLER im Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem angehörig. Es liegt in der Natur der Sache, daß ein Verein wie der Deutsche Eisenbauverband bei seinen Veranstaltungen in erster Linie nach wirtschaftlich nutzbar zu machenden Ergebnissen trachten muß. Wenn der Verband sich trotzdem entschlossen hat, solche Versuche auszuführen, wie sie im vorstehenden kurz geschildert sind, obgleich sie mehr auf wissenschaftliche Vertiefung unserer Kenntnisse als auf einen unmittelbaren Nutzen abzielen, so verdient er sowohl wie auch der von ihm eingesetzte, aus hervorragenden Ingenieuren bestehende Versuchsausschuß hohe Anerkennung. Ein erheblicher Teil davon kommt Hrn. REIN zu, der diese Versuche (neben vielen anderen) mit vollem Verständnis und großer Ausdauer auch durch trübe Zeiten hindurch gefördert hat. Ausführende in engerem Sinne sind die HH. PANZERBIETER als Leiter, BIERETT und BÖTTGER als Beobachter. Die Gewissenhaftigkeit, Sorgfalt und Geschicklichkeit dieser Herren war Voraussetzung für das Gelingen der schwierigen Versuche.

Alle die Genannten haben Anteil an den Fortschritten in der Erkenntnis der Natur des Knickvorganges. Es schien mir Pflicht, das auch an dieser Stelle zu bekunden. Damit sollen die Leistungen der beiden anderen für den Eisenbauverband tätigen Materialprüfungsämter (Dresden und Stuttgart) nicht etwa herabgesetzt werden. Sie sind nur anderer Art und mir weniger genau bekannt.

Bei dieser Gelegenheit mag ein Irrtum verbessert werden, der sich auf S. 496 der Sitzungsberichte für 1925 findet. Es ist dort hervorgehoben, daß das Verhältnis der Ausbiegung δ zur Stablänge a nach der genauen Theorie des Knickens nur vom Verhältnis der Stabkraft S zur EULERschen Knicklast K abhängt, und es ist dabei die Vermutung geäußert, daß dies bisher nicht bekannt sei. Inzwischen wurde mir aber mitgeteilt, daß Prof. DOMKE (Aachen) den Satz schon vor längerer Zeit in einem Vortrage ausgesprochen hat.

Ausgegeben am 6. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 22. April.

Vorsitzender Sekretar i. V.: Hr. Hellmann.

Hr. Bodenstein sprach über Reaktionsgeschwindigkeit bei solchen chemischen Vorgängen, an denen Atome beteiligt sind.

Aus einigen Untersuchungen von Gasumsetzungen, die sich sowohl im Dunkeln wie im Licht vollziehen, ließ sich ableiten, daß sowohl Umsetzungen zwischen zwei Atomen wie solche zwischen einem Atom und einer Molekel praktisch bei jedem Zusammenstoß stattfinden, im Gegensatz zu den Umsetzungen der Molekeln, wo immer nur wenige bevorzugte Stöße zum Erfolg führen.

Reaktionsgeschwindigkeit bei Umsetzungen von Atomen.

Von Max Bodenstein.

Bei jeder bimolekularen Reaktion, die sich zwischen Molekeln vollzieht, führt nur ein kleiner Bruchteil aller Zusammenstöße der Partner zum Umsatz: nur solche Molekeln, deren Energieinhalt den mittleren um einen meist erheblichen Betrag (die Aktivierungswärme) überragt, setzen sich um, die übrigen fahren nach dem Zusammenstoß unverändert auseinander. Das ist durchaus verständlich; die Energie, welche die Atome der Molekeln zusammenhält, muß erst überwunden werden, ehe diese Atome in die neue Anordnung übergehen können, die sie in der Molekel oder in den Molekeln des Reaktionsprodukts besitzen.

Anders liegt der Fall, wenn die reagierenden Stoffe aus Atomen bestehen, oder auch nur einer derselben. Hier hat Herzfeld[1] vor einigen Jahren die Vermutung aufgestellt — und an einem Beispiel zu begründen versucht —, daß Reaktion bei jedem Zusammenstoße erfolgt, vorausgesetzt natürlich, daß die Umsetzung überhaupt mit Energieentwickelung, exotherm, verläuft. Er hat allerdings hierbei gleich die Einschränkung gemacht, daß: »ein jeder Zusammenstoß bedeutet, daß der Bruchteil temperaturunabhängig ist, doch kann er durch den sterischen Faktor < 1 werden«. Das heißt, um es an einer der in Herzfelds Beispiel vorkommenden Reaktionen anschaulich zu erläutern, daß bei dem Vorgang $H + HBr = H_2 + Br$ die Umsetzung nur dann erfolgen kann, wenn das H-Atom auf der H-Seite die HBr-Molekel trifft, und nicht, wenn es auf die Br-Seite stößt.

Aber gegen diese einfache Vorstellung sind inzwischen Bedenken aufgetaucht[2]. Die betreffen nicht die Reaktion des letztgenannten Typs, wohl aber solche, bei denen sich zwei Atome zu einer Molekel vereinigen, etwa

$$Br + Br = Br_2 .$$

Hier enthält das entstehende Gebilde die gesamte bei der Umsetzung freigewordene Energie; um eine normale Brommolekel zu sein, muß sie aber eine solche von mäßigem und, von der Flugenergie abgesehen, quantierten Betrage enthalten. Um das zu arrangieren, ist daher noch ein Zusammenstoß mit irgendeiner anderen Molekel oder mit der Gefäßwand nötig; ohne den müßten die beiden Atome sich wieder trennen. Es wird daher von der

---

[1] Herzfeld, Ann. Phys. (IV) **59**, 635 (1919).

[2] Vgl. die zusammenfassenden Vorträge vor der Deutschen Bunsengesellschaft, Darmstadt 1925, Zeitschr. f. Elektrochemie **31**, 343 (1925).

Zeit zwischen dem Zusammenstoß $Br + Br$ und dem nächsten mit irgendeiner anderen Molekel abhängen, ob die eine oder die andere Alternative eintritt. Nach den noch recht bescheidenen Kenntnissen, die wir über die Lebensdauer solcher Zwischenzustände haben, genügt eine Gaskonzentration von etwa 1 mm Druck bei Zimmertemperatur, um dieses Energie-Arrangement zu ermöglichen. so daß erst unterhalb dieser — oder ähnlicher — Drucke dies Bedenken aktuell werden kann.

Die Reaktionen des Typs $H + HBr = H_2 + Br$ werden natürlich von ihm überhaupt nicht getroffen: Das Auseinanderfahren der neugebildeten Molekeln kann jede beliebige Energie aufnehmen. Aber es wäre hier auch durchaus möglich, daß eine für die Lockerung der Bindungen innerhalb der HBr-Molekel zu verwendende Aktivierungswärme nötig wäre. Denn die Vermutung Herzfelds, daß sich solche Reaktionen »bei jedem Stoß« vollziehen, ist natürlich nicht mehr als eine solche und wird zudem von ihm selbst nicht mehr aufrechterhalten[1]. Ich will weiter unten zeigen, daß sie, wenigstens für das vorliegende Beispiel mit großer Wahrscheinlichkeit, und in einem ähnlichen Falle ($Cl + Cl_2 = Cl_3$) sicherlich berechtigt ist.

Während wir nun über die Umsetzungen zwischen je zwei Molekeln ein erhebliches. wenn auch noch keineswegs großes experimentelles Material besitzen, so sind Untersuchungen über Atomreaktionen bisher sehr selten ausgeführt worden. Sehr natürlich, denn Stoffe, deren Molekeln aus Einzelatomen bestehen, sind unter normalen Verhältnissen nur ganz wenige bekannt: die Edelgase, die für chemische Umsetzungen nicht in Betracht kommen. und eine Reihe von Metalldämpfen, die bisher in diesem Sinne noch nicht untersucht worden sind[2]. Der einzige Fall, in welchem Atome eines reaktionsfähigen Gases systematisch erzeugt und in ihren Umsetzungen untersucht worden sind, ist der des Wasserstoffs. Hier kann man durch elektrische Entladungen das unter geringem Druck stehende Gas weitgehend in seine Atome spalten, und wenn man es dann schnell aus der Bahn der Entladung auspumpt, so kann man die Umsetzungen seiner Atome, sei es miteinander, sei es mit beigefügten Fremdgasen, untersuchen. Solche Versuche sind insbesondere von Bonhoeffer[3] in erheblichem Umfange ausgeführt worden. Es geht aus ihnen hervor, daß, bei den hier stets verwendeten geringen Drucken, die Reaktion $H + H = H_2$ sich nur träge vollzieht, also nur bei ganz wenigen Stößen statthat, daß aber solche wie $H + Br_2 = HBr + Br$ sich schnell abspielen — durchaus in Übereinstimmung mit dem oben Dargelegten.

Aber diese Ergebnisse sind hier doch mehr qualitativer Art, ist es ja nicht einmal über jeden Zweifel sicher, daß der aktive Wasserstoff aus Atomen und nicht aus Molekeln H_3 besteht. So ist es bisher nur dann möglich gewesen, Reaktionen von Atomen in ihrer Geschwindigkeit zahlenmäßig zu messen, wenn diese Atome durch irgendwelche gleichzeitig stattfindende

---

[1] Zeitschr. f. Elektrochemie **31**, 358 (1925).

[2] Abgesehen von einer äußerst vielversprechenden Untersuchung von Polanyi und Beutler, von der jedoch bisher nur ein ganz kurzer Bericht erschienen ist, Naturwissenschaften 1925, 711.

[3] Bonhoeffer, Zeitschr. f. physik. Chem. **116**, 394 (1925). Boehm u. Bonhoeffer, ebenda **119**, 400 (1926).

Umsetzungen aus Molekeln gebildet werden. Dabei sind dann die Vorgänge, welche die Atome verbrauchen, viel geschwinder als die, welche sie entstehen lassen. Man kann daher ihre Konzentration nur aus dem genauen Studium der Gesamtreaktion erschließen, nicht durch irgendwelche unabhängigen Methoden ermitteln, und so haftet den Ergebnissen aller derartiger Untersuchungen etwas Hypothetisches an. Aber dadurch, daß es in einigen Fällen möglich geworden ist, die Ergebnisse mehrerer zu verknüpfen, ist diese Unsicherheit doch allmählich sehr gering geworden.

Von diesen Untersuchungen betrifft eine die Bildung der Brommolekel aus den Atomen: $Br + Br = Br_2$. Zu einer Messung ihrer Geschwindigkeit sind wir[1] auf folgendem Wege gelangt.

Die Bildung des Bromwasserstoffs aus seinen Elementen, in summa die Reaktion $H_2 + Br_2 = 2\,HBr$ vollzieht sich, wie man aus der Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Konzentration der Reaktionsteilnehmer ableiten kann, in folgenden Stufen:

1.	$Br_2 = 2\,Br$	Konstante k_1
2.	$Br + H_2 = HBr + H$	Konstante k_2
3.	$H + Br_2 = HBr + Br$	Konstante k_3
4.	$H + HBr = H_2 + Br$	Konstante k_4
6.	$Br + Br = Br_2$	Konstante k_6

Das führt zu einer Gleichung für die Geschwindigkeit der Bromwasserstoffbildung

$$+\frac{d[HBr]}{dt} = \frac{2\,k_2\,[H_2]\sqrt{\dfrac{k_1\,[Br_2]}{k_6}}}{1 + \dfrac{k_4\,[HBr]}{k_3\,[Br_2]}}.$$

In dieser Gleichung ist k_2 die Konstante der Reaktion

$$H_2 + Br = HBr + H.$$

Sie ist stark temperaturabhängig; nur der Bruchteil $e^{-\frac{17640}{RT}}$ aller Stöße führt zum Umsatz. Das ist bei 300° C z. B. 10^{-13}, also ein sehr geringer Bruchteil, genau wie bei einer Umsetzung zwischen Molekeln, obschon an der Reaktion neben der Molekel H_2 das Atom Br beteiligt ist. Der Grund ist der, daß die Reaktion stark endotherm ist. Über die Konstanten k_4 und k_3 will ich weiter unten noch etwas sagen; was hier zunächst interessiert, ist k_6, die Konstante der Reaktion $Br + Br = Br_2$.

Zu ihrer Ermittelung führte die Tatsache, daß die Umsetzung auch im Licht statthat, und zwar bei kräftiger Belichtung erheblich geschwinder als im Dunkeln. Die Geschwindigkeitsgleichung wird dabei

[1] Bodenstein u. Lütkemeyer, Zeitschr. f. physik. Chem. **114**, 208 (1925).

$$+\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = \frac{2\,k_2\cdot[\mathrm{H_2}]\cdot\sqrt{\frac{\text{Zahl der absorbierten Quanten}}{\text{Zeit}\cdot k_6}}}{1+\frac{k_4\,[\mathrm{HBr}]}{k_3\,[\mathrm{Br_2}]}},$$

d. h. also, an Stelle von $k_1\,Br_2$ ist getreten $\frac{\text{Zahl der absorbierten Quanten}}{\text{Zeit}}$.

An Stelle der ersten Stufe der Reaktion

$$1)\quad Br_2 + 2\,Br$$

ist zu setzen

$$1)\quad Br_2 + h\nu = 2\,Br\,.$$

An Stelle des freiwilligen Zerfalls der Brommolekel in Atome tritt, diesen weit überragend, der gleiche, aber durch Lichtabsorption hervorgerufene Vorgang, von dem wir mit einer praktisch vollkommenen Sicherheit sagen können, daß für ein absorbiertes Quant eine Molekel Brom gespalten, also zwei Bromatome gebildet werden.

Wir erhalten damit

$$+\left(\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt}\right)_{\text{Licht}} : +\left(\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt}\right)_{\text{dunkel}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{Zahl der absorbierten Quanten}}{\text{Sekunde}\cdot k_6}}}{\sqrt{\frac{k_1\,[\mathrm{Br_2}]}{k_6}}}.$$

Die beiden Differentialquotienten gibt uns unsere Messung, oder richtiger den ersten die Messung der Umsetzung im Licht, den zweiten eine geringe Extrapolation aus den bei wenig höheren Temperaturen ausgefürten Messungen der Dunkelgeschwindigkeit. Im Nenner der rechten Seite ist k_1/k_6 die Gleichgewichtskonstante der Bromdissoziation, die gut bekannt ist[1], $[Br_2]$ natürlich die Konzentration des Broms bei der gearbeitet wird. Im Zähler ist dann die Zahl der je Sekunde absorbierten Quanten relativ leicht festzustellen, und so bleibt als Unbekannte nur k_6, eben die Konstante der Bildung der Brommolekel aus ihren Atomen.

Ihr Wert wurde für die Temperaturen 491, 467, 456, 447, 433° abs. ermittelt, und zwar ergab er sich, unabhängig von der Temperatur, zu $^1/_{800}$ der Stoßzahl. Von allen Stößen zwischen Br + Br ist daher der Bruchteil $^1/_{800}$, 1.25 ‰, erfolgreich. Die Genauigkeit dieser Zahl ist freilich gering, es ist ganz wohl möglich, daß sie $^1/_4$ oder das Vierfache der angegebenen ist.

Nach den oben dargelegten Erwartungen sollte er eins sein, oder nahe gleich eins, nur dadurch hinter eins zurückbleibend, daß die einander stoßenden Bromatome einander empfindliche Bezirke zuwenden müssen, um sich vereinigen zu können. Ob die immerhin bescheidene Größe $^1/_{800}$ mit dieser Forderung verträglich ist, darüber zu diskutieren erscheint angesichts unserer

[1] BODENSTEIN u. CRAMER, Zeitschr. f. Elektrochemie **22**, 327 (1916).

Unkenntnis des intimsten Mechanismus der Molekelbildung unangebracht; man wird eher erwarten dürfen, aus der Tatsache dieser bescheidenen und temperaturunabhängigen Stoßausbeute später auf diesen Mechanismus Schlüsse ziehen zu können.

Ich hatte gehofft, diese Beobachtung auf einem ganz unabhängigen Wege bestätigen zu können. Die Bromwasserstoffbildung wird nicht nur durch Bromwasserstoff gehemmt, wie das in dem benutzten Schema zum Ausdruck kommt, sondern auch durch Jod. Dafür lag die Deutung nahe, daß neben die Umsetzungen 3 und 4 noch eine fünfte tritt:

$$5: H + J_2 = HJ + J.$$

Diese Reaktion setzt an Stelle des nach 2 verbrauchten, aber nach 3 oder 4 bei Abwesenheit von Jod stets sofort regenerierten Bromatoms ein solches von Jod. Dies ist viel edler als jenes, es ist nicht imstande, analog 2 mit H_2 zu reagieren, und wenn nun 1. der Zerfall der Brommolekel, nicht unendlich schnell die verbrauchten Bromatome nachliefert, so mußte die Umsetzung durch 5 gehemmt werden. Eine messende Verfolgung dieser Hemmung sollte also die Kenntnis der Zerfallsgeschwindigkeit der Brommolekel geben, und damit über den Zusammenhang durch die Gleichgewichtskonstante, eine unabhängige Bestimmung der Geschwindigkeit der Vereinigung der Bromatome.

Leider aber hat eine Untersuchung, welche Hr. Dipl.-Ing. Müller-Rathenow in meinem Institut ausgeführt hat, gezeigt, daß die Jodhemmung auf einen ganz anderen Grund zurückzuführen ist; es bildet sich nach $J_2 + Br_2 = 2\,JBr$ Bromjod, und dadurch vermindert das Jod die Konzentration der Bromatome.

So ist diese unabhängige Bestätigung jener Messungen nicht ausführbar. Wir haben sie aber in einer anderen Richtung variiert, in der nach kleinen Drucken. Wenn, wie oben ausgeführt, das Kombinationsprodukt von $Br + Br$ zur stabilen Brommelekel werden soll, so muß es innerhalb mäßiger Zeit nach dem Stoß seinen Energieüberschuß durch einen weiteren Stoß abgeben. Bei kleinen Gasdrucken, wo die Zeit bis zu diesem nächsten Stoß größer wird, kann also ein Gebiet erreicht werden, bei dem ein geringerer Bruchteil der Stöße $Br + Br$ erfolgreich ist, bei dem also k_6 sinkt. Bis herunter zu einem Gasdruck von 100 mm war von solchem Sinken nichts zu bemerken. Dann aber setzte es ein. Ein Gemenge von 27 mm H_2 mit 16 mm Br_2 lieferte für k_6 einen um 40 Prozent verkleinerten Wert, der, wie das bei dieser Auffassung der Verhältnisse zu erwarten war, durch Zusatz des an sich indifferenten Stickstoffs wieder auf den Normalwert gehoben wurde.

Der Gasdruck von 43 mm, bei dem dieses Zurückbleiben von k_6 beobachtet wurde, ist überraschend hoch, aber die Beobachtung selbst ist einwandfrei. Hr. Dr. Jung, der diese Beobachtungen gemacht hat, ist damit beschäftigt, die Versuche zu niedreren Drucken auszudehnen, und wir dürfen wohl hoffen, hier für die Atomreaktionen wichtige Aufschlüsse zu gewinnen.

Es mag erwähnt werden, daß eine Voraussetzung dieser ganzen Betrachtungsweise natürlich die ist, daß jedes Quant absorbierten Lichts eine Molekel Br_2 spaltet. Diese Voraussetzung können wir hier nicht direkt prüfen. Bei der Photolyse von Bromwasserstoff und Jodwasserstoff hat es sich ex-

perimentell in weitem Umfange gezeigt, daß jedes Quant eine Molekel in Atome spaltet. So darf man das auch hier annehmen. Und wenn etwa bei sehr kleinen Drucken die Lichtausbeute abnehmen sollte (aus ähnlichen Gründen wie die Ausbeute der Stöße Br + Br), so müßte das in unserem Versuch das k_6 scheinbar steigern, also den entgegengesetzten Effekt geben wie den, dessen erste Anzeichen wir beobachtet haben.

Die Bromwasserstoffbildung erlaubt nun aber auch Schlüsse auf die Stoßausbeute bei den Reaktionen zu ziehen, bei denen ein Atom mit einer Molekel reagiert. Im Nenner der Geschwindigkeitsgleichung steht der Addend

$$\frac{k_4\,[HBr]}{k_3\,[Br_2]}\,.$$

Den Wert für k_4/k_3 konnten wir nur durch Probieren finden: er ergab sich zu etwa $^1/_{10}$ in den ältesten Messungen der Dunkelreaktion, und mit demselben Wert ließen sich die Versuche im Licht berechnen. Aber dieser Addend $\frac{k_4\,[HBr]}{k_3\,[Br_2]}$ ist, solange [HBr] nicht groß ist, eine bescheidene Korrekturgröße. Die Versuche werden daher auch mit Werten für k_4/k_3 befriedigt, die nicht allzu weit von $^1/_{10}$ abliegen; vor allem geben die bisherigen Messungen keinen bestimmten Beweis dafür, daß k_4/k_3 wirklich, wie es scheint, unabhängig ist von der Temperatur.

Um diese Frage zu entscheiden, haben wir Versuche gemacht, bei denen alles übrige gleich war, aber bei einem Teile erhebliche Konzentrationen von Bromwasserstoff anfänglich zugesetzt wurden, bei einem anderen Teil nicht. Solche Versuche dienten immer paarweise zur Bestimmung von k_4/k_3, und zwar einmal bei 302° im Dunkeln, das andere Mal bei Zimmertemperatur im Sonnenlicht. Dabei geben beide Versuchsreihen innerhalb der Versuchsfehler den gleichen Wert (1 : 8.4). Das heißt also: das Verhältnis der zwei Geschwindigkeitskonstanten ist in sehr weiten Grenzen unabhängig von der Temperatur. Das kann natürlich dadurch zustande kommen, daß sich beide mit der Temperatur ändern, aber in gleicher Weise. Das würde bedeuten, daß die Aktivierungswärmen der beiden Reaktionen

$$3)\ H + Br_2 = HBr + Br \quad \text{und} \quad 4)\ H + HBr = H_2 + Br$$

merklich groß wären, aber beide genau gleich. Das ist nicht unmöglich, aber sicherlich äußerst unwahrscheinlich. Viel eher ist damit zu rechnen, daß beide Aktivierungswärmen null sind, d. h. für den Bruchteil der erfolgreichen Stöße bei beiden Reaktionen wieder nur ein sterischer Faktor maßgebend ist, der dann wieder unabhängig von der Temperatur ist.

Eine Bestimmung der Dissoziationswärme des Wasserstoffs würde diesen Schluß zu vergewissern erlauben. 106 Cal müßte sie betragen, um mit ihm in Übereinstimmung zu sein. Die auf verschiedenen durchweg indirekten Wegen abgeleiteten Werte sind 60, 81, 84, 95, 95, 130 Cal, wobei die beiden extremsten Zahlen heute nicht mehr als berechtigt gelten können. Sie sind also kleiner, als mit dem Dargelegten verträglich wäre. Aber der Unterschied liegt doch wohl durchaus noch in möglichen Grenzen, jedenfalls ent-

halten alle jene Bestimmungen Unsicherheiten, die auch 106 Cal noch als möglich erscheinen lassen.

Die Annahme, daß Reaktionen zwischen einem Atom und einer Molekel bei jedem Stoß sich vollziehen, ist, wenn auch unausgesprochen, wohl zuerst von Nernst gemacht worden. Zur Deutung der Tatsache, daß beim Belichten von Chlor und Wasserstoff auf ein absorbiertes Quant unter geeigneten Umständen gegen eine Million Molekeln Chlorwasserstoff gebildet werden, hatte ich die Forderung aufgestellt, daß eine Reaktionskette statthat, bei der durch den ersten Reaktionsakt dauernd wieder neue reaktionsfähige Molekeln gebildet werden. Nernst hat für diese Kette das sehr anschauliche Schema vorgeschlagen:

$$Cl_2 + h\nu = 2\,Cl$$
$$Cl + H_2 = HCl + H$$
$$H + Cl_2 = HCl + Cl$$

und so fort, bis ein — hier nicht interessierender — Vorgang H oder Cl auf irgendeinem anderen Wege beseitigt.

Es ist über diese Chlorknallgasreaktion unendlich viel gearbeitet worden, und es wird noch heute sehr viel darüber gearbeitet. Das obige Schema ist noch nicht als völlig zutreffend erwiesen und noch nicht widerlegt, man kann also beim Chlorknallgas noch nicht sagen, ob sich die hier angenommenen Reaktionen bei jedem Zusammenstoß vollziehen.

Dagegen ist es uns gelungen, bei der ähnlichen Vereinigung von Chlor mit Kohlenoxyd die Verhältnisse so weit aufzuklären, daß man, wenigstens für ein gewisses Gebiet der Versuchsbedingungen, zahlenmäßig die einzelnen Teilvorgänge übersehen kann, und da auch hier mehrere Atomreaktionen auftreten, so liefern die hier gemachten Versuche allerlei Material zu unserer Frage.

Für die Bildung und Zersetzung des Kohlenoxydchlorids (Phosgens) im Dunkeln konnte ich mit Dr.-Ing. Plaut[1] zeigen, daß sie über Cl_3 verläuft. Die einzelnen Phasen der hier hauptsächlich interessierenden Bildung der Verbindung sind danach:

$$1.\quad Cl_2 = 2\,Cl$$
$$4.^{2}\quad Cl + Cl_2 = Cl_3$$
$$5.\quad Cl_3 + CO = COCl_2 + Cl$$
$$6.\quad Cl_3 = Cl_2 + Cl$$
$$7.\quad Cl + Cl = Cl_2\,.$$

Die Vorgänge 1 und 7 bzw. 4 und 6 stehen im Verhältnis inverser Reaktionen, deren Gleichgewichte ständig eingestellt sind. Für die Gesamtgeschwindigkeit bestimmend ist daher Vorgang 5, und von ihm ließ sich zeigen, daß er bei jedem Zusammenstoß der Teilnehmer statthat.

---

[1] Bodenstein und Plaut, Zeitschr. f. physik. Chem. **110**, 339 (1924).

[2] Das Fehlen der Nummern 2 und 3 wird weiter unten seine Erklärung finden.

Dieser Schluß konnte auf folgendem Wege gezogen werden. Wenn wir annehmen, daß er berechtigt ist, so rührt der Temperaturkoeffizient der Reaktionsgeschwindigkeit — abgesehen von der geringen Zunahme der Stoßzahl mit $\sqrt{T}$ — nur davon her, daß das Verhältnis, in welchem Cl_3 im Gleichgewicht mit Cl_2 steht, mit der Temperatur zunimmt. Der Temperaturkoeffizient der Geschwindigkeit liefert uns damit den dieses Gleichgewichts; aus diesem wieder folgt die Wärmetönung der Reaktion $3\,Cl_2 = 2\,Cl_3$ (zu —51 Cal). Aus dieser können wir weiter mittels des Nernstschen Wärmesatzes berechnen, wieviel Molekeln Cl_3 bei irgendeiner Konzentration von Cl_2 vorhanden sind, und daraus endlich, wieviel Stöße diese mit Kohlenoxydmolekeln gegebener Konzentration ausführen.

Eine solche Rechnung liefert für die bei einem beliebigen Versuch angewandten Konzentrationen als Zahl der Stöße je Sekunde und cc

$$36 \times 10^{14},$$

und die Zahl der unter den gleichen Bedingungen gebildeten Molekeln Phosgen war dabei

$$9 \times 10^{14},$$

mit der Stoßzahl so gut übereinstimmend, wie man nach den Unterlagen irgend erwarten kann[1].

Die Molekel Cl_3 benimmt sich also so, wie wir das nach den obigen Darlegungen für ein Atom erwarten zu dürfen glaubten. Das entspricht vollkommen ihrem gänzlich instabilen Charakter: sie ist praktisch nur mit größten Schwierigkeiten in winzigen Konzentrationen, wenn überhaupt, herstellbar.

Da aber immerhin diese Molekel Cl_3 kein Atom ist, so gehört diese Feststellung eigentlich nicht in den Rahmen dieser Abhandlung. Aber sie bildet die Grundlage für eine Deutung der photochemischen Phosgenbildung, bei der Atomreaktionen eine erhebliche Rolle spielen.

Für diese ist es nach Überwindung außerordentlich hartnäckiger Störungen, welche allen photochemischen Chlorreaktionen anzuhaften scheinen, gelungen, einen relativ einfachen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen absorbierter Strahlung, Konzentrationen der Reaktionsteilnehmer und umgesetzter Menge zu finden, von der Form:

$$+\frac{d[CO\,Cl_2]}{dt} = k \cdot \sqrt{J_{\text{absorbiert}}} \cdot [Cl_2] \cdot \sqrt{[CO]},$$

der allerdings nur in der Gegend der Zimmertemperatur die Verhältnisse beschreibt.

---

[1] Die Zersetzung des Phosgens vollzieht sich (bei höheren Temperaturen bequem meßbar) analog der Bildung durch Umkehrung des Vorgangs 5 nach $CO\,Cl_2 + Cl = CO + Cl_3$. Hier haben wir also wieder eine Umsetzung, an der ein Atom beteiligt ist. Aber sie ist stark endotherm, und dementsprechend ist nur ein kleiner, mit der Temperatur stark steigender Bruchteil der Stöße erfolgreich, völlig analog der obengenannten Reaktion $Br + H_2 = HBr + H$.

Diese sehr eigenartige Beziehung ergibt sich, wenn man in voller Analogie zu der Dunkelreaktion folgende Einzelvorgänge annimmt:

1. $Cl_2 + h\nu = Cl_2'$ [1]
2. $Cl_2' + CO = CO' + Cl_2$
3. $Cl_2' = 2\,Cl$
4. $Cl + Cl_2 = Cl_3$
5. $Cl_3 + CO = COCl_2 + Cl$
6. $Cl_3 = Cl_2 + Cl$
7. $Cl + Cl = Cl_2$.

Die Vorgänge 4 bis 7 sind die gleichen wie im Dunkeln. Aber Cl entsteht hier nicht durch den freiwilligen thermischen Zerfall von Cl_2, sondern durch eine Spaltung der durch Lichtabsorption angeregten Clormolekel[2]. Allerdings verfällt durchaus nicht jede der letzteren dieser Spaltung; vielmehr wird diesem Zerfall Konkurrenz gemacht durch den Vorgang 2, der eine Übertragung der Energie auf eine Kohlenoxydmolekel darstellt (der analog, hier nicht interessierend, auch eine solche auf Sauerstoff möglich ist).

Wenn man die den 7 Vorgängen entsprechenden Geschwindigkeiten ansetzt, so kommt man zu folgender Gleichung

$$+\frac{d[COCl_2]}{dt} = \frac{k_4 \cdot k_5 \cdot [CO] \cdot [Cl_2]}{k_5[CO] + k_6} \cdot \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_3 \cdot J_{abs.}}{k_7 \cdot (k_2[CO] + k_3)}}.$$

Diese geht in die beobachtete über, wenn im Nenner des ersten Faktors k_5 [CO] neben k_6 vernachlässigt wird und im Nenner der Wurzel k_3 neben k_2 [CO]. Das erstere bedeutet, daß Cl_3 sehr viel häufiger nach 6 für sich in seine Komponenten zerfällt, als es mit CO zusammenstoßend Phosgen bildet; das letztere, daß umgekehrt das angeregte Cl_2' viel häufiger seine Energie an CO abgibt, als es in seine Atome zerfällt.

Es läßt sich nun zeigen, daß diese Vernachlässigungen berechtigt sind, und daß sich dann die gemessenen Umsätze zahlenmäßig aus den Messungen der Dunkelreaktion ableiten lassen. Dazu schreiben wir die Gleichung so:

$$+\frac{d[COCl_2]}{dt} = k_5 \cdot \frac{k_4}{k_6} \cdot [CO] \cdot [Cl_2] \cdot \sqrt{\frac{k_3}{k_2[CO]}} \cdot \sqrt{k_1} \cdot \sqrt{J_{abs.}} \cdot \sqrt{\frac{1}{k_7}}.$$

Darin ist nun k_5 eine Stoßzahl, wie eben bei Besprechung der Dunkelreaktion dargelegt wurde; $\frac{k_4}{k_6}$ ist die Gleichgewichtskonstante der Reaktion $Cl_2 + Cl \rightleftharpoons Cl_3$, ableitbar aus unseren Bestimmungen des Gleichgewichts $3\,Cl_2 \rightleftharpoons 2\,Cl_3$ und den insbesondere von Wohl durchgeführten Messungen des Gleichgewichts

[1] Cl_2' ist eine »aktivierte« oder »angeregte« Chlormolekel.

[2] Das heißt natürlich, daß der photochemischen Bildung von Cl gegenüber die freiwillige thermische verschwindend gering ist.

$Cl_2 \rightleftarrows 2\,Cl$. [CO] und $[Cl_2]$ sind die bei den einzelnen Versuchen angewandten Konzentrationen der Gase. Für $\frac{k_3}{k_2[CO]}$ ergibt sich aus der eben besprochenen Vernachlässigung, daß es klein ist. Aus einer leichten Abweichung, welche die Messungen bei kleinen Konzentrationen gegenüber der Berechnung nach der mit den Vernachlässigungen gewonnenen Gleichung zeigen, folgt, daß es nicht **sehr** klein ist. Wir setzen es gleich 10^{-2}, und da es nur mit der Quadratwurzel eingeht, so ist die in dieser Schätzung liegende Unsicherheit nicht sehr störend. k_1 ist natürlich nichts anderes als die »Konstante des EINSTEINschen Gesetzes«, der Faktor, welcher absorbierte Quanten in aktivierte Molekeln umrechnet, also eins. $J_{abs.}$ ist die Zahl der je Sekunde absorbierten Quanten. Bleibt endlich k_7. Das ist die Konstante der Reaktion $Cl + Cl = Cl_2$. Das sollte eine Stoßzahl sein, in dem Sinne, daß, wie oben besprochen, jeder Stoß erfolgreich ist. Bei der analogen Reaktion $Br + Br = Br_2$ fanden wir jeden 800sten Stoß erfolgreich. Es scheint zweckmäßig, mit beiden Möglichkeiten zu rechnen.

Tun wir das, so erhalten wir (für 300° abs. und $[CO] = [Cl_2] = \frac{1}{2}$ Atm. für das von uns benutzte Gefäß von 300 cc Inhalt):

$$\text{Zahl der Molekeln } COCl_2 = 2.6 \times 10^{31} \times 7.5 \times 10^{-5} \times 0.5 \times 0.5 \times 10^{-1} \times 1 \times \sqrt{\text{Zahl der abs. Quanten}} \times (0.28 \text{ oder } 7.8) \times 10^{-15}$$
$$= (1.4 \text{ oder } 38) \times 10^{10} \cdot \sqrt{\text{Zahl der abs. Quanten}}.$$

Bevor nun dies Ergebnis mit der Beobachtung verglichen wird, sei erst noch der Nachweis geführt, daß es berechtigt war, im Nenner des ersten Faktors k_5 [CO] neben k_6 zu vernachlässigen.

Ersteres ist, da k_5 eine Stoßzahl ist, für unsere Bedingungen bei $CO = \frac{1}{2}$ Atm. $2.6 \times 10^{31} \times \frac{1}{2}$ Atm. Letzteres ergibt sich so: k_4 die Konstante der Reaktion $Cl + Cl_2 = Cl_3$ ist sicherlich eine Stoßzahl (analog wie k_5 von $Cl_3 + CO = COCl_2 + Cl$). Dann aber ist, wegen des Gleichgewichts $Cl + Cl_2 \rightleftarrows Cl_3$,

$$k_6 = \frac{k_4 [Cl] \cdot [Cl_2]}{[Cl_3]} = \frac{2.6 \times 10^{31} \times 4 \times 10^{-19} \times \frac{1}{2} \text{ Atm.}}{1.5 \times 10^{-23}} = 2.6 \times 10^{31} \times 3 \times 10^{4} \times \frac{1}{2} \text{ Atm.},$$

d. i. 3×10^4 mal so groß wie k_5 [CO].

Vielleicht ist es im Sinne dieser Abhandlung richtiger, diese Überlegung umzukehren: die Versuche werden befriedigt (sonst kommt die $\sqrt{[CO]}$ nicht heraus), wenn man k_5 [CO] neben k_6 vernachlässigt. Damit das berechtigt ist, muß für $Cl + Cl_2 = Cl_3$ jeder Stoß erfolgreich sein, wobei natürlich »jeder Stoß« einen nicht zu kleinen und dann temperaturunabhängigen Bruchteil bedeutet.

Nun sei die obige Berechnung der Ausbeute mit der Beobachtung verglichen. Aus der für $\frac{1}{2}$ Atm. Cl_2 und die von uns benutzte Lampe festgestellten Zahl der sekundlich absorbierten Quanten (2.2×10^{15}) folgt, daß 6.4×10^{17} oder 1.8×10^{19} Molekeln je Sekunde sich bilden sollen, das erstere,

wenn für $Cl + Cl = Cl_2$ jeder, das letztere, wenn jeder achthundertste Stoß erfolgreich ist.

Die gefundene Zahl ist 1.6×10^{19}, praktisch identisch mit der letzteren, aber auch durchaus verträglich mit der ersteren. Denn alle die Unterlagen der Rechnung sind doch so unsicher, daß die Fehlergrenze mindestens zwei Zehnerpotenzen beträgt. Eine Entscheidung also zwischen den beiden Möglichkeiten für $Cl + Cl = Cl_2$ erlauben diese Messungen gewiß nicht, aber daß sie so nahe mit der Berechnung übereinstimmen, beweist doch, daß diese berechtigt ist, und daß wir für die in ihr vorkommenden Reaktionen, an denen Atome und ähnlich ungesättigte Gebilde beteiligt sind, annehmen dürfen, daß jeder oder nahe jeder Stoß zur Umsetzung führt.

Die gemachten Überlegungen lassen sich noch ausdehnen auf den Temperaturkoeffizienten der Reaktion, der einer ganz geringen Abnahme des Umsatzes mit steigender Temperatur entspricht und mit ihnen in voller Übereinstimmung ist.

Aber das gilt nur für ein bescheidenes Temperaturintervall. Geht man zu etwa 200 bis 300°, so ist die Geschwindigkeit erheblich gesunken. Aber damit ist ein vollkommen veränderter Habitus der Reaktion eingetreten: sie ist nicht mehr proportional der Quadratwurzel aus der absorbierten Strahlung, sondern dieser direkt, nicht mehr der Quadratwurzel aus der Kohlenoxydkonzentration, sondern auch dieser direkt, ferner wie früher direkt proportional der Chlorkonzentration. Daneben ist die Hemmung durch Sauerstoff, die bei niedrigen Temperaturen erheblich war, vollkommen verschwunden. Und ganz ähnlich, wenn nicht ganz identisch, verläuft bei Zimmertemperatur die Umsetzung, wenn die Gase sehr intensiv getrocknet sind.

Diese Tatsachen ähnlich bestimmt zu deuten wie die früheren, ist uns bisher noch nicht gelungen. Eins ist sicher: das Verschwinden der $\sqrt{J_{abs.}}$ bedeutet das Verschwinden der Reaktion $Cl_2' = 2\,Cl$, denn durch das Auftreten der Chloratome kommt jene Wurzel in unsere Gleichung. Daß das sowohl bei höherer Temperatur wie bei weitgehender Abwesenheit von Wasserdampf statthat, spricht dafür, daß für diesen Zerfall das Dipolmoment der Wassermolekel nötig ist, die bei Trocknung fehlt und vielleicht bei höherer Temperatur und erhöhter Wärmebewegung nicht hinreichend »ruhig« wirksam werden kann.

Diese Dinge aber hängen mit unserem Thema nur sehr mittelbar zusammen; zu ihrer Deutung sind auch weitere Versuche nötig. Solche sind im Gang, vielleicht erlauben sie später darüber zu berichten.

Ausgegeben am 27. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XIV. Gesamtsitzung. 29. April.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Roethe.

*1. Hr. Schlenk sprach über die Entwicklung der »Radikaltheorie« in der organischen Chemie.

Er zeigt, wie der ursprüngliche Sinn des Begriffes »chemisches Radikal« (nämlich: Radikal = jedes bei der Oxydation säurebildende Element) sich in mannigfachem Wechsel zum modernen Begriff des »freien Radikals« umgewandelt hat und wie man heute als freie Radikale elektrisch neutrale, ungesättigte Atomgruppen mit einem Atom von abnormer Valenzzahl sieht.

2. Hr. H. Maier überreichte sein Werk »Philosophie der Wirklichkeit«, Teil 1: »Wahrheit und Wirklichkeit« (Tübingen 1926), sowie die von ihm besorgte und mit Anmerkungen versehene 5. Aufl. des Werkes von Christoph Sigwart »Logik«, 2 Bände (Tübingen 1924).

3. Hr. Petersen überreichte sein Buch »Die Wesensbestimmung der deutschen Romantik« (Leipzig 1926) und seine Abhandlung »Das goldene Zeitalter bei den deutschen Romantikern« (Sonderabdr.).

4. Hr. Stutz legte seinen Aufsatz »Alfons Dopsch und die Deutsche Rechtsgeschichte« (Sonderabdr.) und seinen Bericht über »Die Savigny-Stiftung seit 1901« (Sonderabdr.) vor.



Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektrodynamik.

Von Prof. Dr. Walter Schottky
in Rostock.

(Vorgelegt von Hrn. Planck am 15. April 1926 [s. oben S. 89].)

1. Die hier mitzuteilenden Sätze fand ich bei dem Versuch, das Verhalten eines elektrischen Schallaufnahmeapparates (Mikrophons) gegenüber einer auftreffenden Welle zu bestimmen aus dem Verhalten desselben Apparates als Schallsender (Lautsprecher). Es ist eigentlich merkwürdig, daß sich dieses Problem nicht ohne weiteres mit Hilfe der bekannten akustischen Reziprozitätssätze lösen ließ, wie sie in dem schon 1859 von Helmholtz aufgestellten Reziprozitätstheorem[1] und den Rayleighschen Sätzen[2] vorliegen. In der Tat enthalten denn auch diese Sätze alle Elemente allgemeinen Charakters, die zur Beantwortung der gestellten Frage nötig sind; was fehlte, war nur eine exakte Fragestellung und eine zweckmäßige Wahl der für das Problem charakteristischen Größen. Ferner handelte es sich jedoch um ein Verzichten auf Allgemeinheit, um das Hereinnehmen anscheinend spezieller Resultate über die Ausbreitung longitudinaler (und transversaler) Sinuswellen. Diese Spezialisierung macht aber in Wirklichkeit die Reziprozitätssätze erst zur direkten Anwendung auf Empfangs- und Sendevorgänge brauchbar; sie ist noch allgemein genug, um so gut wie alle praktisch vorkommenden Fälle einzubegreifen, und sie ist doch speziell genug, um eine neue, den allgemeinen Reziprozitätssätzen fremde Beziehung als beherrschende Gesetzmäßigkeit auf dem Gebiet der Sende-Empfangs-Relationen aller akustischen und elektrischen Strahler erkennen zu lassen, nämlich die Eigenschaft, bei Empfang die tiefen Frequenzen gegenüber der Sendung zu bevorzugen, und zwar in einem Verhältnis proportional zum Quadrat der Wellenlänge des betreffenden Schwingungsvorganges (Gesetz des Tiefempfangs in energetischer Formulierung, § 6).

Dieses Gesetz, das mir zuerst bei dem genannten elektroakustischen Problem entgegentrat und das sich sodann auch zur Behandlung rein akustischer Fragen (Theorie des Empfangstrichters) als brauchbar erwies, gilt für alle periodischen Strahlungsvorgänge, bei denen die Voraussetzungen des Reziprozitätstheorems und gewisse allgemeine Ausbreitungsgesetze der freien Wellen Gel-

[1] Crelles Journ. 57, 29. 1859; Ostwalds Klass. Nr. 80 S. 35.
[2] Theorie des Schalles, (D. von F. Neesen) Braunschw. 1879, Bd. I § 109.



tung behalten, so auch für elektrische Strahler, für Sende- und Empfangsantennen. Und in der Tat begegnen wir hier einem Gesetz, dem Gesetz von RÜDENBERG[1], das als Spezialfall des Tiefempfangsgesetzes formuliert werden kann. Ebenso erweist sich, daß das bekannte Gesetz[2] $\overline{E} = \lambda^2 \mathfrak{K}_\nu$, das die statistische Energie eines klassischen PLANCKschen Resonators mit der spezifischen Strahlungsdichte der auffallenden Strahlung seiner Eigenfrequenz verknüpft, in engem Zusammenhange mit dem Gesetz des Tiefempfanges steht und einer entsprechenden Verallgemeinerung fähig ist.

So erscheinen die Anwendungsgebiete des Tiefempfangsgesetzes recht vielfacher Art und ebenso verschiedenartig wird der Kreis derer sein, die an der einen oder anderen Anwendung ein direktes Interesse haben. Unter diesen Umständen habe ich es vorgezogen, die akustischen und elektroakustischen[3], die radiotechnischen[4] und die strahlungsstatistischen Anwendungen[5] des Gesetzes in verschiedenen Zeitschriften als Probleme für sich zu behandeln; gern benutze ich jedoch die Gelegenheit, an dieser Stelle eine zusammenhängende Entwicklung der allgemeinen Beziehungen zu geben, die so weit führt, daß bei der Anwendung auf die genannten Teilgebiete keine Überlegungen allgemeinen Charakters mehr hinzuzukommen brauchen. Da andererseits die aufgestellten Gesetzmäßigkeiten ihre Nützlichkeit erst bei der Anwendung auf die verschiedenen Spezialgebiete erweisen, habe ich am Schluß dieser Mitteilung einen kurzen Überblick über die Verwendung der verschiedenen allgemeinen Beziehungen und die daraus abzuleitenden speziellen Resultate zusammengestellt.

2.[6] Wir stützen uns auf die allgemeine Fassung des Reziprozitätstheorems für periodische Vorgänge, die von RAYLEIGH angegeben wird[7], und die nicht nur die Vorgänge im Medium erfaßt, sondern auch beliebige Vorgänge mechanischer oder elektrischer Natur in den Sende- und Empfangsapparaten. In dieser Form bezieht sich das Theorem auf beliebige Systeme mit endlich oder unendlich vielen Koordinaten oder »Freiheitsgraden« mechanischer oder elektrischer Art, sofern die angreifenden »Kräfte« rein periodisch sind und sofern die Amplituden aller Koordinaten zu den Amplituden dieser (generalisierten) Kräfte in linearen Beziehungen stehen. Es gilt dann der Satz:

»Wenn das System nur durch periodische Veränderungen einer Koordinate y angeregt wird (Emissionsamplitude Y_e der Koordinate y), während eine andere Koordinate x des Systems festgehalten wird, so greife unter der Wirkung der Bewegung von y im stationären Zustand an x eine Kraft f mit der Amplitude F_a (Aufnahmeamplitude der Kraft f) an. In einem anderen Fall sende die

[1] R. RÜDENBERG, Der Empfang elektrischer Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys. 25, 465, 1908.
[2] M. PLANCK, Ann. d. Phys. 1, 99, 1900.
[3] Zeitschr. f. Phys. 36, S. 689—736, 1926.
[4] Ersch. in Zeitschr. f. drahtl. Telegr. 27, Heft 5, 1926.
[5] Ann. d. Phys. 79, 557—571, 1926.
[6] Die folgenden Ausführungen sind zum Teil identisch mit Betrachtungen, die von mir in einem Aktenvermerk »Wie muß ein Klangbild aufgenommen werden, um bei Wiedergabe durch einen Lautsprecher natürlich zu wirken« für das Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske A. G., datiert vom 8. 7. 1923, niedergelegt worden sind.
[7] Theorie des Schalles, Bd. I, § 109. Es ist hier die 2. Fassung des Theorems gewählt.

Koordinate x mit der Amplitude X_e, und an der festgehaltenen Koordinate y greife dabei die Kraft g mit der Amplitude G_a an. Dann gilt:

$$\frac{F_a}{Y_e} = \frac{G_a}{X_e} \,. \tag{1}$$

Dieselbe Beziehung gilt zwischen den Empfangskräften und den Sende-Geschwindigkeitsamplituden V_e und U_e

$$\frac{F_a}{V_e} = \frac{G_a}{U_e} \,. \tag{2}$$

Um die Begriffe zu fixieren, denken wir zunächst an akustische Vorgänge und betrachten ein System, das aus dem zu untersuchenden Schallapparat A (als Sender oder Empfänger) und seiner Umgebung besteht. Der Schallapparat kann beliebig sein; speziell können wir an einen mit Trichter versehenen Lautsprecher denken. In dem betrachteten Raum können sich noch beliebige starre oder nachgiebige Körper (Wände mit oder ohne Absorptionsvermögen) befinden; auch Inhomogenitäten des Mediums, Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien und Absorption und Streuung im Medium sind zugelassen, sofern nur dadurch die Proportionalität zwischen Kräften und Bewegungen nicht gestört wird[1]. Verlangt wird jedoch, daß die Bewegungen im Apparat A sich bei der Sendung durch eine einzige Koordinate (unsere Koordinate x) ausdrücken lassen; es darf die Sendung nicht dadurch zustande kommen, daß verschiedene von einander unabhängige Bewegungen in dem Apparat A angeregt werden. Die der Koordinate x zugeordnete Kraft f (mit der Amplitude F) wird allgemein durch Division der Arbeitsleistung $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ am Apparat bei Änderung von x, dividiert durch dx, zu bestimmen sein. In dem einfachsten Fall einer starren, ebenen Membran, die normal zu ihrer Oberfläche verschiebbar ist, wird man unter x die Verschiebung der Membran aus der Ruhelage, unter f die in Richtung der Verschiebung wirkende Gesamtkraft auf die Membran verstehen; bei Kugelstrahlern, die nur ihren Radius verändern können, bedeutet x die Abweichung des Radius von seinem Normalwert, f die gesamte normal zur Kugeloberfläche angreifende Kraft. Aber auch auf Systeme, deren Membranen beliebiger Oberschwingungen fähig sind, kann man das Theorem anwenden, falls es gelingt, die Ursache einer Emission und die Folge einer Absorption als Wirkungen auf eine einzige Koordinate zu beschreiben; das ist z. B. möglich, wenn ein solches System, bei Sendung, durch einen Stromkreis mit praktisch linearem Leiter ohne verteilte Kapazität angeregt wird, während beim Empfang in diesem Stromkreis eine EMK erzeugt wird, die hier die Rolle der generalisierten Kraft spielt. Als Koordinate x ist in diesem Fall die Verschiebung der Elektrizität durch einen Leiterquerschnitt des Stromkreises zu verstehen.

3. Es werde nun in das System, das bisher nur aus dem Schallapparat A und seiner allerdings sehr allgemein wählbaren akustischen Umgebung besteht, ein zweiter Strahler B eingeführt, dessen Lage relativ zu A vorläufig ganz

[1] Rayleigh, a. a. O. § 111.

beliebig angenommen werde. Dieser Strahler B sei ein unendlich kleiner Kugelstrahler, der auf eine gewisse nicht unendlich kleine Entfernung von einem homogenen isotropen Schallmedium umgeben sei; seine Geschwindigkeitsamplitude bei Sendung werde mit V_e bezeichnet, während die bei Empfang auf ihn wirkende Kraft die Amplitude G_a habe. Es ist dann Gl. (2) auf die Wechselwirkung der beiden Strahler A und B anwendbar.

Dieser unendlich kleine Kugelstrahler spielt nun bei den folgenden Überlegungen ein bißchen eine ähnliche Rolle wie die elektrische Punktladung in der GREENschen Theorie; er dient dazu, vermittels der Beziehung (2) Eigenschaften nachzuweisen, die dem Apparat A, für sich, bei Sendung und Empfang zukommen. Wir drücken zu dem Zwecke die dem Strahler B eigentümlichen Größen V und G durch Größen aus, die für den Apparat A bei Sendung und Empfang eine direktere Bedeutung haben.

Ist R_0 der (unendlich kleine) Radius des Kugelstrahlers, so ist die Kraftamplitude G_a an B bei Sendung von A aus offenbar gegeben durch:

$$G_a = 4\pi R_0^2 \Pi,$$

wobei Π die Druckamplitude bedeutet, die bei Sendung (von A aus) an dem Punkt B auftritt. Und zwar handelt es sich dabei um die Druckamplitude bei Abwesenheit von B, da der Druck in der Umgebung von B durch den unendlich kleinen, beim Empfang unbeweglich angenommenen Kugelstrahler B nicht geändert wird.

Π ist eine Größe, die mit den Emissionseigenschaften des Strahlers A zusammenhängt, und die wir später, unter spezielleren Voraussetzungen, noch näher in Beziehung zu diesen Emissionseigenschaften setzen werden. Es handelt sich nun andererseits darum, zwischen V_e und der Absorption von A einen Zusammenhang herzustellen. Ist, wie wir annahmen, das Schallmedium auf eine, wenn auch in gewissen Fällen kleine, Strecke homogen und nicht absorbierend, so ist das auf folgende Weise möglich: es wird die Kugelwelle betrachtet, die von B bei der Geschwindigkeitsamplitude V_e ausgestrahlt werden würde, wenn B sich allein in dem homogenen Schallmedium befände. Ist a die Schallgeschwindigkeit, ρ die Dichte in dem homogenen Medium, λ die Wellenlänge, so ist die von dem Kugelstrahler im ganzen ausgestrahlte Leistung

$$L = 4\pi R_0^2 a\rho \frac{(2\pi R_0)^2}{\lambda^2} \cdot V_e^2/2.$$ [1]

Diese Leistung geht im Zeitmittel durch jede mit der Kugel R_0 konzentrische Kugel in der Zeiteinheit hindurch. Aus Symmetriegründen verteilt sich diese Leistung gleichmäßig nach allen Seiten; bezeichnen wir mit K_a die Schallintensität, die an irgendeiner, noch innerhalb des homogenen Mediums liegenden Stelle, nah oder fern von B, durch die Einheit des räumlichen

[1] Vgl. z. B. HAHNEMANN und HECHT, Physik. Zeitschr. 17, 605. 1916. Es ist, den Annahmen gemäß, 1 gegen $\lambda/2\pi R_0$ vernachlässigt.



Winkels hindurchgeht, so ist offenbar K_a überall gleich und gleich dem 4π ten Teil von L.

$$K_a = R_0^2 a \rho \frac{(2\pi R_0)^2}{\lambda^2} \cdot V_e^2/2 .$$

Lösen wir diese Gleichung nach V_e auf und setzen sie, nebst der Gleichung für G_a, in (2) ein, so fällt der Radius R_0 des Kugelstrahlers heraus, und es ergibt sich:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a}} = 2\lambda \frac{\Pi \sqrt{2/a\rho}}{U_e} . \tag{3}$$

In dieser Gleichung steht auf der linken Seite ein für die Empfangseigenschaften des Apparates A gegenüber der Kugelwelle K_a maßgebendes Größenverhältnis, während das Verhältnis Π/U_e die Sendeeigenschaften von A für den Punkt B charakterisiert. Gl. (3) sagt aus, daß das für den Empfang maßgebende Verhältnis bei Änderung der Frequenz nicht proportional dem Sendeverhältnis Π/U_e variiert, sondern einen Frequenzgang zeigt, derart, daß mit zunehmender Wellenlänge (abnehmender Frequenz) das Empfangsverhältnis relativ zum Sendeverhältnis immer günstigere Werte annimmt. Wir haben hier also bereits eine erste Formulierung des Tiefempfangsgesetzes vor uns.

4. An anderer Stelle[1] habe ich ausgeführt, wie sich das Anwendungsgebiet der akustischen Tiefempfangsbeziehung (3) erweitern läßt, so daß sie nicht nur die Zustrahlung von einem wirklichen Kugelstrahler erfaßt, sondern auf jeden Empfangsvorgang anzuwenden ist, bei dem die primär auftreffende Welle nur innerhalb der »wirksamen Umgebung« des Apparates A solche Eigenschaften hat, »als ob« sie von einem Kugelstrahler ausgesandt wäre. Unter Π ist dann in Gl. (3) die Druckamplitude der von A ausgehenden Welle zu verstehen, die an dem scheinbaren Ausgangszentrum dieser Quasi-Kugelwelle auftreten würde, wenn alles außer der wirksamen Umgebung von A aus dem System fortgenommen wäre. Mit dieser Deutung, die a. a. O. begründet und an Beispielen veranschaulicht wird, erhält Gl. (3) eine stark erweiterte Bedeutung; wenn man die praktisch vorkommenden Fälle analysiert, wird man finden, daß fast ausnahmslos die Bedingungen und Fragestellungen derart sind, daß man unter den Empfangseigenschaften eines Apparates sein Verhalten beim Auftreffen einer Quasi-Kugelwelle, unter seinen Sendeeigenschaften seine Strahlungswirkungen in ein freies Medium hinein zu verstehen hat; Wirkungen, durch die u. a. auch die in (3) auftretende Druckamplitude Π bestimmt ist. Die Beziehung (3) zeigt, daß unter diesen Bedingungen die an dem Apparat bei Empfang einer Quasi-Kugelwelle K_a auftretende Kraftamplitude F_a durch diese einzige Größe Π für das scheinbare Ausgangszentrum der Quasi-Kugelwelle K_a, bei gegebener Sendegeschwindigkeit U_e, vollkommen bestimmt ist; sie gibt an, wie F_a aus Π, den Konstanten a und ρ des Schallmediums, und der Wellenlänge λ zu ermitteln ist.

[1] Zeitschr. f. Phys. 36, 689—736, 1926.

Auch Fälle, in denen Inhomogenitäten oder Absorptionseigenschaften des Schallmediums eine Rolle spielen, sind, wie die nähere Untersuchung (a. a. O.) zeigt, nicht von vornherein aus dem Anwendungsbereich der Beziehung (3) auszuschließen; es kommt häufig nur darauf an, die »primär auftreffende Welle« und die »wirksame Umgebung von A« in geeigneter Weise zu definieren.

Nachdem wir so die allgemeinere Bedeutung der Beziehung (3) skizziert haben, können wir zu einer Umformung dieser Beziehung fortschreiten, die sie übersichtlicher und für den Gebrauch handlicher macht. Wir wollen uns jetzt auf die Betrachtung solcher Fälle beschränken, in denen die von A emittierte Welle in dem (scheinbaren) Zentrum B' der auftreffenden Quasi-Kugelwelle selbst den Charakter einer fortschreitenden Welle besitzt, oder, genauer, selbst als Teil einer Kugelwelle mit irgendeinem scheinbaren Ausgangspunkt A' dargestellt werden kann. Die Entfernung des Punktes B' von A', den Radius der scheinbaren Emissionskugelwelle im Punkte B', bezeichnen wir mit R. Diese Voraussetzung der »Emissionskugelwelle« wird in allen Fällen in Punkten B' erfüllt sein, die genügend weit von der wirksamen Umgebung von A entfernt sind[1]; nicht erfüllt ist sie z. B in allen Fällen, wo am Punkte B' stehende Wellen auftreten.

Falls die Voraussetzung der Emissionskugelwelle für den Punkt B' erfüllt ist, ist die in Richtung der Wellennormale fortschreitende Energieströmung S_e pro Flächeneinheit, unabhängig von der Entfernung $B'A'$ oder dem Radius R der Kugelwelle, gegeben durch:

$$S_e = \Pi^2/2\,a\rho\,.$$ [2]

Nach (3) folgt somit:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a}} = 4\lambda\,\frac{\sqrt{S_e}}{U_e}\,, \tag{4}$$

eine neue, einfachere Form des Tiefempfangsgesetzes. Noch symmetrischer wird diese Beziehung, wenn wir statt der Flächenintensität S_e der Emissionskugelwelle ihre Winkelintensität $K_e = R^2 S_e$ einführen; die Sende- und Empfangswelle ist dann durch analoge Größen charakterisiert, und Gl. (3) nimmt die Form an:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a}} = \frac{4\lambda}{R}\cdot\frac{\sqrt{K_e}}{U_e}\,. \tag{5}$$

»Eine auftreffende Quasi-Kugelwelle der Winkelintensität K_a ruft an einem Einkoordinatenapparat A eine Kraftamplitude hervor, die zu $\sqrt{K_a}$ in einem Verhältnis steht, das in dem Maße der 4fachen Wellenlänge zum Radius der Emissionskugelwelle größer ist als das Verhältnis, in dem die lineare Winkelintensität $\sqrt{K_e}$ der von dem Apparat nach dem Ausgangszentrum der auf-

---

[1] Vgl. z. B. H. v. Helmholtz, Crelles Journ. 57, 27, 1860; Ostwalds Klass. 80, S. 32.

[2] Es gilt, nach Hahnemann und Hecht (a. a. O.): $S_e = \frac{\Pi U}{2}\cos\varphi$, $\Pi = a\rho\cos\varphi\cdot U$, woraus die obige Gleichung folgt; $\operatorname{tg}\varphi$ ist hierbei $= \frac{\lambda}{2\pi R}$.

treffenden Welle entsandten Emissionskugelwelle zu der Emissionsgeschwindigkeit U_e des Apparates steht.«

Diese Beziehung ist, ebenso wie (3), sowohl anwendbar, um aus den bekannten Emissionseigenschaften eines Apparates sein Verhalten bei Empfang vorauszusagen, als auch, um in Fällen, wo die Verhältnisse beim Empfang sich leichter übersehen lassen, die Winkelintensität der Emission an irgendeinem Punkt zu bestimmen.

In Fällen, wo die Entfernung zwischen A und dem scheinbaren Zentrum B' der auftreffenden Quasi-Kugelwelle groß gegen die Dimensionen der wirksamen Umgebung von A ist, kann R einfach gleich der Entfernung von B' nach irgendeinem Punkt des Apparates A gesetzt werden. In diesen Fällen ist R zugleich der Radius der auftreffenden Kugelwelle K_a im Gebiet von A, und $\sqrt{K_a}/R$ ist die lineare Intensität pro Flächeneinheit der auftreffenden Welle, die wir mit $\sqrt{S_a}$ bezeichnen. Dann gilt:

$$\frac{F_a}{\sqrt{S_a}} = 4\lambda\frac{\sqrt{K_e}}{U_e}. \tag{6}$$

Diese Beziehung hat den Vorzug, daß sie keine Größen mehr erhält, die von der Entfernung $B'A$ abhängig wären, denn K_e ist, sobald einmal die Ausbreitung in Form einer freien Welle stattfindet[1], unabhängig von der Entfernung. Mithin spielt nach (6) auch für den Empfang der Radius der auftreffenden Kugelwellen oberhalb einer gewissen Grenze keine Rolle mehr.

Man sieht, daß die an sich erwünschtere Formulierung (6) gegenüber (5) an einschränkende Voraussetzungen über die relative Entfernung von A und B' gebunden ist. In der Tat eignet sich die Größe S_a in Fällen, wo die Dimensionen von A noch nicht klein gegen den scheinbaren Radius der auftreffenden Kugelwelle sind, nicht zur Bestimmung von deren Intensität, da S_a innerhalb des Gebietes von A ja noch variiert, während K_a als Winkelintensität einer Quasi-Kugelwelle überall denselben Wert besitzt.

5. In den bisherigen Untersuchungen handelte es sich um akustische Zustrahlung der auftreffenden Energie, um ein elastisches Medium als Träger der ausgesandten und ankommenden Wellen. Ehe wir zu weiteren Umformungen und Anwendungen der gefundenen Beziehungen fortschreiten, wollen wir darauf hinweisen, daß ganz entsprechende Gesetze auch für Empfang und Sendung elektrischer Wellen, im Vakuum oder Dielektrikum, aufgestellt werden können.

Als Apparat A betrachten wir jetzt einen Apparat, der imstande sei, auf elektromagnetische Kräfte zu reagieren; für ihn und das ganze betrachtete System sei wieder die Voraussetzung der linearen Beziehung zwischen allen Kräften (Feldstärken oder elektromotorischen Kräften) und Geschwindigkeiten (Strömen, mechanischen Bewegungen usw.) gewahrt.

[1] Diese Welle braucht sich aber keineswegs nach allen Seiten mit gleicher Intensität auszubreiten. Wir befinden uns hier vielmehr im allgemeinen im Gebiet der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen, bei denen einer jeden Richtung im Raum eine bestimmte Intensität zugeordnet ist.

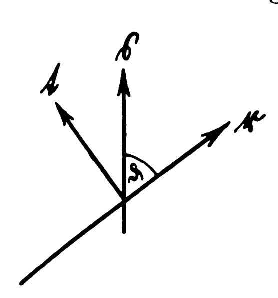


Es läßt sich dann[1] durch eine ganz analoge Untersuchung wie in § 3, bei der nur ein elektrischer Dipol an Stelle eines akustischen Kugelstrahlers die Rolle des Zustrahlers B spielt, zeigen, daß zwischen der Empfangskraft des Apparates A, F_a, der Intensität der auftreffenden Dipolwelle, K_a, der Feldstärke der von A ausgehenden elektrischen Sendewelle $\mathfrak{E}^s$ am Ort und in Richtung des zustrahlenden Dipols B und der Sende-»Geschwindigkeit« U_e des Strahlers A folgende Tiefempfangsbeziehung besteht:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a}} = \lambda \cdot \frac{\sqrt{2\, q\, \varepsilon_0/\pi} \cdot \mathfrak{E}^s/\sin\vartheta}{U_e}. \qquad (3')$$

Hierbei bedeutet noch ϑ den Winkel zwischen der Dipolrichtung $\mathfrak{s}$ und einem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$, der von einem beliebig festzusetzenden Punkt von A nach dem Punkt B gezogen ist; auf denselben Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ ist die (hier mit der Richtung veränderliche) Intensität K_a zu beziehen. q und ε_0 sind Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dielektrizitätskonstante in dem Dielektrikum, in dem sich der zustrahlende Dipol befindet. Die Verallgemeinerungen der Beziehung (3′) auf »Quasi-Dipolwellen« usw. sind ganz entsprechend möglich wie im akustischen Fall.

Eine wesentliche Vereinfachung von (3′) ergibt sich bei Fernsendung und Fernempfang, d. h. wenn sowohl die Wellenlänge wie die Dimensionen der wirksamen Umgebung von A klein sind gegen die Entfernung AB'. (B' scheinbarer Ausgangspunkt der Quasi-Dipolwelle.) In diesem Fall ist die in A ankommende Welle eine linear polarisierte Welle, deren elektrischer Vektor senkrecht auf der Richtung $\mathfrak{r} = B'A$ steht und im übrigen in der Ebene $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ liegt. Bezeichnen wir diese Richtung mit $\mathfrak{t}$, so ist demnach K_a die Intensität einer auf A auftreffenden Welle mit der Strahlrichtung $\mathfrak{r}$ und der elektrischen Feldvektorrichtung $\mathfrak{t}$; überdies ist K_a im Gebiet des Apparates A seitlich praktisch konstant. Wir bezeichnen in diesem Falle K_a mit einem oberen Index t. Weiter sieht man, daß wegen der Annahme der Fernsendung die von A emittierte Welle im Punkte B' eine Wellenebene haben muß, die ebenfalls senkrecht zu $\mathfrak{r}$ steht; und bezeichnet $\mathfrak{E}^t$ die Amplitude der Feldstärke in der in dieser Ebene liegenden Richtung $\mathfrak{t}$, so ist (s. Abb.) offenbar



$$\mathfrak{E}^t = \mathfrak{E}^s/\sin\vartheta.$$

(3′) vereinfacht sich also zunächst zu:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a^t}} = \lambda \frac{\sqrt{2\, q\, \varepsilon_0/\pi} \cdot \mathfrak{E}^t}{U_e}. \qquad (3'')$$

Weiter läßt sich aber jetzt sogleich der Amplitudenkomponente $\mathfrak{E}^t$ der Feldstärke im Punkt B' eine Emissionsintensität S_e^t zuordnen, die die Energieströ-

[1] Das Gesetz des Tiefempfangs in der Radiotechnik, Zeitschr. f. drahtl. Telegr. 27, 1926.

mung pro Flächeinheit der zu t senkrecht polarisierten Komponente der durch B' hindurchgehenden von A ausgesandten Emissionswelle darstellt:

$$S_e^t = \frac{q\,\varepsilon_0}{4\pi}\,\frac{\mathfrak{E}^{t^2}}{2}\,.$$

Einsetzen in (3″) ergibt:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a^t}} = 4\lambda\,\frac{\sqrt{S_e^t}}{U_e}\,, \tag{4'}$$

eine Beziehung, die der akustischen Beziehung (4) ganz analog ist; λ ist die Wellenlänge im Dielektrikum ε_0.

Führt man endlich noch die Winkelintensität der emittierten Welle $K_e^t = S_e^t R^2$ ein, wobei R wieder den Radius der in B' auftretenden Emissionswelle bedeutet, der zugleich in unserem Fall gleich dem Radius der Welle K_a^t ist, so erhält man die zu (5) und (6) analogen Beziehungen:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_a^t}} = \frac{4\lambda}{R}\cdot\frac{\sqrt{K_e^t}}{U_e} \tag{5'}$$

$$\frac{F_a}{\sqrt{S_a^t}} = 4\lambda\cdot\frac{\sqrt{K_e^t}}{U_e}\,. \tag{6'}$$

Gl. (5′) sagt aus:

»Eine in irgendeiner Richtung linear polarisierte elektrische Quasi-Dipolwelle der Winkelintensität K_a^t, die von fern auf einen elektrischen Einkoordinatenapparat A auftrifft, ruft an der Koordinate dieses Systems eine Kraftamplitude F_a hervor, die zu $\sqrt{K_a^t}$ in einem Verhältnis steht, das in dem Maße der 4fachen Wellenlänge zum Radius der Emissionskugelwelle größer ist als das Verhältnis, in dem die lineare Winkelintensität $\sqrt{K_e^t}$ der von dem Apparat nach dem (scheinbaren) Ausgangszentrum der auftreffenden Welle entsandten Emissionswelle gleicher Polarisation zu der Emissionsgeschwindigkeit U_e der Koordinate des Apparates steht.«

In dieser Formulierung, die das lineare Tiefempfangsgesetz der Elektrodynamik darstellt, ist die Bezugnahme auf alle Größen, die nicht für die Sendung oder den Empfang des Apparates A charakteristisch sind, fortgefallen.

Gl. (6′) zeigt entsprechend Gl. (6), daß bei Fernempfang der Radius der auftreffenden und emittierten Kugelwelle keine Rolle mehr spielt, und daß es nur auf die Richtung der auftreffenden und emittierten Welle ankommt.

6. Die vollständige Analogie der akustischen und elektrischen Tiefempfangsbeziehung (5) und (5′) erlaubt es, die weiteren Betrachtungen auf beide Fälle in gleicher Weise angewandt zu denken, indem wir unter K_a und K_e bei den elektrodynamischen Anwendungen die polarisierten Größen K_a^t und K_e^t verstehen wollen. Wir zeigen jetzt zunächst, daß aus der Beziehung (5) zwischen Empfangs*kraft* und Sende*geschwindigkeit* ohne weiteres eine solche zwischen Empfangs*geschwindigkeit* und Sende*kraft* folgt. Es gilt

nämlich, wenn die Koordinate x des empfangenden Apparates nicht festgehalten wird, sondern Bewegungen mit der Empfangsamplitude U_a auszuführen vermag, ganz allgemein für ein Einkoordinatensystem mit linearen Eigenschaften die Gleichung:

$$U_a = \frac{F_a}{|\mathfrak{W}|}.$$

Hierbei bedeutet $|\mathfrak{W}|$ den absoluten Betrag eines Scheinwiderstandes, der im allgemeinen phasenverschoben gegen die Bewegung sein wird und der ferner von der Frequenz abhängen wird. Bei mechanischen Systemen handelt es sich hierbei um die kombinierte Wirkung der Massenträgheit, einer elastischen Kraft und eines etwaigen Reibungswiderstandes; ferner wird aber die Kopplung mit anderen Systemen, und insbesondere die Rückwirkung der Schallausstrahlung in ein elastisches Medium gewisse Scheinwiderstände mit besonderer Frequenzabhängigkeit bedingen, die in $\mathfrak{W}$ zu berücksichtigen sind. Für mechanische Systeme bezeichnen wir die Scheinwiderstände allgemein als »Hemmungen«. Bei elektrischen Einkoordinatensystemen dagegen handelt es sich um elektrische Widerstände und Scheinwiderstände; auch diese Widerstände können, direkt oder durch Kopplung mit andern Systemen, von Strahlungsvorgängen (elektrischer oder akustischer Art) abhängen.

Wenn die Sendung nicht durch eine vorgegebene Geschwindigkeitsamplitude U_e, sondern durch eine aufgeprägte Kraft mit der Amplitude F_e zustande kommt, gilt entsprechend:

$$U_e = \frac{F_e}{|\mathfrak{W}|}.$$

Setzt man beide Gleichungen in (5) ein, so erhält man die neue Form des linearen Tiefempfangsgesetzes:

$$\frac{U_a}{\sqrt{K_a}} = 4\frac{\lambda}{R}\cdot\frac{\sqrt{K_e}}{F_e}. \tag{8}$$

Weiter: will man die Empfangsgeschwindigkeit U_a berechnen, während bei Sendung die Beziehung zwischen K_e und U_e, nicht zwischen K_e und F_e, gegeben ist, so kann man in (8) F_e durch $|\mathfrak{W}|\cdot U_e$ ersetzen; man sieht, daß in diesem Fall noch der Gesamtbetrag von $\mathfrak{W}$ bekannt sein muß.

Sobald man jedoch dem Studium von $\mathfrak{W}$ und seinen Komponenten, das zur vollständigen Übersicht über das Verhalten des Systems unerläßlich ist, seine Aufmerksamkeit zuwendet, ergeben sich noch weitere Formen der Tiefempfangsbeziehung, die verschiedener Anwendung fähig sind. Bezeichnet man nämlich die bei der Sendegeschwindigkeit U_e im ganzen von dem Apparat A ausgestrahlte Leistung mit L_e, so läßt sich immer ein Teil $\mathfrak{W}_n$ des gesamten Wattwiderstandes von $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}_w$, angeben, dessen Überwindung das Äquivalent der zur Ausstrahlung von L_e notwendigen Arbeit darstellt; es ist der Strahlungswiderstand eines Antennenkreises oder der Nutzwiderstand in einem auf Schallsendung arbeitenden mechanischen oder elektrischen Kreise.

Dieser Strahlungs- oder Nutzwiderstand läßt sich meist verhältnismäßig einfach berechnen. Es besteht die Beziehung:

$$L_e = U_e^2/2 \cdot \mathfrak{W}_n .$$

Nun ist damit allerdings noch kein Zusammenhang zwischen $\mathfrak{W}_n$ und K_e gegeben. Das Verhältnis L_e/K_e hat jedoch eine anschauliche und in den berechenbaren Fällen leicht anzugebende Bedeutung: es ist offenbar der räumliche Winkel, über den die von dem Apparat im ganzen emittierte Strahlung verteilt werden müßte, wenn sie nach allen Richtungen des Raumes hin die in der Richtung AB' vorhandene Intensität K_e besäße. Diesen Winkel, der größer oder kleiner als 4π sein kann, bezeichnen wir als »Konzentrationswinkel« Ω; seinen reziproken Wert nennen wir die »Richtungskonzentration« der emittierten Strahlung:

$$K_e/L_e = 1/\Omega .$$

Je kleiner Ω, desto größer offenbar die Richtwirkung des Senders für die betreffende Richtung.

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in (5) erhalten wir die neuen Beziehungen:

$$\frac{F_a}{\sqrt{K_e}} = 4\,\frac{\lambda}{R}\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{W}_n}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \qquad (9a)$$

und:

$$\frac{U_a}{\sqrt{K_a}} = 4\,\frac{\lambda}{R}\sqrt{\frac{\mathfrak{W}_n/2}{|\mathfrak{W}|^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Omega}} . \qquad (9b)$$

Diese Beziehungen zeigen, daß man die Verhältnisse beim Empfang einer Quasi-Kugelwelle oder Quasi-Dipolwelle vollständig berechnen und voraussagen kann, wenn man, außer den Scheinwiderständen $\mathfrak{W}$ des betreffenden Einkoordinatenkreises, nur noch den Konzentrationswinkel Ω bei Emission für die betreffende Richtung kennt, aus der die Kugelwelle auftrifft.

7. Endlich gelangen wir zu der energetischen Formulierung des Tiefempfangsgesetzes, welche, wenn auch nicht die allgemeinste und für die Verwendung bequemste, so doch wohl die einprägsamste Form dieses Gesetzes darstellt.

Wir nehmen an, das, was bei der Emission des Apparates A primär gegeben sei, sei eine (elektrische oder mechanische) Kraftamplitude F_e, die in einem auf den Apparat A arbeitenden »Generator« wirksam sei. Diese Voraussetzung ist in allen Fällen, wo akustische Strahler oder elektrische Antennen durch elektrische Kräfte zur Strahlung angeregt werden, ohne Zweifel die gegebene; hinzu kommt die ebenfalls allgemein gegebene Tatsache, daß dieser Generator selbst einen gewissen inneren Widerstand besitzt, dessen Wattkomponente wir mit W_i bezeichnen. Wieweit bei Anregung durch eine mechanische eingeprägte Kraft (z. B. auf Grund eines Dampfmaschinen- oder Gasmotorprozesses) ähnliche Verhältnisse vorliegen, möchte ich dahingestellt sein lassen, da mir keine Fälle bekannt sind, wo eine derartige Anregung

akustischer oder elektrischer Strahlung für Apparate in Frage kommt, die gleichzeitig als Empfänger verwandt werden können.

Unter der gemachten Annahme läßt sich eine durch die inneren Eigenschaften des Generators, also durch F_e und W_i vollständig bestimmte maximale Leistung L_i angeben, die bei der betreffenden Frequenz von dem Generator abgegeben werden könnte:

$$L_i = F_e^2/2 \cdot 1/4\, W_i\,.$$

Andererseits, läßt man den Apparat mit dem angeschlossenen Generator als Empfänger arbeiten, wobei jetzt die an den »Generator« abgegebene Leistung die nutzbar zu machende Leistung darstellt, so erhalten wir eine Empfangsleistung

$$L_a = U_a^2/2 \cdot W_i\,.$$

(U_a bedeutet hier die »Geschwindigkeitsamplitude« im verallgemeinerten Sinne, bei elektrischen Systemen eine Stromstärke.)

Quadrieren wir die Beziehung (8) und drücken U_a^2 und F_e^2 durch L_a und L_i aus, so erhalten wir unter den Voraussetzungen, unter denen Gl. (8) gilt:

$$L_a/K_a = \lambda^2/R^2 \cdot K_e/L_i\,.$$

Hier wird man das Verhältnis L_a/K_a als das »Absorptionsvermögen pro Einheitswinkel der auffallenden Strahlung« zu bezeichnen haben; wir bezeichnen dies Absorptionsvermögen mit $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} = L_a/K_a\,.$$

Entsprechend haben wir die Größe

$$\mathfrak{e} = K_e/L_i$$

als Winkelemissionsvermögen des Apparates für die betrachtete Richtung zu bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen wird:

$$\mathfrak{a} = \lambda^2/R^2 \cdot \mathfrak{e}\,. \tag{10}$$

Das ist die energetische Form des Tiefempfangsgesetzes. Es sagt aus:

»Ein beliebiger Strahler, dessen Verhalten linear und durch eine einzige Koordinate bestimmbar ist, vermag aus der Winkeleinheit einer auf ihn auftreffenden Quasi-Kugel- oder Dipolwelle seitlich konstanter Intensität, mit der Wellenlänge λ, nur einen im Verhältnis λ^2/R^2 kleineren Betrag von Energie zu absorbieren, als er in Richtung des Zentrums dieser Kugelwelle unter dem Einheitswinkel (in einer fortschreitenden Welle, die dort den Radius R besitzt) zu entsenden vermag.«

Weitere Konsequenzen dieses Gesetzes, die besonders für die Frage der optimalen Absorptionsfähigkeit eines Strahlers von Bedeutung sind, ergeben sich, indem man die emittierte Leistung K_e durch $L_e\,\Omega$ ausdrückt und entsprechend anstatt des Winkelemmissionsvermögens das Gesamtemissionsvermögen η einführt:

$$\eta = L_e/L_i\,.$$

Es wird dann:

$$\mathfrak{e} = \eta/\Omega,$$

und wir erhalten das Gesetz:

$$\mathfrak{a} = \lambda^2/R^2 \cdot \eta/\Omega. \tag{11}$$

Da η seiner Definition nach höchstens = 1 sein kann, ergibt sich hieraus eine ganz allgemeine obere Grenze des Absorptionsvermögens eines Einkoordinatenstrahlers für eine auftreffende Quasi-Kugel- oder Dipolwelle:

$$\mathfrak{a} \leqq \lambda^2/R^2 \cdot 1/\Omega. \tag{12}$$

»Das Winkelabsorptionsvermögen eines Einkoordinatenstrahlers für eine Quasi-Kugel- oder Dipolwelle ist immer kleiner als das Quadrat des Verhältnisses der Wellenlänge zum Emissionsradius für den scheinbaren Ausgangspunkt der auftreffenden Welle, multipliziert mit der Richtungskonzentration der Emissionswelle für die betreffende Richtung.«

Das hierdurch aufgezeigte Optimum für $\mathfrak{a}$ ist, wie man sieht, bei gegebener Frequenz kein absolutes, sondern hängt zunächst dadurch von den Eigenschaften des Mediums ab, daß es dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in dem betreffenden Medium proportional ist; für elektrische Wellen bietet also das Vakuum die günstigsten Empfangsverhältnisse. Gering sind, in größerer Entfernung, die Möglichkeiten, R zu variieren, gewissermaßen unbegrenzt dagegen die Möglichkeiten der Verkleinerung von Ω, also der Benutzung des Richtungsempfanges.

Das Bedeutsamste ist jedoch, daß das Optimum des Absorptionsvermögens quadratisch mit der Wellenlänge zunimmt, also quadratisch mit der Frequenz abnimmt. Wir haben darin wohl die anschaulichste Aussage des Tiefempfangsgesetzes vor uns. Einschränkend muß allerdings hervorgehoben werden, daß diese Aussage nur dann gilt, wenn die durch Ω gegebene Richtungsverteilung der Emission von der Wellenlänge unabhängig ist, was in vielen Fällen, aber keineswegs immer der Fall sein wird. Für elektrische Wellen ist Ω, wie bei der Gelegenheit bemerkt werden mag, außer von der Richtung, natürlich auch von der Polarisation der auftreffenden Welle abhängig; es ist ja hier definiert durch:

$$\Omega' = L_e/K_e^{\prime}.$$

Führen wir schließlich noch die — bei elektrischen Wellen schon in den Voraussetzungen von (8) enthaltene — Annahme ein, daß R gleich der Entfernung AB' gesetzt werden kann, so daß $K_a/R^2 = S_a$ wird, und bezeichnen wir das Verhältnis

$$L_a/S_a = \alpha$$

als Flächenabsorptionsvermögen des Apparates A, d. h. als Absorption, bezogen auf die pro Flächeneinheit zugestrahlte Energie der auftreffenden Welle, so erhalten wir statt (10), (11) und (12) die Beziehungen:

$$\alpha/\lambda^2 = \mathfrak{e} \tag{10a}$$

$$\alpha/\lambda^2 = \eta/\Omega \tag{11a}$$

$$\alpha/\lambda^2 \leqq 1/\Omega. \tag{12a}$$

»Ein Einkoordinatenstrahler absorbiert bei Fernempfang einer Quasi-Kugel- oder Dipolwelle aus der pro Wellenlängenquadrat zugestrahlten Energie denselben Bruchteil, den er pro Winkeleinheit in Richtung der auftreffenden Welle von der in ihm verfügbaren Energie entsendet.«

»Das auf die zugestrahlte Energie pro Wellenlängenquadrat bezogene Absorptionsvermögen eines Einkoordinatenstrahlers ist gleich dem Gesamtemissionsvermögen des Strahlers, multipliziert mit der Richtungskonzentration bei Emission für die Richtung der betreffenden Welle.«

»Das maximale Absorptionsvermögen, bezogen auf die pro Wellenlängenquadrat zugestrahlte Energie, das ein Einkoordinatenstrahler überhaupt haben kann, ist gleich der Winkelkonzentration bei Emission für die betreffende Richtung.«

Alle diese Sätze gelten, unabhängig von dem Verhältnis der Apparatdimensionen zur Wellenlänge, nur unter der Voraussetzung, daß man es bei Absorption und Emission mit den Bedingungen des Fernempfangs und der Fernsendung zu tun hat.

8. Ein näheres Eingehen auf die akustischen, elektroakustischen, elektrodynamischen und statistischen Anwendungen, deren die verschiedenen hier diskutierten Formen der Tiefempfangsbeziehung fähig sind, ist im gegebenen Rahmen unmöglich. Um jedoch das Anwendungsbereich dieser Gleichungen wenigstens skizzenhaft anzudeuten, seien im folgenden die aus diesen Gleichungen erhaltenen speziellen Ergebnisse — die an anderer Stelle[1] veröffentlicht werden — in einer kurzen Übersicht zusammengefaßt.

I. Akustische Anwendungen (Gl. (3)—(5)).

Die neuen Beziehungen lassen sich auf alle rein akustischen Probleme anwenden, bei denen das Auftreten von Quasi-Kugelwellen auf irgendeinen Apparat eine Rolle spielt. Bei Beschränkung auf kleine, in passender Weise virtuell verschiebbare Oberflächenteile des Empfangsapparates führt die Empfangskraftbeziehung (3)—(5) die Berechnung der Druckamplituden, die die auftreffende Welle an beliebigen Stellen des Apparates hervorruft, zurück auf die Bestimmung der Intensität oder Druckamplitude, die das betreffende Oberflächenelement bei Sendung an dem scheinbaren Ausgangspunkt der Quasi-Kugelwellen erzeugen würde. Dieses Verfahren, auf eine am Grunde eines (langen) Trichters befindliche kleine Membran angewandt, gestattet, die Wirkung einer auftreffenden Quasi-Kugelwelle auf eine solche Membran aus ihrer Emissionswirkung zu berechnen; es ergibt sich auf diese Weise die »Druckverstärkung« des Trichters in Abhängigkeit vom Trichterwinkel, von der Entfernung des Strahlers und der Entfernung der Membran von der Trichterspitze. Für entfernte Strahlungsquellen, die sich innerhalb der Randstrahlen des Trichters befinden, ist bei höheren Frequenzen die Druckverstärkung einfach gleich dem reziproken Verhältnis des räumlichen Trichterwinkels zur Vollkugel. Andere Probleme betreffen die Bestimmung des Emissionsfeldes eines Strahlers, für

[1] Vgl. Anm. S. 117.



den die Druckamplituden bei Empfang in besonders einfacher Weise berechnet werden können. Es lassen sich so die wesentlichen Strahlungseigenschaften der in eine unendliche starre Ebene gebetteten Rayleighschen Kolbenmembran auf sehr einfachem Wege ableiten; ferner lassen sich die Richtwirkung von Großflächen-Lautsprechern betreffende Probleme behandeln.

II. Elektroakustische Anwendungen (Gl. (8)—(12)).

Für umkehrbare elektroakustische Apparate liefert die energetische Tiefempfangsbeziehung direkt den Empfangswirkungsgrad gegenüber einer auftreffenden Quasi-Kugelwelle, wenn der Sendewirkungsgrad und die Senderichtwirkung bekannt sind. Am durchgerechneten Beispiel eines nahezu frequenzunabhängig sendenden elektrodynamischen Trichterlautsprechers läßt sich die Bevorzugung der tiefen Frequenzen beim Empfang besonders anschaulich illustrieren. Zur Lösung der Aufgabe, die Empfangsverhätnisse bei beliebiger Variation des angeschlossenen elektrischen Stromkreises aus dem Sendewirkungsgrad zu bestimmen, muß die lineare Geschwindigkeits- (Strom-) Empfangsbeziehung herangezogen werden. Es läßt sich zeigen, wie man bei Kenntnis gewisser Scheinwiderstände des betreffenden elektrischen Einkoordinatenkreises sowie der Richtwirkung bei Emission, das in der Mikrophontheorie auftretende Verhältnis der Spannungsamplitude am Empfangskreis zur Druckamplitude der freien Welle bestimmen kann. Eine solche Beziehung läßt sich ferner dazu benutzen, um, entsprechend dem Wirkungsgrad 100 Prozent bei Sendung, auch für die Absolutgüte des Empfanges eine unüberschreitbare obere Grenze zu bestimmen, die sich jedoch als von der Frequenz und von der Richtwirkung abhängig erweist. Die mit den bisherigen Konstruktionen erreichbaren Empfangsverhältnisse sind noch 1—2 Zehnerpotenzen von dieser Grenze entfernt. Beim Vergleich der rein akustischen und der elektroakustischen Tiefempfangsbeziehungen ergibt sich, daß die letzteren aus den ersteren durch nochmalige Anwendung des Reziprozitätstheorems auf die miteinander gekoppelten mechanischen und elektrischen Koordinaten des Apparates hervorgehen.

III. Elektrodynamische Anwendungen (Gl. (3''), (9a)—(9b) und (12a)).

Auf die Sende- und Empfangseigenschaften beliebiger elektrischer Antennen angewandt, ergeben die energetischen Tiefempfangsbeziehungen eine absolute obere Grenze für den Empfangswirkungsgrad von Antennen. In Verallgegemeinerung des Gesetzes von Rüdenberg läßt sich zeigen, daß das maximale Empfangsareal einer (beliebig kleinen oder großen) Antenne für eine aus bestimmter Richtung auftreffende Quasi-Dipolwelle gleich dem Wellenlängenquadrat, multipliziert mit einem die Senderichtwirkung der Antenne enthaltenden Faktor (für die betreffende Richtung) ist. Es läßt sich nicht nur die Empfangsrichtwirkung, sondern auch die absolute Empfangsgüte durch Benutzung von Richteffekten verbessern. Analog den elektroakustischen Problemen läßt sich die Bestimmung der Empfangswirkung bei beliebiger Variation der an die

Antenne angeschlossenen Stromkreise auf die Bestimmung gewisser Widerstandsgrößen und Senderichteffekte zurückführen. Die Bestimmung der lokalen Empfangsfeldstärken im Felde einer Quasi-Dipolwelle läßt sich ähnlich wie bei dem akustischen Problem auf die Untersuchung der Emissionswirkung von Probedipolen zurückführen, mit denen das Feld abgetastet wird. Im Anschluß an neuere Arbeiten von A. Sommerfeld und seinen Schülern ist es endlich auch möglich, magnetische Dipole als Typensendungs- und Tastorgane heranzuziehen.

IV. Statistische Anwendungen (Gl. 6).

Eine von M. Planck aufgestellte, in der Geschichte der Strahlungstheorie grundlegende Beziehung zwischen der mittleren Energie eines klassischen Oszillators und der Strahlungsintensität eines ihn umgebenden isotropen Strahlungsfeldes weist ebenfalls auf eine Bevorzugung proportional dem Quadrat der Wellenlänge der tiefen Frequenzen bei Strahlungsaufnahme hin. Es läßt sich zeigen, daß man diese Beziehung ohne jede einschränkende Annahme über die Größe und Emissionsfähigkeit des betreffenden Strahlungsgebildes, jedoch naturgemäß mit Beschränkung auf Koordinaten mit ausgesprochener Eigenschwingung, als allgemeine Konsequenz des Tiefempfangsgesetzes für akustische und elektrische Wellen nachweisen kann. Da die Plancksche Beziehung auch für den monochromatischen Oszillator der Quantentheorie Geltung behält, wird hierdurch die Frage nach einer quantentheoretischen Umdeutung der bisher formulierten Tiefempfangsgesetze aufgeworfen. Es besteht hier eine Beziehung zu einem Einsteinschen Satz über das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten bei Emission und Absorption; die weitere Verfolgung dieser Zusammenhänge führt unmittelbar auf aktuelle Fragen der Quantentheorie.

Ausgegeben am 19. Juni.



SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 6. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Schur sprach über eine Untersuchung »Zur additiven Zahlentheorie«. (Ersch. später.)

Es wird ein neues Analogon zu einem bekannten Satz von Euler bewiesen: Die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen positiven Zahl n in gleiche oder verschiedene positive Summanden der Form $6x \pm 1$ ist stets gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in beliebige positive Summanden, wobei jedoch für jedes Paar a, b von Summanden die Differenz $|a - b|$ nicht kleiner als drei und, wenn a oder b durch drei teilbar ist, auch nicht kleiner als vier sein darf. Der Beweis beruht auf einer Darstellung der Jacobischen Thetafunktionen in Form unendlicher Determinanten.

Ausgegeben am 19. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei



SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XVI. Gesamtsitzung. 20. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Petersen sprach über »Theodor Fontanes Altersroman«. (Ersch. später.)

Die Stechlinsage, die in den »Wanderungen durch die Mark« berichtet wird, enthält zwei Bestandteile: die märchenhafte Geschichte des roten Hahnes, der aus der Tiefe des Sees aufsteigt, eine auch sonst verbreitete Nixensage, und die Nachricht, daß der See durch das Erdbeben von Lissabon in Mitleidenschaft gezogen worden sei. Fontane wählt diesen zweiten Bestandteil der Sage zum Symbol, als er 1895 nach Ablehnung der »Poggenpuhls« sich noch einmal über die Probleme des märkischen Adels auszusprechen genötigt sieht, und er kommt erst während der Arbeit, als ihn äußere Gründe veranlassen, die im Mittelpunkt stehende Reichstagswahl zu verändern und mit dem Sieg der Sozialdemokratie enden zu lassen, dazu, den roten Hahn zum Sinnbild kommender Revolution zu machen und die soziale Frage in den Roman, der so das Erbe der unausgeführt bleibenden »Likedeeler« übernimmt, einzuführen. Ursprünglich war es wohl auf einen Bildungsroman angelegt, in dem Woldemars Entwicklung zu der Idee des Adels, wie er sein sollte, zu führen hatte. In der Ausführung aber ist Dubslav v. Stechlin durchaus die Hauptperson geworden, neben dem noch Pastor Lorenzen und Gräfin Melusine die Ansichten des Dichters vertreten. In der Angleichung der verschiedenen Charaktere aneinander, die bei Dubslav v. Stechlin und Graf Barby von Anfang an gewollt ist, ist ein Beispiel für jene »invertierte Verschmolzenheit« zu erblicken, die der Kunsthistoriker Brinckmann kürzlich als wesentliches Kennzeichen der Alterskunst formuliert hat.

2. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff legte einen Aufsatz vor: Pherekydes.

Pherekydes von Syros ist eine greifbare Person, auch sein Werk trägt bestimmte persönliche Züge. Dagegen die zehn Bücher mythologischen Inhaltes, die Eratosthenes einem Athener Pherekydes zugeschrieben hat, der ein bloßer Name ist, sind kein einheitliches Werk gewesen. Wir sind daher berechtigt, in ihnen eine Zusammenarbeitung von Verschiedenem zu sehen, die unter den Namen des Syriers getreten war, entstanden im 5. Jahrhundert, einem Athener zugeschrieben, weil attische Geschichten darin standen.

3. Hr. Paschen legte eine Mitteilung vor: Serienenden und molekulare Felder.

Die Serien des Bogenspektrums des Heliums zeigen in der Glimmschicht im Innern einer zylindrischen Kathode bei Gasdrucken oberhalb von 2 mm eine auffällige Verstärkung und Verbreiterung der letzten Linien und daran anschließend ein über die Seriengrenze hinausreichendes kontinuierliches Spektrum. Die Verbreiterung entspricht den im Dunkelraum auftretenden Stark-Effekten und ist auf elektrische Felder zurückzuführen. Da indessen die für elektrische Felder sehr empfindliche Linie $2s - 3d$ im Glimmlicht nicht so stark auftritt wie im positiven Licht, wirken die elektrischen Felder nur auf die hohen Quantenbahnen und sind als molekulare zu betrachten. Es wird erörtert, wie das Entladungsphänomen und die elektrischen Felder der einfach geladenen Helium-Ionen beschaffen sein müssen, um die beobachtete Wirkung zu erzeugen. Das Phänomen wird betrachtet als die oberhalb von 2 mm Druck stark vermehrte und zugleich gestörte Einfangung der Elektronen durch die Ionen.

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Kneser übersandte eine Arbeit »Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung«.

Bei Aufgaben der Variationsrechnung, in denen ein freies oder ein isoperimetrisch gebundenes Extrem gesucht wird, läßt sich unter gewissen Voraussetzungen die Bedingung für das Auftreten konjugierter Punkte in einer neuen Form aussprechen, die bei der Diskussion wesentliche Vorteile darbietet.

5. Hr. Heymann überreichte seinen Aufsatz »Verlängerung der Urheberschutzfrist auf 50 Jahre« (Deutsche Juristenzeitung XXXI Heft 10, 1926).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Luschin von Ebengreuth übersandte die 2. Aufl. seines Werkes »Allgemeine Münzkunde und Geldgeschichte des Mittelalters und der neueren Zeit« (Handbuch der Mittelalterlichen und Neueren Geschichte, hrsg. von G. von Below und F. Meinecke, Abt. IV) (München und Berlin 1926).

7. Das korrespondierende Mitglied Hr. Oncken übersandte sein Werk »Die Rheinpolitik Kaiser Napoleons III. von 1863 bis 1870 und der Ursprung des Krieges von 1870/71«, 3 Bände (Berlin und Leipzig 1926).

8. Hr. Brackmann überreichte das Werk des Hrn. Prof. Dr. Eduard Sthamer in Berlin »Die Verwaltung der Kastelle im Königreich Sizilien unter Kaiser Friedrich II. und Karl I. von Anjou« (Leipzig 1914) und »Dokumente zur Geschichte der Kastellbauten Kaiser Friedrichs II. und Karls I. von Anjou«, bearbeitet von Eduard Sthamer, Bd. I: Capitanata (Leipzig 1912) und Bd. II: Apulien und Basilicata (Leipzig 1926) (Die Bauten der Hohenstaufen in Unteritalien, hrsg. vom Preußischen Historischen Institut in Rom, Ergänzungsband I—III), dessen letzter Band mit Unterstützung der Akademie erschienen ist.

9. Vorgelegt wurde die mit Unterstützung der Akademie veröffentlichte Arbeit des Hrn. Dr. Josef Juncker in Leipzig »Die Summa des Simon von Bisignano und seine Glossen« (Sonderabdruck 1926).

10. Ferner wurde vorgelegt das Werk des Inhabers der goldenen Leibniz-medaille Hrn. Gouverneur a. D. Dr. Heinrich Schnee »German Colonization past and future« (London 1926) und

11. das Buch des Mitarbeiters der Kant-Ausgabe Hrn. Arthur Warda »Briefwechsel zwischen Karl Rosenkranz und Varnhagen von Ense« (Königsberg i. Pr. 1926).

Serienenden und molekulare Felder.

Von F. Paschen.

Hierzu Taf. I.

J. Stark[1] hat die Verbreiterung von Spektrallinien zurückgeführt auf die von ihm entdeckten Wirkungen elektrischer Felder und dabei die Annahme gemacht, daß die Moleküle eines Gases bei hinreichender Dichte die nötigen Felder hervorbringen. Dieser Gedanke wurde von Debye[2] durch eine Überschlagsrechnung über die Größe der zu erwartenden Felder bestätigt. Debye errechnete nämlich durch eine einfache Dimensionsbetrachtung die Größenordnung der mittleren Felder in einem Gase bei Atmosphärendruck, wenn das Gas bestand: 1. aus einfach geladenen Ionen, 2. aus Dipolen (z. B. HCl), 3. aus Molekülen, welche sogenannte elektrische Trägheitsmomente besitzen (z. B. N_2). Im ersten Falle ergab sich die enorm hohe Größenordnung von 1.35×10^6 Volt/cm für das mittlere elektrische Feld. Genauere Berechnungen der zu erwartenden Felder rühren bekanntlich von Holtsmark[3] her, der so weit kam, daß er die beobachtete Verbreiterung der Wasserstofflinien ziemlich gut rechnerisch deuten konnte.

Im folgenden sei eine Wirkung derartiger von Ionen herrührender Molekularfelder behandelt, welche erstens eine deutliche Demonstration der Gedanken von Stark und der Rechnungen von Debye und Holtsmark ist, und mit welcher weiter ein bisher noch nicht bekanntes Phänomen verknüpft ist. Dieses besteht in einer auffälligen Verstärkung der Lichtemission am Ende einer Serie. Die letzten Serienglieder, welche man in der Emission erzeugen kann, sind auffallend verstärkt. Außerdem beginnt zwischen ihnen ein kontinuierliches Emissionsband, welches in gleicher Intensität wie die letzten Linien die Fortsetzung der Serie bildet und sich weit über die Grenze der Serie hinaus erstreckt.

Ein kontinuierliches Emissionsspektrum hinter der Grenze der Balmerserie des Wasserstoffes von 3600 bis 2000 A°E mit einem Maximum bei 2500 A°E findet Stark[4] im Kanalstrahllicht. Da kein Spektrogramm gegeben ist, muß es nach der Beschreibung zweifelhaft erscheinen, ob es zu den hier behandelten Erscheinungen gehört. Ferner beschreibt Hartmann[5] im Spektrum

[1] J. Stark, Elektr. Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914.
[2] P. Debye, Physik. Zeitschr. 20, S. 160, 1919.
[3] J. Holtsmark, Physik. Zeitschr. 20, S. 162, 1919; 25, 73, 1924.
[4] J. Stark, Ann. d. Phys. 52, 255, 1917: 54, 19, 1917.
[5] J. Hartmann, Physik. Zeitschr. 18, 429, 1917.

einiger Wasserstoffsterne eine kontinuierliche Fortsetzung der Balmerserie in Absorption. Vorher schon hatte Wood[1] eine kontinuierliche Fortsetzung der Absorptions-Hauptserie des Natriums bei dichtem Dampf gefunden, was von Holtsmark[2] bestätigt und auf Kaliumdampf ausgedehnt wurde. Dies letzte Phänomen scheint nach den Angaben Woods alle Merkmale des von mir beobachteten Emissionsphänomens zu besitzen. Wood fand zum Beispiel eine Verstärkung der letzten Absorptionslinien durch Vermehrung des Druckes. Die Angaben von Holtsmark stimmen damit überein.

Diese Beispiele wurden im Sinne der Bohrschen Theorie von Bohr[3], Debye[4] und Holtsmark gedeutet. Eine der beiden Energiestufen, deren Differenz die Frequenz bedingt, ist nicht eine Quantenbahn des Elektrons, sondern wird durch die kinetische Energie eines freien Elektrons gegeben. Wenn z. B. ein freies Elektron mit dem Betrage E an kinetischer Energie in den 2p-Zustand eines Atomspektrums eingefangen wird, entsteht eine um E/h größere Frequenz als 2p, was eine kontinuierliche Fortsetzung der Serien 2p — ms und 2p — md jenseits der Grenze 2p ergeben würde, wenn E variiert. Meine Versuche zeigen eine Anordnung, bei der sich aus den Spektren ablesen läßt, wie solche Phänomene zustande kommen können.

Fig. 1 zeigt das Ende der Serie 2p — md des Spektrums HeI, emittiert in Längssicht von der positiven Lichtsäule in einer Quarzglasröhre von 4 mm Durchmesser und 25 mm Länge bei 0.06 Amp. Die letzten Linien sind schwach und werden bei erheblich längerer Belichtung nicht mehr erheblich verstärkt oder vermehrt. Alle Linien sind scharf und haben die der Serie 2p — md entsprechenden Wellenlängen.

Fig. 2 zeigt dasselbe Spektrum emittiert von der inneren leuchtenden Glimmschicht einer Aluminium-Zylinder-Kathode in Richtung der Achse. Der Zylinder hat einen kreisförmigen Querschnitt von 12 mm Durchmesser und eine Länge von 25 mm. Der Druck des Heliums war etwa $^1/_2$ mm. Die Linien sind von gleicher Schärfe wie in 1. Ihre Intensität nimmt noch etwas schneller ab als in 1. Oben und unten sind die Starkeffekte zu sehen, die in dem schmalen Dunkelraum in der Nähe der Kathode entstehen und dem dortigen elektrischen Felde entsprechen. Diese Starkeffekte bestehen: 1. aus einer Verschiebung der Linie 2p — md im Felde, 2. aus den neu auftretenden verbotenen Kombinationen 2p — mp, — mf, — mg, — mh .... Die Komponente 2p — mp liegt getrennt bei größerer Wellenlänge und ist so geneigt, daß der Term mp mit wachsendem Felde größer wird. Auch die md-Komponente verhält sich so. Doch liegt der Schwerpunkt der Intensität in den übrigen (mf, mg ...) Komponenten, welche auf der anderen Seite liegen und mit wachsendem Felde kleiner werden.

Fig. 3 zeigt dasselbe Spektrum des Inneren der Zylinderkathode bei einem Gasdruck von etwa 2 mm, und Fig. 4 bei etwa 5 mm. Die Belichtungszeit der 4 Spektren 1 bis 4 war die gleiche von etwa 20 Stunden.

[1] R. W. Wood, Phil. Mag. 18, 530, 1909.
[2] J. Holtsmark, Physik. Zeitschr. 20, 88. 1919.
[3] N. Bohr, On the Quantum Theory of Line-Spectra II § 6, 1918.
[4] P. Debye, Physik. Zeitschr. 18, 428, 1917.

In diesen Aufnahmen 3 und 4 tritt der erwähnte Effekt auf. Die letzten Linien sind mit dem Drucke zunehmend verstärkt und verbreitert. Jede Linie besteht in der Mitte nicht nur aus derjenigen 2p — md, sondern aus der Gesamtheit der Komponenten, welche in 2 oben und unten zu sehen sind und den Starkeffekt darstellen. Insbesondere ist die Komponente 2p — mp als getrennt liegender schwacher Wisch auf der langwelligen Seite bei mehreren Linien der Fig. 3 und 4 deutlich sichtbar. Die Breite der Hauptlinie und dieser Nebenlinie ist dieselbe wie das Gebiet, über welches in 2 oben und unten die Starkkomponenten verschoben erscheinen.

Dazu tritt der beschriebene kontinuierliche Grund, welcher ebenso wie die letzten Serienlinien mit wachsendem Drucke verstärkt wird. Er reicht über die Grenze bei 3420.9 A°E hinaus deutlich auf 3 bis 3180, auf 4 bis 3130 A°E[1]. Die Banden sind solche des Heliums, welche bei größerem Druck stärker hervortreten.

Fig. 5 (Druck etwa $^1/_2$ mm) und Fig. 6 (Druck etwa 2 mm) zeigen dasselbe Phänomen für die Hauptserie 2s — mp von HeI: Verschiebung der Linie (5 oben und unten) nach großer Wellenlänge im Felde, entsprechende Verbreiterung der Mitte in Fig. 6. In 6 schwache, aber deutliche verbreiterte Nebenlinie bei kürzerer Wellenlänge, welche der Gesamtheit der verschobenen Komponenten 2s — md, mf, mg ... entspricht (in Fig. 5 nicht sichtbar). Nach den Messungen überwiegt in ihr 2s — md. Die Wellenlängen der Hauptlinie werden in der Mitte auf Fig. 5 richtig, auf Fig. 6 am kurzwelligen linken Rande richtig, im Intensitätsmaximum um 0.1 bis 0.2 A°E zu hoch gemessen. Der kontinuierliche Grund reicht deutlich über die Seriengrenze bei 2599.7 AE hinaus bis etwa 2500 A°E.

Fig. 6a zeigt dieselbe Serie bei 4 mm Druck aufgenommen mit kleinerer Dispersion.

Aus diesen Tatsachen folgt, daß für größere Drucke als etwa 2 mm Quecksilber solche Verbreiterungen auftreten, wie den Starkeffekten entsprechen, welche in den äußeren Feldern des Dunkelraumes (Enden der Linien in 2 und 5) zu sehen sind. Die Linien müssen daher durch elektrische Felder ähnlicher Größe gestört werden.

Nun ist aber ein durch Sonden meßbares äußeres Feld im Glimmlichte innerhalb des Zylinders nicht[2] zu konstatieren. Es gibt ein Kennzeichen, welches beweist, daß hier ein äußeres Feld viel kleiner sein muß als in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung. In der positiven Säule einer Kapillaren nämlich, wo Felder von der Größenordnung 50 Volt/cm gemessen werden, tritt stets die verbotene Linie 2s — 3d auf, die Linie 3809.09 A°E. Sie wurde schon von C. RUNGE und F. PASCHEN[3] bemerkt, weil sie mit der Linie 2P — 1 1 S des Parheliumspektrums koinzidiert und diese Linie zu stark erscheinen läßt. Die Deutung der störenden Linie rührt von WALTHER RITZ her, der sie zur Begründung seines Kombinationsprinzipes mit benutzte. In der Glimmschicht

[1] Dies entspricht einer Geschwindigkeit von $^1/_3$ Volt des freien Elektrons, das eingefangen wird.

[2] H. SCHÜLER, Physik. Zeitschr. 22, S. 264, 1921.

[3] C. RUNGE und F. PASCHEN, Astrophys. Journ. 3, S. 15, 1896, Anm. 1.



im Inneren des Zylinders tritt diese verbotene Linie bedeutend schwächer auf. Bei niederem Druck ist die Verstärkung der Parheliumlinie 2P — 11S fast nicht bemerkbar. Fig. 7 und 8 zeigen dies, wenn man das Intensitätsverhältnis des Paares 2P — 11D und 2P — 11S mit dem der beiden benachbarten Paare vergleicht: einmal auf dem Spektrogramm des positiven Lichtes Fig. 7 und zweitens auf dem des Glimmlichtes in der Zylinderkathode Fig. 8. Bei hohem Druck ist die Parheliumlinie mehr verstärkt, aber immer noch nicht so sehr wie im positiven Lichte auf Fig. 7.

Es folgt die paradoxe Tatsache, daß äußere Felder, welche irgendwie mit der Größe 50 Volt/cm vergleichbar sind, nicht vorhanden sind, weil sonst die für Felder so empfindliche verbotene Linie (wie im Bogenspektrum der Alkalien) so stark sein müßte wie im positiven Licht. Trotzdem verraten in hohen Seriengliedern Felder von der Größenordnung 1000 Volt/cm ihr Wirken. Dieser Widerspruch gibt den Fingerzeig für die Deutung des Entladungsphänomens und der damit verbundenen starken Vermehrung der Intensität am Serienende.

Von dem Drucke 2 mm an ändert sich schon das Aussehen und die Helligkeit im Inneren des Zylinders. Bei Vermehrung des Druckes tritt plötzlich in der Umgebung der Achse eine Vermehrung der Helligkeit auf. Dasselbe erreicht man mit Flaschen-Funken-Entladungen (mit Induktor, Kapazität und Funkenstrecke parallel der Röhre) schon bei niederen Drucken, während bei Gleichströmen zwischen 0.02 und 0.10 Amp. der Druck der entscheidende Faktor zu sein scheint. Obige Aufnahmen sind sämtlich mit Gleichstrom von etwa 0.07 Amp. gewonnen. Man erhält qualitativ dasselbe mit 0.02 Amp. bei gleichen Drucken.

In der Nähe der Kathode nimmt das Potential bis zum Glimmlicht um den Kathodenfall zu. Bei den Versuchen der Figur 2 und 5 war der Dunkelraum etwa 1 mm dick, und der Potentialanstieg betrug etwa 300 Volt. Mit Rücksicht auf den steilen Verlauf in nächster Nähe der Kathode gibt das für das Gebiet, in welchem in Fig. 2 und 5 noch ein Leuchten photographiert ist, die Größenordnung 1000 Volt/cm. Wenn nun in der Glimmschicht noch die geringste Potentialzunahme nach der Zylinderachse hin vorhanden ist, kann es nicht zu einer sehr beträchtlichen Ansammlung von langsamen Elektronen neben den positiven Ionen kommen, weil die ersteren erhebliche von der Kathode fortgerichtete Geschwindigkeiten erlangen und dadurch vor dem Einfangen bewahrt würden.

Sobald aber im Glimmlicht nach der Zylinderachse hin keine Potentialzunahme eintritt, kann sich hier ein Gleichgewichtszustand herstellen, bei dem außerordentlich viele positive Ionen und zugleich langsame Elektronen vorhanden sind, welch letztere von den ersteren ergiebig eingefangen werden. Selbst eine Wiederabnahme des Potentials nach der Achse zu scheint möglich. Die anfänglich radial fliegenden Elektronen werden durch gegenseitige Beeinflussung auf ihrem weiteren Wege axial gerichtet. Es kommt zu einer Ansammlung von Elektronen in der Region der Achse, und die positiven Ionen bewegen sich dahin. W. H. McCurdy und P. Dalton[1] finden den Potentialgradienten

[1] W. H. McCurdy and P. Dalton, Phys. Rev. 27, S. 163, 1926.



im Glimmlicht bei niederen Heliumdrucken positiv. Bei wachsendem Drucke wird er kleiner, dann Null und bei 2.9 mm Druck negativ. Dieser mit planer Kathode gefundene Verlauf muß im Inneren der Zylinderkathode ausgesprochener sein.

Es ist verständlich, daß die Zahl der positiven Ionen mit dem Drucke zunehmen muß, da diese aus dem Raume nur durch Diffusion herausgelangen können, aber bei größerem Drucke kleinere Weglängen haben. Damit bei gleichem Strome die gleiche Zahl die Kathode erreicht, muß eine vermehrte Zahl angesammelt sein. W. H. McCurdy und P. Dalton finden, daß die Konzentration der Ionen und zugleich der Elektronen im Glimmlicht ungefähr proportional dem Drucke zunimmt.

Hiermit hängt das Phänomen zusammen, daß die Intensität jeder Serienlinie des Heliums sowohl mit der Stromstärke wie mit dem Drucke (anfangs beiden proportional) zunimmt. Bei gleicher Stromstärke nimmt die Intensität jeder der stärksten Heliumlinien mit dem Drucke zu bis zu einem bei etwa 5 mm Druck erreichten Maximum (nach eigenen bolometrischen Messungen).

Also die stark vermehrte Zahl positiver Ionen neutralisiert sich durch Einfangen der ebenfalls zahlreich vorhandenen Elektronen. Diesen Einfangeprozeß zeigt uns das verstärkte Serienende. Dabei liegen die positiven Ionen so dicht gepackt, daß dieses Einfangen unter der störenden Einwirkung benachbarter Ionen vor sich geht. Eine Überschlagsrechnung gibt bei 2 mm Druck einen mittleren Abstand benachbarter Gasteilchen von 2.4×10^{-6} cm. Die große Achse der 25. Quantenbahn hat die Länge 6×10^{-6} cm. Das elektrische Feld eines einfach geladenen Ions in 10^{-5} cm Entfernung hat die Größenordnung 1000 Volt/cm. Nach Debye ist ferner die Größenordnung des mittleren molekularen Feldes von einfach geladenen Ionen gegeben durch $en^{2/3}$, wo e die Elementarladung, n die Zahl der Ionen im cm^3 bedeuten. Nach Holtsmark käme noch der Faktor 1.25×2.61 dazu. Bei Atmosphärendruck würde daraus eine mittlere Feldstärke von 4.2×10^6 Volt/cm errechnet werden. Ein Feld von 1000 Volt/cm, welches nach meiner Schätzung die letzten Linien beeinflußt, würde danach einem Partialdruck p der Ionen entsprechen, der ist: $p = 760\left(\frac{1000}{4.2 \times 10^6}\right)^{3/2} = 0.00279$ mm.

Es käme also bei einem Gesamtdruck von 2 mm auf $2/0.00279 = 717$ Teile ein Ion, und der mittlere Abstand dieser Ionen voneinander wäre 2.2×10^{-5} cm.

Da wir nicht wissen, ob die 1000 Volt/cm, welche die hohen Serienlinien beeinflussen, im Sinne der Rechnung von Holtsmark das mittlere Feld bedeuten[1], ist die letzte Rechnung unsicher. Immerhin zeigt sie, daß wir in der Glimmschicht mit Ionisierungen von anderer Größenordnung zu rechnen haben als in der positiven Lichtsäule, wo nach bisherigen Schätzungen etwa auf 10^5 Teile ein Ion zu kommen scheint. Es ist danach verständlich, daß hier erst bei einer bedeutenden Vermehrung der Ionisierungsmöglichkeit ähnliche Phänomene zu erwarten sind. Bei einem Gasdruck von 5 mm und einer

[1] Sie werden ein zu hohes Feld bedeuten, womit p und die Konzentration der Ionen kleiner wird.



gegenüber den Versuchen im Glimmlicht etwa 100fach vermehrten Stromdichte habe ich in der Kapillaren einer Geißlerröhre aus Quarzglas Anzeichen für den Beginn einer Linien-Verbreiterung und -Verstärkung mit kontinuierlicher Fortsetzung gefunden. Das Ausbleiben des Phänomens in dem positiven Lichte bei gleichem Gasdruck und gleicher Stromdichte beweist, daß nicht die neutralen Heliumatome, sondern die im Glimmlicht angereicherten Ionen die Ursache sind. Wir verstehen das Spektralbild demnach so, daß es die durch die große Zahl der Ionen enorm vermehrte und zugleich gestörte Einfangung von Elektronen darstellt. Wo ein Elektron nach Größe und Richtung der Geschwindigkeit zu dem (durch das variabele Feld erweiterten) Bereich einer Quantenbahn m_k gehören kann, trägt seine Einfangung zur Verstärkung der breiten Serienlinie $2p - m_k$ bei. Wenn es seiner Geschwindigkeit nach zwischen diese Quantenbereiche oder über sie hinaus gehört, erzeugt seine Einfangung kontinuierlichen Grund zwischen den Serienlinien oder in dem Gebiete über sie oder über die Seriengrenze hinaus. Die durch die Ionenfelder verbreiterten Quantenbereiche greifen bald so übereinander, daß auch aus diesem Grunde die letzten Serienlinien zu einem kontinuierlichen Leuchten verfließen. In der Serie $2p - md$ ist als letzte Serienlinie noch die $m = 21$ eben zu unterscheiden, in derjenigen $2s - mp$ noch diejenige $m = 25$. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den 2 Serienenden des Parheliumspektrums.

Th. Lyman[1] betont, daß die von ihm entdeckte Serie $1S - mP$ am Ende in einen kontinuierlichen Grund fortgesetzt erscheint. Sein Spektrogramm zeigt deutlich eine große Ähnlichkeit mit den hier besprochenen Serienenden.

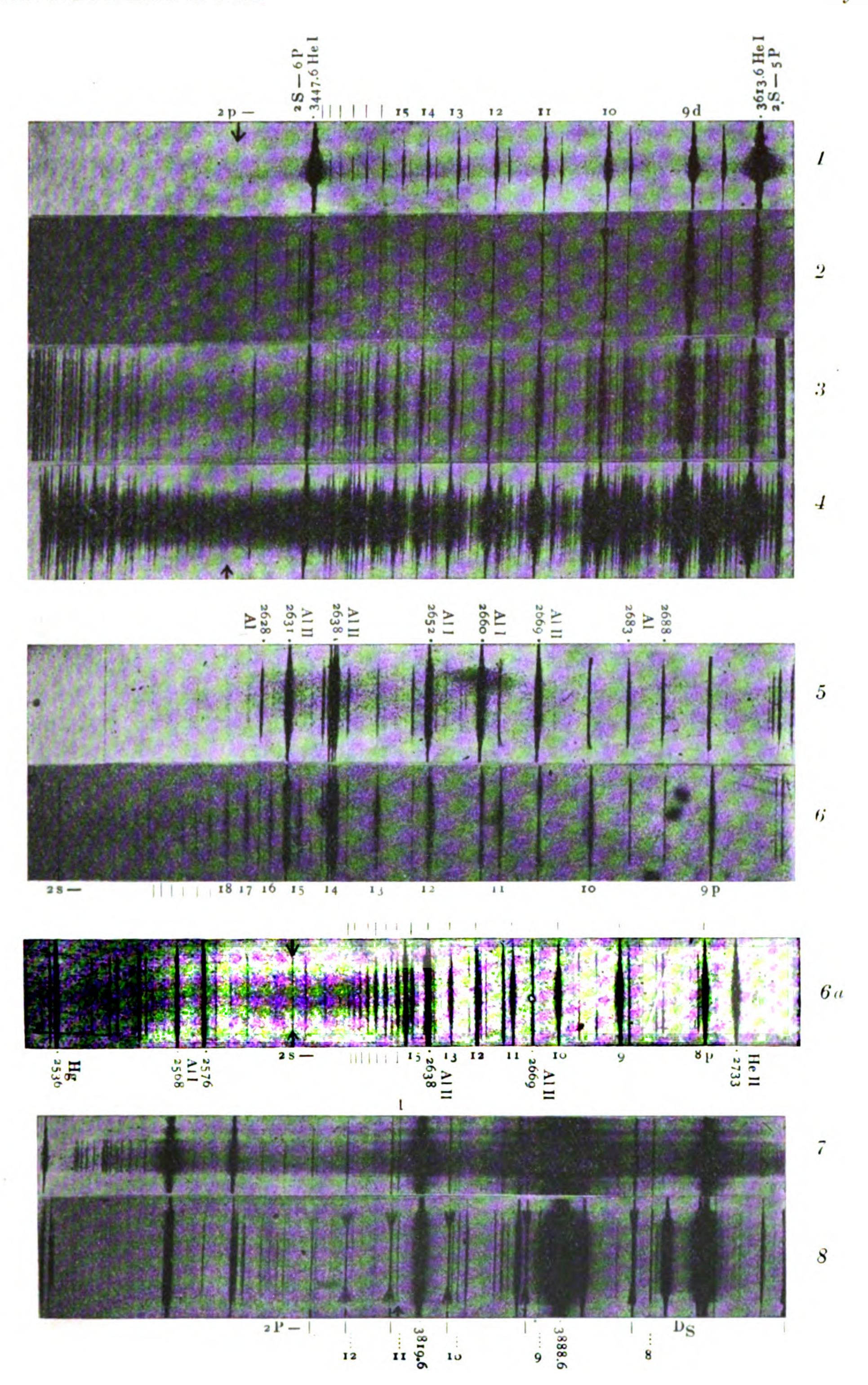
Aber es werden nur die hohen Quantenbahnen eines leuchtenden Atoms durch Felder beeinflußt. Die Bahn 3d wird noch nicht erheblich gestört. Das leuchtende Atom war ein Ion und behält seinen Ort zwischen den anderen Ionen während des Einfangungsprozesses, der zu Ende ist, ehe ein Ortswechsel eintritt. In der Nachbarschaft jedes Ions herrscht demnach nur sein eigenes Feld. Das Feld der übrigen Ionen verschwindet hier. Also halten sich die Ionen infolge ihrer abstoßenden Wirkungen in maximalen mittleren Abständen. Das eigene Feld eines Ions reicht ungestört nahe bis zur 3d-Bahn eines von ihm eingefangenen Elektrons, welche 70- bis 200mal dem Kern näher ist als das Aphel der 25. Quantenbahn.

Wäre das leuchtende Teilchen vor seiner Lichterregung ein neutrales Atom gewesen, so wäre es unwahrscheinlich, daß es sich immer außerhalb von Feldbereichen befunden hätte. Das Leuchten im Glimmlicht ist daher vorwiegend ein Einfangungsleuchten. In der positiven Lichtsäule herrscht ein schwaches, überall wirksames Feld, wie die empfindliche Linie $2s - 3d$ beweist. Hier ist das Leuchten ein Anregungsleuchten, bei dem es selten zu völliger Ionisierung kommt. Zwischen beiden Leuchtphänomenen bestehen auch deutliche Verschiedenheiten in den Intensitäten der Serienlinien.

Der mittlere Abstand der Ionen wird mit steigendem Drucke kleiner. Die Verbreiterung und Verstärkung am Serienende setzt erst bei demjenigen Drucke ein, bei welchem die höheren Quantenbahnen eines eingefangenen

[1] Th. Lyman, Astrophys. Journ. 60, S. 1, 1924.





Paschen: Serienenden und molekulare Felder.

Elektrons in die Feldgebiete benachbarter Ionen hineinreichen. Mit weiter steigendem Drucke wird dies Phänomen schnell deutlicher, wie die Zunahme der Verbreiterung und Intensität der Linien und des kontinuierlichen Spektrums mit dem Drucke in Fig. 3 und 4 zeigt. Da diese Erscheinung unterhalb des kritischen Druckes völlig ausbleibt (Fig. 2 und 5), müssen die Ionen sich immer in größtmöglichen Abständen voneinander halten.

Das ähnliche Phänomen in der Hauptserie von Na I (nach WOOD und HOLTSMARK) wird auf elektrische Felder zurückzuführen sein, welche sowohl der Dipolwirkung der angeregten wie der Ionenwirkung der ionisierten Atome entsprechen. Nach WOOD entsteht auch dies erst bei größeren Drucken.

Viele der Ionen leuchten selber unter Emission des Spektrums He II. Linien dieses Spektrums zeigen eine ähnliche Verbreiterung, welche sich über ein ebenso großes Gebiet erstreckt, wie das Gebiet ist, über das im Dunkelraum die Starkkomponenten derselben Linien auf dem Spektogramm verschoben erscheinen. Dies ist beobachtet an den Linien

m =	6	7	8	9	10	11	12	13
λ =	2733	2511	2385	2306	2253	2215	2187	2165 A°E

der Serie $\nu = 4N/3^2 - 4N/m^2$.

Mit wachsendem Drucke nimmt die Verbreiterung dieser Linien in der Mitte zu. Außerdem zeigt sich eine zunehmende Verstärkung in der Mitte. Diese Linien verhalten sich also ebenso wie die letzten Serienlinien des He I. Da es unwahrscheinlich ist, daß eine erhebliche Zahl von He^{++}-Kernen vorhanden sind, handelt es sich um die Anregung des Leuchtens von He^{+}-Ionen und zugleich um eine Störung dieses Leuchtens. Beides scheint hiernach mit dem behandelten Phänomen der vermehrten und gestörten Einfangung von Elektronen durch He^{+}-Ionen parallel zu gehen. Man kann sich etwa vorstellen, daß freie Elektronen, welche eine zu große kinetische Energie besitzen, um eingefangen zu werden, He^{+}-Ionen zum Leuchten anregen und erst durch ein Ion eingefangen werden, wenn ihre kinetische Energie auf solche Weise genügend erniedrigt ist. Diese Einfangung würde so durch ein leuchtendes Ion gestört sein können, und das Leuchten des letzteren könnte wiederum durch Rückwirkung gestört sein.

Das behandelte Phänomen wurde gefunden gelegentlich einiger mit Unterstützung durch den Japanausschuß und den Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft sowie durch die Helmholtz-Gesellschaft unternommener Versuche. Die Ausarbeitung geschah an der Reichsanstalt mit Hilfe eines HILGERschen Quarzspektographen größter Art (E_1 in Littrow-Anordnung), mit welchem die reproduzierten Spektren gewonnen wurden.



Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung.

Von Adolf Kneser
in Breslau.

I.

Nach Weierstrass setzt man die einfachste Aufgabe der Variationsrechnung in der Form

$$\delta\int F(x, y, x', y')\,dt = 0$$

an; dabei bedeuten Akzente die Ableitungen nach dem Parameter t, und F ist eine in x' und y' homogene, vielleicht nur positiv homogene Funktion erster Stufe, so daß die Gleichung

$$F(x, y, \alpha x', \alpha y') = \alpha F(x, y, x', y') \tag{1}$$

jedenfalls für beliebige positive Werte von α gilt. Bezeichnet man dann, wie üblich, die Teilableitungen durch Fußmarken, so daß

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial x'} = F_{xx'}$$

gesetzt wird usf., so gibt es eine Größe $F_1(x, y, x', y')$ oder F_1, die die Gleichungen

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{-F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} \tag{2}$$

erfüllt und in x' und y' positiv homogen von der Stufe -3 ist; setzt man ferner allgemein

$$T_F = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y'),$$

so gelten die Identitäten

$$F_x - F'_{x'} = y'T_F, \quad F_y - F'_{y'} = -x'T_F, \tag{3}$$

und die Eulersche Gleichung der Aufgabe, die Differentialgleichung der Extremalen, die zunächst in den wesentlich gleichbedeutenden Formen

$$F_x - F'_{x'} = 0, \quad F_y - F'_{y'} = 0 \tag{4}$$

erscheint, läßt sich einfach schreiben

$$T_F = 0. \tag{5}$$

Der nächstliegende und meistbehandelte Sonderfall, in dem man die Extremalen durch Quadraturen bestimmen kann, ist nun der, daß eine der Größen x und y, etwa x, in der Funktion F nicht vorkommt, so daß die Aufgabe lautet

$$\delta \int F(y, x', y') dt = 0 .$$

Die erste der Gleichungen (4) gibt dann, unter a einen Festwert verstanden,

$$F_{x'} = a . \tag{6}$$

Wir betrachten bei dieser Aufgabe eine einfach unendliche Schar von Extremalen, auf denen a von einer zur andern veränderlich ist, so daß man auf ihnen

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a), \quad x' = \xi_t, \quad y' = \eta_t$$

setzen kann. Diese Werte in die Gleichung (6) eingesetzt, ergibt sich eine Identität in t und a, die man nach a differenzieren kann; es ergibt sich

$$F_{x'y}\eta_a + F_{x'x'}\xi_{ta} + F_{x'y'}\eta_{ta} = 1 . \tag{7}$$

Anderseits gibt die Gleichung (5), da $F_x = F_{xy'} = 0$ zu setzen ist,

$$-F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0 \tag{8}$$

oder

$$F_{yx'} = F_1(\xi_t \eta_{tt} - \xi_{tt}\eta_t), \quad F_1 = F_1(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t).$$

Setzt man diesen Wert in das erste Glied der Gleichung (7) und benutzt in den andern Gliedern die Gleichungen (2), so ergibt sich

$$F_1\{\eta_a(\xi_t\eta_{tt} - \xi_{tt}\eta_t) + \eta_t(\eta_t\xi_{ta} - \eta_{ta}\xi_t)\} = 1$$

oder auch

$$-\eta_t^2 F_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t}\right) = 1 ,$$

oder endlich, wenn man wie gewöhnlich

$$\Delta(t, a) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)}$$

setzt,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\Delta(t, a)}{\eta_t}\right\} = -\frac{1}{\eta_t^2 F_1} \tag{9}$$

oder etwas unbestimmter

$$\Delta(t, a) = -\eta_t \int \frac{dt}{\eta_t^2 F_1} = -y' \int \frac{dt}{y'^2 F_1} = -y' \int \frac{dt}{F_{x'x'}} . \tag{10}$$

Die Gleichung

$$\Delta(t, a) = 0 , \tag{11}$$

die durch Elimination der Differentiale aus den Gleichungen

$$\xi_t dt + \xi_a da = 0 , \quad \eta_t dt + \eta_a da = 0$$

entsteht, liefert nun bekanntlich die Punkte, in denen die Extremalen der betrachteten Schar ihre Hülle berühren. Gehen diese Kurven durch einen festen

Punkt o und wird durch die Annahme $a = a_0$ eine bestimmte von ihnen herausgegriffen, so ist auf dieser der erste in der Richtung wachsender t vom Punkte o aus erreichte Punkt, in welchem $\Delta(t, a_0) = 0$ wird, der zum Punkte o konjugierte Punkt; wir nennen aber auch die folgenden Punkte, in denen $\Delta(t, a_0) = 0$ sein sollte, zu o konjugiert. Für die Auffindung derselben oder die Diskussion der Gleichung (11) liefert nun die Gleichung (9) wesentliche Vorteile bei einer Voraussetzung, die man vernünftigerweise machen darf, daß nämlich auf der Extremale $a = a_0$, soweit wir sie betrachten, die Größe

$$F_1 = F_1(\xi(t, a_0), \quad \eta(t, a_0), \quad \xi_t(t, a_0), \quad \eta_t(t, a_0))$$

von Null verschieden und festen Vorzeichens bleibe, eine Voraussetzung, die der Gleichung (8) zufolge verbürgt, daß auf der betrachteten Extremale die Größen x, y, x', y' als stetige und differenzierbare Funktionen eines Parameters t bestimmbar sind. Die rechte Seite der Gleichung (9) für $a = a_0$ hat dann ein festes Vorzeichen, und wenn die Gleichung

$$\eta_t(t, a_0) = 0$$

an zwei Stellen 1 und 2, für $t = t_1$ und $t = t_2$ gilt, die nicht zu o konjugiert sind, so ändert sich zwischen ihnen die Größe $\Delta(t, a_0)/\eta_t(t, a_0)$ einsinnig, geht also notwendig von $-\infty$ bis $+\infty$ oder umgekehrt, je nachdem F_1 positiv oder negativ ist. Auf dieser Strecke muß also auch genau einmal $\Delta(t, a_0) = 0$ werden, d. h. zwischen 1 und 2 liegt ein zum Punkte o konjugierter, dessen Existenz also allein aus dem Vorhandensein der zwei Scheitelpunkte 1 und 2 erschlossen wird; so nennen wir die Punkte, deren Tangente der x-Achse parallel läuft. Sind unzählige Scheitelpunkte vorhanden, so gibt es auch unzählige konjugierte Punkte zu jedem Punkte o, durch den eine Extremalenschar mit a als veränderlichem Parameter gelegt werden kann.

II.

Kann man offenbar wichtige Folgerungen aus der Gleichung (9) ziehen, so ist auch der noch genauer zu definierende Ausdruck (10) von Bedeutung.

Zunächst ist das Integral

$$\int \frac{dt}{y'^2 F_1} = \int \frac{dt}{y'^2 F_1(x, y, x' y')} = \int \frac{dt}{F_{x'x'}}, \tag{12}$$

das wir jetzt längs der bestimmten Extremale $a = a_0$, also für $x = \xi(t, a_0)$ usf. gebildet denken, von der Wahl der Integrationsveränderlichen t unabhängig. Die Gleichung (1) ergibt nämlich

$$F_{x'x'}(x, y, \alpha x', \alpha y') = \alpha^{-1} F_{x'x'}(x, y, x', y');$$

führt man daher die mit t wachsende neue Unabhängige τ ein mit der Beziehung $dt/d\tau > 0$, so kann man $\alpha = dt/d\tau$ setzen und erhält sofort

$$\int \frac{d\tau}{F_{x'x'}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)} = \int \frac{dt}{F_{x'x'}(x, y, x', y')},$$

womit die behauptete Invarianz bei ungeänderter Anwachsrichtung der Integrationsveränderlichen ersichtlich wird.

Um für die weitere Untersuchung dieses Integrals (12) eine bequeme Grundlage zu gewinnen, nehmen wir an, F sei eine analytische Funktion und regulär in den Wertsystemen (x, y, x', y'), die durch die Elemente des betrachteten Stücks der Extremale $a = a_0$ bei der festgesetzten Richtung wachsender t geliefert werden.

Sei nun 1 ein Scheitel unserer Extremale, d. h. $y' = 0$ für den Wert $t = t_1$. Differenziert man die EULERsche Gleichung (8) oder

$$-F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0,$$

so ergibt sich

$$F_{yx'x'}x'' + F_{yx'y'}y'' + F_{yyx'}y' = F_1(x'y''' - x'''y') + (x'y'' - x''y')F_1',$$

und die linke Seite dieser Gleichung kann nach den Gleichungen (2) geschrieben werden

$$x''y'^2 \frac{\partial F_1}{\partial y} - x'y'y'' \frac{\partial F_1}{\partial y} + F_{yyx'}y',$$

verschwindet also mit y' an der Stelle $t = t_1$, so daß die vorige Gleichung ergibt

$$F_1'y'' + F_1 y''' \,\Big|^{t_1} = 0. \tag{13}$$

Anderseits ergibt eine TAYLORsche Entwicklung an der Stelle $t = t_1$, indem wir durch die Kopfmarke 1 immer andeuten, daß $t = t_1$ gesetzt wird, und durch $\mathfrak{P}$ vieldeutig Potenzreihen bezeichnen,

$$\frac{1}{y'^2 F_1} = \left(\frac{1}{t - t_1}\right)^2 \left[\frac{1}{(y''F_1)^1}\right]^2 \left(1 - (t - t_1)(y''F_1' + y'''F_1)^1 + (t - t_1)^2 \mathfrak{P}(t - t_1)\right)$$

oder der Gleichung (13) zufolge

$$\frac{1}{y'^2 F_1} = \left(\frac{1}{t - t_1}\right)^2 \left[\frac{1}{(y''F_1)^1}\right]^2 \left(1 + (t - t_1)^2 \mathfrak{P}(t - t_1)\right)$$

oder kurz mit Festwerten c

$$\frac{1}{y'^2 F_1} = \frac{c_{-2}}{(t - t_1)^2} + c_0 + c_1(t - t_1) + \cdots.$$

Ist nun t_1 der einzige Scheitelwert ($y' = 0$) auf der Strecke $t_2 \cdots t_3$, wobei $t_2 < t_1 < t_3$, so definiert man zweckmäßig

$$\int_{t_2}^{t_3} \frac{dt}{y'^2 F_1} = \left[\frac{-c_{-2}}{t - t_1} + c_0(t - t_1) + \frac{c_1}{2}(t - t_1)^2 + \cdots\right]\Bigg|_{t_2}^{t_3}. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich nämlich, wenn man t als komplexe Veränderliche auffaßt; zu beiden Seiten der reellen Strecke $t_2 \cdots t_3$ läßt sich ein etwa rechteckiges Gebiet abgrenzen, in welchem die Größe $1/y'^2 F_1$ den einzigen Doppelpol

t_1 mit dem Residuum 0 besitzt, der also bei der Integration kein logarithmisches Glied liefert. Man integriert etwa, unter ε einen hinreichend kleinen positiven Wert verstehend, zuerst reell von t_2 bis $t_1 - \varepsilon$, dann über einen Halbkreis $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt t_1 und dem Radius ε bis $t_1 + \varepsilon$, und nun wieder reell bis t_3, und findet so

$$\int_{t_2}^{t_1-\varepsilon} \frac{dt}{(t-t_1)^2} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{t_1 - t_2}, \quad \int_{t_1+\varepsilon}^{t_3} \frac{dt}{(t-t_1)^2} = \frac{-1}{t_3 - t_1} + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{dt}{(t-t_1)^2} = \frac{-1}{t-t_1}\Bigg|_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} = \frac{-2}{\varepsilon},$$

also auf dem angegebenen teilweise komplexen Wege integriert

$$\int_{t_2}^{t_3} \frac{dt}{(t-t_1)^2} = \frac{-1}{t-t_1}\Bigg|_{t_2}^{t_3},$$

woraus dann die Formel (14) sofort folgt. Ist nun $t_2 < t < t_1$, so hat man

$$\int_{t_2}^{t} \frac{dt}{y'^2 F_1} = \left[\frac{-c_{-2}}{t-t_1} + c_0 (t-t_1) + \frac{c_1}{2}(t-t_1)^2 + \cdots\right]\Bigg|_{t_2}^{t},$$

und diese Größe wird, wenn t gegen t_1 heranrückt, unendlich mit dem Vorzeichen der Größe c_{-2}; setzt man weiter $t = t_3$ und nimmt t_3 sehr nahe bei t_1, so erhält man sehr große Werte mit dem Vorzeichen der Größe $-c_{-2}$. Das Integral

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{y'^2 F_1}$$

wird also bei der Definition (14) eine Funktion von t, die an der Stelle t_1 unendlich wird und von $+\infty$ zu $-\infty$ umspringt oder umgekehrt.

Gehört der Wert t_0 zur Stelle 0 und sind im Gebiet $t > t_0$ mehrere Scheitelwerte $t_1, t_1', \cdots$ vorhanden, so integriere man über jeden von ihnen in derselben Weise hinweg, wie es die Gleichung (14) für die Stelle t_1 an die Hand gibt; man kann auch in der Ebene der komplexen Größe t um jede der Stellen $t_1, t_1', t_1'', \cdots$ einen Halbkreis vom beliebig kleinen Radius ε schlagen und, indem man durch $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \cdots$ diese Halbkreise bezeichnet, als allgemeine Definition, wenn $t > t_1^{(n)}$ ist, ansetzen

$$D(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{y'^2 F_1} = \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} + \int_{\mathfrak{K}} + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_1'-\varepsilon} + \int_{\mathfrak{K}'} + \int_{t_1'+\varepsilon}^{t_1''-\varepsilon} + \int_{\mathfrak{K}''} + \cdots + \int_{t_1^{(n)}+\varepsilon}^{t},$$

immer rechts mit demselben Integranden $dt/y'^2 F_1$. Dann ist $D(t_0, t)$ eine auf einer reellen Strecke $t \geqq t_0$ in den Stellen $t_1, t_1', \cdots$ außerwesentlich singuläre, sonst reguläre Funktion von t, deren Ableitung

$$\frac{\partial D(t_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{y'^2 F_1}$$

ein festes Vorzeichen, dasjenige der Größe F_1 besitzt. Daraus folgt die einsinnige Änderung der Größe $D(t_0, t)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Singularitäten, etwa t_1 und t_1'; ist F_1 positiv, so wächst $D(t_0, t)$ beständig, geht also von $-\infty$ bis $+\infty$ und springt beim Durchschreiten einer singulären Stelle stets um von $+\infty$ zu $-\infty$, so daß die Größen c_{-2} alle positiv sind; ist F_1 negativ, gelten die entgegengesetzten Vorzeichen. Zwischen je zwei Scheitelwerten der Reihe $t_1, t_1', \cdots$ liegt also eine einzige Nullstelle der Größe $D(t_0, t)$.

Sind t_0 und t^0 zwei in dieser Weise zusammengehörige Werte, deren keiner zu den singulären gehört, so definiert die Gleichung

$$D(t_0, t^0) = 0$$

die Größe t^0 eine Strecke weit als reguläre Funktion von t_0, für die die Gleichung

$$\frac{\partial D(t_0, t^0)}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial D(t_0, t^0)}{\partial t^0} dt^0 = 0$$

gilt. Offenbar ist nun

$$\frac{\partial D(t_0, t)}{\partial t_0} = -\frac{1}{y'^2 F_1}\Bigg|^{t_0};$$

in der vorletzten Gleichung haben also die Faktoren von dt^0 und dt_0 entgegengesetztes Vorzeichen, so daß dt_0/dt^0 positiv wird; die Werte t_0 und t^0 rücken in demselben Sinne fort.

III.

Um zu zeigen, daß Stellen wie $t = t_0$ und $t = t^0$ auf der betrachteten Extremale $a = a_0$ konjugiert sind im Sinne der im § I angeführten Definition, ist wesentlich zu benutzen, daß erstere oder die Stelle 0 kein Scheitelpunkt ist. Nur unter dieser Annahme läßt sich das Büschel der durch 0 gehenden Extremalen durch Gleichungen

$$x = \xi(t, a), \; y = \eta(t, a)$$

darstellen, in denen die Funktionen ξ und η für $a = a_0$ regulär sind.

Sei, um dies als möglich nachzuweisen, für t die Bogenlänge gewählt; im Punkte 0 seien die verschiedenen Extremalen durch die Werte α unterschieden, die hier die Werte

$$x_0' = \cos\alpha, \quad y_0' = \sin\alpha$$

ergeben; die Extremale $a = a_0$ entspreche dem Werte $\alpha = \alpha_0$. Daß o kein Scheitelpunkt ist, bedeutet $\sin \alpha_0 \neq 0$. Sind x_0, y_0 die Koordinaten des Punktes o, so gilt die Gleichung

$$F_{x'}(y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) - a = 0.$$

und die Ableitung ihrer linken Seite nach α ist

$$-F_{x'x'} \sin \alpha + F_{x'y'} \cos \alpha = F_1(-y'^2 \sin \alpha - x'y' \cos \alpha) = -F_1 \sin \alpha,$$

also für $\alpha = \alpha_0$ von Null verschieden. Man kann daher α als an der Stelle $a = a_0$ reguläre Funktion von a betrachten, die für $a = a_0$ den Wert α_0 annimmt.

Man kann nun die dem betrachteten Extremalenstück $a = a_0$, das wir $\mathfrak{C}$ nennen, benachbarten Extremalen durch die beiden Gleichungen

$$(15) \qquad x'y'' - x''y' = \frac{F_{yx'}}{F_1}, \quad x'x'' + y'y'' = 0$$

definieren; aus ihnen ergeben sich x'' und y'' als Funktionen von x, y, x', y', die in der Umgebung jedes auf unserem Extremalenstück erreichten Wertsystems regulär sind. Daraus folgt nach allgemeinen Sätzen über die Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme von den für $t = 0$ erreichten Anfangswerten[1] x_0, y_0, x'_0, y'_0, daß x und y reguläre Funktionen dieser Anfangswerte und von t sind, sobald die Anfangswerte von den auf dem Stück $\mathfrak{C}$ an der Stelle $t = 0$ geltenden Werten hinreichend wenig abweichen, t aber in der Strecke T liegt, die dem Bogenstück $\mathfrak{C}$ entspricht. Läßt man also im besonderen x_0 und y_0 ungeändert und setzt $x'_0 = \cos \alpha$, $y'_0 = \sin \alpha$, wobei α von α_0 hinreichend wenig abweicht, so ergeben sich als Lösungen der Gleichungen (15) Ausdrücke

$$(16) \qquad x = \Xi(t, \alpha), \quad y = \mathrm{H}(t, \alpha),$$

die, wenn t auf der Strecke T liegt, in t und α regulär sind; die dargestellten Kurven gehen alle durch den Punkt o. Da nun, wie oben gezeigt, α als reguläre Funktion von a in der Nähe der Stelle $a = a_0$ dargestellt werden kann, der der Wert $\alpha = \alpha_0$ entspricht, so kann man die Gleichungen (16) durch Gleichungen

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a)$$

ersetzen, die mit dem Wert $a = a_0$ den Bogen $\mathfrak{C}$ darstellen.

Setzt man wieder

$$\Delta(t, a) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)},$$

so ergeben die Gleichungen

$$x_0 = \xi(0, a), \quad y_0 = \eta(0, a)$$

die Folgerung

$$\Delta(0, a) = 0;$$

[1] Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. Aufl. (1925) § 17. Die Entwicklungen bleiben a fortiori gültig, wenn man die dort als regulär bezeichneten reellen Funktionen durch reguläre analytische Funktionen ersetzt.



nach § I aber ergibt sich

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta(t,a)}{\eta_t}\right)=\frac{1}{\eta_t^2 F_1(\xi,\eta,\xi_t,\eta_t)},$$

also für $a = a_0$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta(t,a_0)}{\eta_t(t,a_0)}\right)=\frac{1}{y'^2 F_1},$$

wobei sich die Größen rechts auf $\mathfrak{C}$ bei der jetzt geltenden Wahl des Parameters t beziehen. Hieraus folgt, solange η_t von 0 verschieden bleibt,

$$-\Delta(t,a_0)=\eta_t(t,a_0)\int_0^t\frac{dt}{y'^2 F_1}=\eta_t(t,a_0)\,D(0,t)$$

oder bei beliebiger Wahl des Parameters t, der aber mit dem bisher benutzten t zugleich wächst und im Punkte 0 etwa $t = t_0$ ergibt,

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,a)}\right|^{a=a_0}=\Delta(t,a_0)=-\eta_t(t,a_0)\,D(t_0,t).$$

Diese Gleichung bleibt über die Scheitelpunkte $\eta_t = 0$ hinaus gültig, da die Größe $D(t_0, t)$ durch analytische Fortsetzung definiert ist in einem t-Gebiete, in welchem $\Delta(t, a_0)$ und $\eta(t, a_0)$ reguläre Funktionen von t sind. Die erste auf t_0 folgende Wurzel der Gleichung $D(t_0, t) = 0$ gibt also auch den zum Punkte 0 konjugierten; ebenso sind die übrigen Nullstellen der Größe $D(t_0, t)$ zum Punkte 0 in dem in § I definierten weiteren Sinne konjugiert.

Die am Ende des § II ausgesprochenen Sätze sind also Sätze über konjugierte Punkte und zeigen im besonderen folgendes. Wenn auf einer Extremale einer Aufgabe der immer betrachteten Art von einem Punkte 0 ausgegangen wird, dessen Tangente der x-Achse nicht parallel läuft, und die Extremale hat mehrere Tangenten parallel der x-Achse, also Scheitelpunkte, so liegt zwischen je zweien derselben ein zum Punkte 0 konjugierter. Zwei konjugierte Punkte bewegen sich auf der Extremalen, der sie angehören, in derselben Richtung fort, was man sonst aus der JACOBIschen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung erschließt[1].

Sei im besonderen ein Scheitelpunkt $t = t'$ vorhanden, von dem aus t nach oben und unten ins Unendliche wachsen kann; sei dabei

$$t' > t_0, \qquad F_1 > 0.$$

Dann kann die Größe

$$\lim_{t=+\infty} D(t_0, t) = \Gamma$$

negativ sein; in diesem Falle wäre, da

$$D(t_0, t'+0) = -\infty$$

[1] KNESER, Lehrbuch der Variationsrechnung (2. Aufl.) § 18.

und $D(t_0, t)$ von t' an wächst, auf der Strecke $t' \cdots +\infty$ kein zum Punkte o konjugierter vorhanden. Wenn man aber einen Punkt $t_\infty < t_0$ derart finden kann, daß

$$D(t_\infty, t_0) > -\Gamma,$$

so wird

$$\lim_{t=+\infty} D(t_\infty, t) = \Gamma + D(t_\infty, t_0) > 0,$$

und zwischen t' und $+\infty$ erscheint eine Nullstelle der Größe $D(t_\infty, t)$. Das bedeutet: das Gebiet $t < t'$ wird ein gewisses in t' beginnendes Teilgebiet enthalten, zu dessen Punkten keine konjugierten im Gebiet $t > t'$ vorliegen; außerhalb dieses Teilgebiets liegen aber Punkte, die konjugierte im Gebiet $t > t'$ besitzen. Das ist eine Erscheinung, die an Beispielen mehrfach festgestellt ist[1].

Noch ein paar besondere Ergebnisse seien angeführt, die aus den erhaltenen Sätzen unmittelbar folgen. Geht eine geodätische Linie auf einem ellipsoidartigen Drehkörper zwischen zwei Breitenkreisen, sie immer berührend, hin und her, so hat jeder nicht auf diesen Breitenkreisen liegende Punkt zwischen je zweien der Berührungspunkte mit den Breitenkreisen einen konjugierten Punkt. Das sphärische Pendel, dessen Bahn zwei horizontale Breitenkreise abwechselnd berührt, ist dynamisch stabil in dem Sinne, daß zu jedem nicht auf jenen Breitenkreisen liegenden Punkte der Bahnkurve zwischen irgendzwei aufeinanderfolgenden Berührungen der Bahn mit den beiden Breitenkreisen ein konjugierter Punkt vorhanden ist; die Bahnkurve ist dabei Extremale des Integrals der kleinsten Wirkung in der engeren, Euler-Jacobischen Form.

IV.

Es bleibt noch übrig, die konjugierten Punkte der Scheitel zu suchen und zu bestätigen, was man natürlich vermutet, daß die Scheitel untereinander konjugiert sind. Seien o und 1 zwei aufeinanderfolgende Scheitel einer Extremale $a = a_0$, die nicht Wendepunkte sind; $\mathfrak{E}$ sei das Stück o1 der Extremale $a = a_0$; seien x_∞, y_∞ die Koordinaten des Punktes o; t sei die vom Punkte o ab gemessene Bogenlänge, die im Punkte 1 den Wert t_1 annimmt.

Wir betrachten nun wie in § III die Lösungen des Gleichungssystems

$$x'y'' - x''y' = \frac{F_{yx'}}{F_1}, \quad x'x'' + y'y'' = 0 \tag{17}$$

in der Form

$$x = f(t, x_0, y_0, x_0', y_0'), \quad y = g(t, x_0, y_0, x_0', y_0'),$$

gehen aus von dem Anfangswertsystem $x_0 = x_\infty$, $y_0 = y_\infty$, $x_0' = 1$, $y_0' = 0$; dann sind f und g in den letzten vier Unabhängigen regulär, wenn t die Strecke $0 \cdots t_1$ durchläuft. Jetzt ist zu beachten, daß x auf der rechten Seite der Gleichungen (17) nicht vorkommt; die aus ihnen berechneten Werte von x'', y'' sowie die Werte von x''', y''' usf., die aus den nach t differenzierten Gleichungen hervorgehen, sind von x frei; die für $t = 0$ geltenden Werte

[1] H. Kober, Konjugierte kinetische Brennpunkte, Diss. Breslau 1910. § 14.



$x_0'', y_0'', x_0''', \cdots$ sind also von x_0 unabhängig; diese Größe kommt in der Entwicklung

$$x = x_0 + x_0' t + \frac{x_0''}{2} t^2 + \cdots$$

nur als Summand einmal vor, in der Entwicklung von y gar nicht, und wenn wir die Annahme $y_0' = 0$ festhalten, ergibt sich eine zweifach ausgedehnte Schar von Lösungen in der Form

$$(18) \qquad x = x_0 + f(t \, . \, y_0), \quad y = g(t, y_0).$$

Geometrisch gesprochen hat man von den der Stelle 0 benachbarten Punkten der Geraden $x = x_{00}$ Extremalen gezogen, die in diesen Punkten Scheitel besitzen; dann verschiebt man diese Kurven parallel der x-Achse, und erhält so eine zweifach unendliche Extremalenschar.

In den Punkten (x_{00}, y_0) gelten nun die Gleichungen

$$(19) \qquad F_{x'}(y_0 \, . \, 1 \, . \, 0) - a = 0,$$

woraus für den Zusammenhang zwischen y_0 und a folgt

$$(20) \qquad F_{x'y}(y_0, \, 1 \, . \, 0)\, dy_0 - da = 0.$$

Hier ist der Faktor von dy_0 von Null verschieden; andernfalls würde die Gleichung

$$(21) \qquad x'y'' - x''y' = \frac{F_{x'y}}{F_1}$$

auf einen Wendepunkt an der Stelle 0 führen, den wir ausgeschlossen haben. Man kann daher y_0 aus der Gleichung (19) als reguläre Funktion von a bestimmen, und zwar, da die Gleichung

$$F_{x'}(y_{00}, \, 1 \, . \, 0) - a_0 = 0$$

gilt, in der Nähe der Stelle $a = a_0$. So erhält man aus den Gleichungen (18), indem man $x_0 = x_{00} + b$ setzt,

$$(22) \qquad x = \Phi(t, a) + b, \quad y = \Psi(t \, . \, a)$$

und die Funktionen Φ, Ψ sind regulär an jeder Stelle t, a_0, für die $t_1 \geq t \geq 0$; wir setzen gleichzeitig

$$x = \mathfrak{x}(t, a, b), \quad y = \mathfrak{y}(t, a, b),$$

so daß allgemein die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_b = 1, \quad \mathfrak{y}_b = 0$$

gelten; $b = 0$ sind die Extremalen mit den Scheiteln (x_{00}, y_0).

Wir wollen nun die für das weitere folgenreichen Ungleichungen

$$(23) \qquad \mathfrak{y}_a(0, a_0, 0) \neq 0, \quad \mathfrak{y}_a(t_1, a_0, 0) \neq 0$$

beweisen, d. h. zeigen, daß die Größe $\mathfrak{y}_a$ in den Stellen 0 und 1 von Null verschieden ist. Zu dem Zweck betrachten wir die Gleichungen (22) in der

Nähe eines der beiden Scheitel, z. B. der Stelle o; hier ist, da kein Wendepunkt vorliegt,

$$p = 0, \quad \frac{dp}{dt} \neq 0;$$

man kann also für t in der Nähe der Stelle $t = 0$ die Unabhängige

$$(24) \qquad p = \frac{\Psi_t(t, a)}{\Phi_t(t, a)}$$

einführen, und erhält so Werte

$$x = b + \psi(p, a), \quad y = \phi(p, a).$$

Den Wert y denken wir eingesetzt in die Gleichung

$$F_{x'}(y, x', y') - a = 0,$$

die die Größen x' und y' nur in der Verbindung p enthält; sie ergibt

$$(25) \qquad F_{x'y}\,dy + \frac{\partial F_{x'}}{\partial p}\,dp - da = 0,$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \phi_a(p, a) = \frac{1}{F_{x'y}}, \quad \phi_p(p, a) = -\frac{1}{F_{x'y}}\,\frac{\partial F_{x'}}{\partial p};$$

der Nenner dieser Brüche ist immer der Gleichung (21) zufolge von Null verschieden, da ein Wendepunkt an der Stelle o ausgeschlossen ist. Somit ist an dieser Stelle

$$(26) \qquad \phi_a(p, a) \neq 0.$$

Anderseits ist offenbar, indem man für p wieder den Wert (24) einsetzt,

$$(27) \qquad \mathfrak{y}_a = \phi_p(p, a)\,\frac{\partial p}{\partial a} + \phi_a(p, a);$$

an der Stelle o ist aber

$$(28) \qquad \phi_p(p, a) = \phi_p(0, a) = 0;$$

die Größe $\partial F_{x'}/\partial p$ verschwindet für $p = 0$, da sie, $F(y, x', y') = x' f(y, p)$ gesetzt, zu schreiben ist

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial p} = \frac{\partial (f - p f_p)}{\partial p} = -p f_{pp}.$$

Die Beziehungen (26), (27), (28) ergeben also, wie gewünscht, an der Stelle o die Ungleichung

$$\mathfrak{y}_a \neq 0,$$

und dieselbe Schlußreihe läßt sich für die Umgebung der Stelle 1 durchführen; die Ungleichungen (23) sind bewiesen.

Jetzt erst können wir mit Erfolg das Büschel der durch den Punkt o gehenden Extremalen betrachten, deren Verhalten den konjugierten Punkt bestimmt. Zu diesem Zweck setzen wir die Gleichungen

$$(29) \qquad \mathfrak{x}(t_0, a, b) = x_\infty, \quad \mathfrak{y}(t_0, a, b) = y_\infty$$

an; da die Gleichungen

$$\mathfrak{x}(0, a_0, 0) = x_\infty, \quad \mathfrak{y}(0, a_0, 0) = y_\infty, \quad \mathfrak{x}_t(0, a_0, 0) = \pm 1, \quad \mathfrak{y}_t(0, a_0, 0) = 0$$

gelten, definiert die erste der Gleichungen (29) die Größe t_0 als reguläre Funktion von a und b in der Nähe der Stelle a_0, 0; bezeichnet man durch die Kopfmarke 0, daß die betreffende Größe für die Stelle 0 und die Extremale $a = a_0$ gebildet wird, so gilt die Gleichung

$$\mathring{\mathfrak{x}}_t\, dt_0 + \mathring{\mathfrak{x}}_a\, da + \mathring{\mathfrak{x}}_b\, db = 0.$$

Die zweite Gleichung (29) gibt an der Stelle $a = a_0$, $b = 0$

$$\mathring{\mathfrak{y}}_t\, dt_0 + \mathring{\mathfrak{y}}_a\, da + \mathring{\mathfrak{y}}_b\, db = 0,$$

$$(\mathring{\mathfrak{x}}_a \mathring{\mathfrak{y}}_t - \mathring{\mathfrak{x}}_t \mathring{\mathfrak{y}}_a)\, da + (\mathring{\mathfrak{x}}_b \mathring{\mathfrak{y}}_t - \mathring{\mathfrak{x}}_t \mathring{\mathfrak{y}}_b)\, db = 0$$

oder kurz

$$(30) \qquad \mathring{\mathfrak{x}}_t \mathring{\mathfrak{y}}_a\, da + 0 \cdot db = 0.$$

Setzt man also t_0 als Funktion von a und b in die zweite Gleichung (29), so kann die erhaltene Gleichung nach a aufgelöst werden; $\mathring{\mathfrak{y}}_a$ ist ja, wie oben gezeigt, von Null verschieden; a ergibt sich als an der Stelle $b = 0$ reguläre Funktion von b, womit dann die Gleichungen

$$x = \mathfrak{x}(t, a, b) = \xi(t, b)$$
$$y = \mathfrak{y}(t, a, b) = \eta(t, b)$$

das Büschel der durch den Punkt 0 gehenden Extremalen darstellen. Den Parameter a könnte man in diese Gleichungen nicht einführen, da sich der Gleichung (30) zufolge für $a = a_0$ eine Singularität ergeben würde.

Nun ist offenbar allgemein

$$\xi_t = \mathfrak{x}_t, \quad \xi_b = \mathfrak{x}_a \frac{da}{db} + \mathfrak{x}_b,$$

$$\eta_t = \mathfrak{y}_t, \quad \eta_b = \mathfrak{y}_a \frac{da}{db} + \mathfrak{y}_b,$$

$$\Delta(t, b) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, b)} = (\mathfrak{x}_t \mathfrak{y}_a - \mathfrak{x}_a \mathfrak{y}_t) \frac{da}{db} + \mathfrak{x}_t \mathfrak{y}_b - \mathfrak{x}_b \mathfrak{y}_t,$$

und im besonderen für $b = 0$, $a = a_0$, da dann der Gleichung (30) zufolge $da/db = 0$ wird, da ferner immer $\mathfrak{x}_b = 1$, $\mathfrak{y}_b = 0$ ist,

$$\Delta(t, 0) = -\mathfrak{y}_t.$$

Daraus folgt für die Stelle 1 endlich

$$\Delta(t_1, 0) = \mathfrak{y}_t(t_1, a_0, 0) = 0,$$

womit die Stellen 0 und 1 auf der Extremale $\mathfrak{C}$ als konjugiert nachgewiesen sind.



V.

Den durchgeführten ähnliche Betrachtungen gelten auch für die zugänglichste Klasse von isoperimetrischen Aufgaben, diejenigen nämlich, die in der gewöhnlichen Bezeichnung durch die Gleichungen

$$\delta\int F(y, x', y')\,dt = 0, \quad \delta\int G(y, x', y')\,dt = 0 \tag{31}$$

ausgesprochen werden; die Größe x kommt unter beiden Integralzeichen nicht vor, und die Extremalen können daher durch Quadraturen dargestellt werden. F und G seien Funktionen wie F in § I.

Setzen wir $H = F + \lambda G$ und verstehen unter λ den isoperimetrischen Festwert, so gelten für die Extremalen allgemein die Eulerschen Gleichungen

$$H_x - H'_{x'} = 0, \quad H_y - H'_{y'} = 0 \tag{32}$$

oder auch die Weierstrasssche Gleichung

$$T_H = H_{xy'} - H_{yx'} + H_1(x'y'' - x''y') = 0,$$

wobei

$$H_1 = \frac{H_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{H_{x'y'}}{x'y'} = \frac{H_{y'y'}}{x'^2}; \tag{33}$$

im vorliegenden Falle findet man kürzer

$$-H_{yx'} + H_1(x'y'' - x''y') = 0, \tag{34}$$

und die erste Gleichung (32) gibt mit dem Festwert a

$$H'_{x'} = 0, \quad H_{x'} = a. \tag{35}$$

Wir beschränken, ähnlich wie früher, die Betrachtung auf ein Extremalenstück $\mathfrak{C}$, längs dessen die Größe H_1 bei einer bestimmten Fortgangsrichtung von Null verschieden, die Funktionen F und G regulär seien; die Gleichung (34), der man wieder die Gleichung

$$x'x'' + y'y'' = 0 \tag{36}$$

beifügen kann, gibt dann längs des Stückes $\mathfrak{C}$ für x und y reguläre Funktionen von t, deren Ableitungen nicht zugleich verschwinden. Die Punkte, in denen $y' = 0$ wird, nennen wir wieder die Scheitel. Ist dann o ein von den Scheiteln verschiedener Punkt des Bogens $\mathfrak{C}$, sind x_0 und y_0 seine Koordinaten und setzt man in ihm für x' und y' die Werte

$$x'_0 = \cos\alpha_0, \quad y'_0 = \sin\alpha_0$$

an, so erhält man das Büschel der durch den Punkt o gehenden, dem Bogen $\mathfrak{C}$ benachbarten Extremalen, in denen man die Gleichungen (34) und (36) mit der Voraussetzung integriert, daß für $t = 0$ sei

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad x' = \cos\alpha, \quad y' = \sin\alpha$$

und α in der Nähe des Wertes α_0 nimmt, der von 0 und π verschieden ist. Man erhält so Ausdrücke

$$x = f(t, \alpha, \lambda), \quad y = g(t, \alpha, \lambda),$$

die regulär sind, wenn t, α, λ die dem Bogen $\mathfrak{C}$ entsprechenden Werte annehmen. Die Größe α aber läßt sich aus der Gleichung (35) als reguläre Funktion von a und λ ausdrücken, wenn diese Größen in der Nähe der für den Bogen $\mathfrak{C}$ geltenden Werte a_0 und λ_0 liegen; der Beweis gestaltet sich genau wie der entsprechende in § III, wo α als Funktion von a eingeführt wurde, und wesentlich sind auch hier die Annahmen $\sin \alpha_0 \neq 0$, $H_1 \neq 0$, letztere der früheren Annahme $F_1 \neq 0$ entsprechend.

Die durch den von den Scheiteln verschiedenen Punkt 0 gehenden zweifach unendlich vielen Extremalen sind also in der Form

$$x = \xi(t, a, \lambda), \quad y = \eta(t, a, \lambda)$$

darstellbar, wobei ξ und η regulär sind in den dem Bogen $\mathfrak{C}$ entsprechenden Wertsystemen t, $a = a_0$, $\lambda = \lambda_0$. Statt der bisher durch t bezeichneten Bogenlänge vom Punkte 0 aus kann auch, ohne die erhaltenen Eigenschaften der Funktionen ξ und η zu stören, ein anderer mit t gleichzeitig wachsender Parameter eingeführt werden, den wir ebenfalls t nennen; dieser nehme im Punkte 0 den Wert t_0 an, der auf den verschiedenen Extremalen der Schar verschieden sein kann, so daß immer

$$x_0 = \xi(t_0, a, \lambda), \quad y_0 = \eta(t_0, a, \lambda) \tag{37}$$

zu setzen ist.

Wir bilden ferner die Größe

$$\omega(t, a, \lambda) = \int_{t_0}^{t} G(\eta, \xi_t, \eta_t)\, dt,$$

so daß

$$\omega_t = G(\eta, \xi_t, \eta_t) = \xi_t G_{x'} + \eta_t G_{y'} \tag{38}$$

ist, wobei unter $G_{x'}$ und $G_{y'}$, wie auch weiterhin, die Werte η, ξ_t, η_t für y, x', y' einzusetzen sind. Dann ist der zum Punkte 0 konjugierte Punkt im Sinne der Aufgabe (31) bestimmt als Nullpunkt der Größe

$$\Delta(t, a, \lambda) = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(t, a, \lambda)} = \begin{vmatrix} \xi_t & \eta_t & \omega_t \\ \xi_a & \eta_a & \omega_a \\ \xi_\lambda & \eta_\lambda & \omega_\lambda \end{vmatrix}.$$

Vervielfacht man die ersten Spalten mit $G_{x'}$ und $G_{y'}$ und zieht sie von der dritten ab, so folgt nach (38)

$$\Delta(t, a, \lambda) = \begin{vmatrix} \xi_t & \eta_t & 0 \\ \xi_a & \eta_a & \omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a \\ \xi_\lambda & \eta_\lambda & \omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda \end{vmatrix}.$$

Zieht man ferner ein passendes Vielfaches der zweiten Spalte von der ersten ab, so findet man

$$(39)\qquad \Delta(t, a, \lambda) = -\eta_t \begin{vmatrix} (\xi_a\eta_t - \xi_t\eta_a)/\eta_t & \omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a \\ (\xi_\lambda\eta_t - \xi_t\eta_\lambda)/\eta_t & \omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda \end{vmatrix}.$$

Die Glieder dieser Determinante lassen sich nun als Integrale nach t darstellen. Indem man $x = \xi$ und $y = \eta$ in die Gleichung (35) einsetzt, wodurch sie in eine Identität übergeht, und nach a differenziert, ergibt sich

$$H_{x'y}\eta_a + H_{x'x'}\xi_{ta} + H_{x'y'}\eta_{ta} = 1\,,$$

also nach (34) und (33)

$$H_1\{(\xi_t\eta_{tt} - \xi_{tt}\eta_t)\eta_a + \eta_t^2\xi_{ta} - \eta_t\xi_t\eta_{ta}\} = 1\,,$$

oder auch, indem man ein Glied hinzufügt und wieder abzieht,

$$H_1\{\eta_t(\xi_{ta}\eta_t - \xi_t\eta_{ta} + \xi_a\eta_{tt} - \xi_{tt}\eta_a) - \eta_{tt}(\xi_a\eta_t - \xi_t\eta_a)\} = 1$$

oder endlich ähnlich wie im § I

$$(40)\qquad H_1\eta_t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi_a\eta_t - \xi_t\eta_a}{\eta_t}\right) = 1\,.$$

Differenziert man weiter die Gleichung (35), nachdem $x = \xi$ und $y = \eta$ gesetzt ist, nach λ und bedenkt, daß die Größe λ auch der Gleichung

$$H_{x'} = F_{x'} + \lambda G_{x'}$$

gemäß explizit auftritt, so folgt

$$H_{x'y}\eta_\lambda + H_{x'x'}\xi_{t\lambda} + H_{x'y'}\eta_{t\lambda} + G_{x'} = 0\,,$$

oder nach (34) und (33), indem man in der vorhergehenden Umformung a durch λ ersetzt,

$$(41)\qquad H_1\eta_t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi_\lambda\eta_t - \xi_t\eta_\lambda}{\eta_t}\right) = -G_{x'}\,.$$

Jetzt gehen wir auf die Gleichungen (37) zurück, differenzieren sie nach a und λ und erhalten

$$0 = \xi_t\frac{\partial t_0}{\partial a} + \xi_a\Big|^{t_0}, \quad 0 = \eta_t\frac{\partial t_0}{\partial a} + \eta_a\Big|^{t_0},$$

$$0 = \xi_t\frac{\partial t_0}{\partial \lambda} + \xi_\lambda\Big|^{t_0}, \quad 0 = \eta_t\frac{\partial t_0}{\partial \lambda} + \eta_\lambda\Big|^{t_0};$$

hieraus folgt

$$(42)\qquad \xi_a\eta_t - \xi_t\eta_a\Big|^{t_0} = \xi_\lambda\eta_t - \xi_t\eta_\lambda\Big|^{t_0} = 0\,;$$

die Gleichungen (40) und (41) geben daher für eine von Scheiteln ($\eta_t = 0$) freie Strecke $t_0 \cdots t$

$$(43)\qquad \frac{\xi_a\eta_t - \xi_t\eta_a}{\eta_t} = \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{H_1\eta_t^2}, \quad \frac{\xi_\lambda\eta_t - \xi_t\eta_\lambda}{\eta_t} = -\int_{t_0}^{t}\frac{G_{x'}dt}{H_1\eta_t^2},$$

womit die Glieder der ersten Spalte der Determinante (39) in der gewünschten Weise dargestellt sind.

Weiter bilden wir, indem wir bedenken, daß x in G nicht vorkommt, und die Gleichung (38) benutzen, die Größe

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a) = \omega_{at} - G_{x'}\xi_{ta} - G_{y'}\eta_{ta} - \xi_a(G_{x'y}\eta_t + G_{x'x'}\xi_{tt} + G_{x'y'}\eta_{tt}) \\ - \eta_a(G_{y'y}\eta_t + G_{y'x'}\xi_{tt} + G_{y'y'}\eta_{tt}).$$

Hiermit verbinden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_t &= G(y, x', y') = G_{x'}\xi_t + G_{y'}\eta_t, \\ \omega_{ta} &= G_{x'}\xi_{ta} + G_{y'}\eta_{ta} \\ &\quad + G_{x'y}\eta_a\xi_t + G_{x'x'}\xi_{ta}\xi_t + G_{x'y'}\eta_{ta}\xi_t \\ &\quad + G_{y'y}\eta_a\eta_t + G_{y'x'}\xi_{ta}\eta_t + G_{y'y'}\eta_{ta}\eta_t, \end{aligned}$$

und finden

$$(44)\quad \frac{\partial}{\partial t}(\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a) = G_{x'y}(\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t) + G_{x'x'}(\xi_t\xi_{ta} - \xi_a\xi_{tt}) \\ + G_{x'y'}(\xi_t\eta_{ta} - \xi_a\eta_{tt} + \eta_t\xi_{ta} - \eta_a\xi_{tt}) + G_{y'y'}(\eta_t\eta_{ta} - \eta_a\eta_{tt}).$$

Nun kann von der Funktion G aus das Analogon der Größen F_1 und H_1 gebildet werden, sodaß die Gleichungen

$$G_{x'x'} = G_1\eta_t^2, \quad G_{x'y'} = -G_1\xi_t\eta_t, \quad G_{y'y'} = G_1\xi_t^2$$

gelten, und für das in § I eingeführte Symbol T ergibt sich

$$T_G = -G_{yx'} + G_1(\xi_t\eta_{tt} - \xi_{tt}\eta_t);$$

durch diese Formeln wird der Ausdruck (44)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a) = G_{x'y}(\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t) - \xi_a G_1(\xi_{tt}\eta_t^2 - \xi_t\eta_t\eta_{tt}) \\ - \eta_a G_1(\xi_t^2\eta_{tt} - \xi_t\xi_{tt}\eta_t) = -(\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t)T_G.$$

Eine letzte Umformung liefern die allgemeinen Identitäten (3), die auf G angewandt, da $G_x = 0$ ist, ergeben

$$T_G = -\frac{G'_{x'}}{y'} = -\frac{G'_{x'}}{\eta_t};$$

die vorige Formel erhält jetzt die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a) = \frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t}G'_{x'};$$

wenn man in der ganzen soeben durchgeführten Rechnung a durch λ ersetzt, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda) = \frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t}G'_{x'}.$$

Die beiden letzten Formeln geben durch Integration und Teilintegration

$$\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a \Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t} G'_{x'} dt$$

$$= \frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t} G_{x'} \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} G_{x'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t}\right) dt,$$

$$\omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda \Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t} G'_{x'} dt$$

$$= \frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t} G_{x'} \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} G_{x'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t}\right) dt$$

oder den Gleichungen (40) und (41) zufolge

$$(45)\quad \begin{aligned} \omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a \Big|_{t_0}^{t} &= \frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t} G_{x'} \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'} dt}{H_1 \eta_t^2}, \\ \omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda \Big|_{t_0}^{t} &= \frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t} G_{x'} \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}^2 dt}{H_1 \eta_t^2}. \end{aligned}$$

Hier fallen rechts die außerhalb des Integralzeichens stehenden auf $t = t_0$ bezüglichen Glieder den Gleichungen (42) zufolge weg. Aber auch links gilt dasselbe; denn aus den Definitionen

$$\omega = \int_{t_0}^{t} G(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) dt, \quad x_0 = \xi(t_0, a, \lambda), \quad y_0 = \eta(t_0, a, \lambda)$$

ergibt sich

$$\xi_t(t_0, a, \lambda)\frac{\partial t_0}{\partial a} + \xi_a(t_0, a, \lambda) = 0, \quad \eta_t(t_0, a, b)\frac{\partial t_0}{\partial a} + \eta_a(t_0, a, \lambda) = 0,$$

$$\omega_a = -\frac{\partial t_0}{\partial a} G \Big|^{t_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial a} dt, \quad \omega_a \Big|^{t_0} = -\frac{\partial t_0}{\partial a}(G_{x'}\xi_t + G_{y'}\eta_t) \Big|^{t_0} = G_{x'}\xi_a + G'_y\eta_a \Big|^{t_0},$$

$$\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a \Big|^{t_0} = 0,$$

und ebenso, indem man alle Ableitungen nach a in der letzten Formelgruppe durch Ableitungen nach λ ersetzt,

$$\omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda \Big|^{t_0} = 0.$$

Die Gleichungen (45) vereinfachen sich also und geben

$$\omega_a - G_{x'}\xi_a - G_{y'}\eta_a = \frac{\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t}{\eta_t} G_{x'} + \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}dt}{H_1\eta_t^2}.$$

$$\omega_\lambda - G_{x'}\xi_\lambda - G_{y'}\eta_\lambda = \frac{\xi_t\eta_\lambda - \xi_\lambda\eta_t}{\eta_t} G_{x'} - \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}^2 dt}{H_1\eta_t^2}.$$

Setzt man diese Werte in die nach (39) geschriebene Determinante $\Delta(t, a, \lambda)$, so kann man die erste Spalte, mit $-G_{x'}$ vervielfacht, von der zweiten abziehen; setzt man sodann in die erste Spalte die Werte (43) und vervielfacht die zweite Zeile mit -1, so ergibt sich schließlich

$$\Delta(t, a, \lambda) = \eta_t \begin{vmatrix} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{H_1\eta_t^2} & \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}dt}{H_1\eta_t^2} \\ \int_{0}^{t} \frac{G_{x'}dt}{H_1\eta_t^2} & \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}^2dt}{H_1\eta_t^2} \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretenden Integrale sind von der Wahl des Parameters t unabhängig, wie die in § II für das Integral

$$\int \frac{dt}{F_1 y'^2} \tag{46}$$

durchgeführte Betrachtung zeigt; setzt man im besonderen $a = a_0$, $\lambda = \lambda_0$, so ergibt sich

$$\Delta(t, a_0, \lambda_0) = \eta_t(t, a_0, \lambda_0) D(t_0, t), \quad D(t_0, t) = AC - B^2,$$

$$A = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{H_1 y'^2}, \quad B = \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}dt}{H_1 y'^2}, \quad C = \int_{t_0}^{t} \frac{G_{x'}^2 dt}{H_1 y'^2},$$

und jetzt beziehen sich die Größen x', y', auch soweit sie in H_1 und $G_{x'}$ eingehen, nur auf das Extremalenstück $\mathfrak{C}$ in irgendeiner Parameterdarstellung, bei der die Richtung wachsender t dieselbe ist wie bisher, und x' und y' nie zugleich verschwinden.

VI.

Die Rechnung des § V gilt zunächst nur für eine von Scheiteln ($\eta_t = 0$) freie t-Strecke. Auf einer solchen liefert die Schwarzsche Ungleichung immer

$$AC - B^2 > 0;$$

konjugierte Punkte sind nicht vorhanden, und die Strecke vom Punkte 0 bis zum ersten Scheitel liefert sicher das bei unserer Aufgabe gesuchte Extrem.

Die Integrale A, B, C lassen sich aber über die Scheitel hinaus gerade so fortsetzen, wie dies in § II für das Integral (46) gezeigt ist, und die gefundene Form der Größe Δ erleichtert die Diskussion der konjugierten Punkte wesentlich.

Zunächst hat das Integral A ganz die Form des Integrals (46); für H_1 gilt ja dieselbe Voraussetzung wie früher für F_1. Aber auch die Integranden der Integrale B und C haben eine solche Form, daß die erwähnten Betrachtungen des § II gültig bleiben. Es ist nämlich allgemein

$$G'_{x'} = G_{x'y}\, y' + G_{x'x'}\, x'' + G_{x'y'}\, y''$$
$$= G_{x'y}\, y' + G_1(x'' y'^2 - x' y' y''), \quad G_{x'x'} = y'^2 G_1, \; G_{x'y'} = -x' y' G_1,$$

so daß diese Größe in den Scheiteln ($y' = 0$) verschwindet. Da man nun nach § II in der dortigen Bezeichnung, wenn $t = t_1$ ein Scheitel ist, nach steigenden Potenzen von $t - t_1$ geordnet, setzen kann

$$\frac{1}{H_1 y'^2} = \frac{c_{-2}}{(t-t_1)^2} + c_0 + c_1(t-t_1) + \cdots$$

und in demselben Sinne, da $G'_{x'}$ für $t = t_1$ verschwindet, mit Festwerten c', c'', .. die Gleichungen

$$G_{x'} = c'_0 + c'_2(t-t_1)^2 + \cdots, \quad G^2_{x'} = c''_0 + c''_2(t-t_1)^2 + \cdots$$

gelten, so folgen die Entwicklungen

$$\frac{G_{x'}}{H_1 y'^2} = \frac{c'''_{-2}}{(t-t_1)^2} + c'''_0 + c'''_1(t-t_1) + \cdots,$$
$$\frac{G^2_{x'}}{H_1 y'^2} = \frac{\bar{c}_{-2}}{(t-t_1)^2} + \bar{c}_0 + \bar{c}_1(t-t_1) + \cdots;$$

dabei ist offenbar

$$(47) \qquad c'''_{-2} = c_{-2}\, c'_0, \quad \bar{c}_{-2} = c_{-2}\, c'_0 c'_0.$$

Aus dieser Form der Integranden B' und C' folgt aber die Anwendbarkeit der Betrachtungen des § II; die Integrale B und C sind wie A bei der natürlichen Wahl des Integrationsweges auf der reellen, dem Bogen $\mathfrak{C}$ entsprechenden t-Strecke meromorphe Funktionen, die in den Scheiteln einfache Pole besitzen, also von $-\infty$ zu $+\infty$ oder umgekehrt umspringen. Die Ableitungen A' und C' haben außerhalb der Scheitel überall dasselbe feste Vorzeichen.

Die Größe $D(t_0, t)$ ist ebenfalls auf der betrachteten reellen t-Strecke eine meromorphe Funktion; da an einem Pol wie t_1 die singulären Glieder von A, B, C sind

$$\frac{-c_{-2}}{t-t_1}, \quad \frac{-c'''_{-2}}{t-t_1}, \quad \frac{-\bar{c}_{-2}}{t-t_1}$$

und nach (47) offenbar die Gleichung $c_{-2}\bar{c}_{-2} = (c'''_{-2})^2$ gilt, so enthält die Größe $AC - B^2$ kein Glied mit der Potenz $(t-t_1)^{-2}$, sondern hat an der Stelle $t = t_1$ ebenfalls höchstens einen einfachen Pol, der aber auch in besonderen Fällen wegfallen könnte.

Das Interesse der Größe $D(t_0, t)$ beruht darauf, daß sie der Gleichung

$$\Delta(t, a_0, \lambda_0) = y_t(t, a_0, \lambda_0) D(t_0, t)$$

zufolge in dem Falle, daß $t = t_0$ kein Scheitel ist, durch ihr Verschwinden die zum Punkte 0 oder $t = t_0$ konjugierten Punkte liefert; die Determinante Δ war ja ursprünglich mit dem Büschel der durch den Punkt 0 gehenden ∞^2 Extremalen gebildet, wobei von vornherein 0 kein Scheitel sein durfte.

Um nun über die Nullstellen der Größe $D(t_0 . t)$ Einsicht zu gewinnen, betrachten wir die Größe

$$\frac{D(t_0 . t)}{A} = C - \frac{B^2}{A} = D_1(t_0, t)$$

und finden sofort, da $A'C' = B'^2$ ist,

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} = D_1' = \frac{A^2 C' - 2ABB' + B^2 A'}{A^2}$$

$$= \frac{A^2 B'^2 - 2AA'BB' + B^2 A'^2}{A^2 A'} = \frac{(AB' - A'B)^2}{A^2 A'}.$$

Diese Ableitung hat also das feste Vorzeichen der Größen A' und H_1. Da ferner die Größen $D(t_0, t)$ und A in den Scheiteln unendlich von erster Ordnung werden, bleibt D_1 hier endlich, wird aber offenbar unendlich an den Nullstellen der Größe A, wenn an diesen nicht gerade auch $B = 0$ wird. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden von diesen Unendlichkeitsstellen geht D_1 als Funktion von t einsinnig von $-\infty$ bis $+\infty$ oder umgekehrt, durchschreitet also den Wert Null genau einmal, womit ein zum Punkte 0 konjugierter geliefert ist.

Eine ähnliche Betrachtung kann man auch mit der Größe

$$\frac{D(t_0, t)}{C} = A - \frac{B^2}{C}$$

anstellen, und findet so im allgemeinen einen zu 0 konjugierten Punkt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Größe C. Endlich kann man eine ähnliche Diskussion auch anstellen, wenn man irgendwie

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & C_0 \end{vmatrix}$$

setzen kann, und wenn jede der Größen A_0, C_0 einen Integranden vom festen Vorzeichen der Größe H_1 hat, wenn ferner die Gleichung

$$A_0' C_0' = B_0'^2$$

gilt.

Die Nullstellen der Größe A sind übrigens nach § II die zum Punkte 0 konjugierten Punkte, wenn man $\mathfrak{C}$, was möglich ist, als Extremale derjenigen Aufgabe des freien, nicht isoperimetrisch gebundenen Extrems ansieht, die durch die Forderung

$$\delta \int (F + \lambda_0 G)\, dt = 0$$

gestellt wird. Zwischen irgendzwei zu o konjugierten Punkten im Sinne dieser Aufgabe liegt im allgemeinen einer im Sinne der isoperimetrischen Aufgabe, die uns beschäftigt.

Sei endlich noch bemerkt, daß man auch die Größe

$$\frac{\partial D_1(t_0, t)}{\partial t_0} = \left[\frac{1}{A}\left(A\frac{\partial B}{\partial t_0} - B\frac{\partial A}{\partial t_0}\right)\right]^2 \left(\frac{\partial A}{\partial t_0}\right)^{-1}$$

bilden kann auf Grund der offenbar richtigen Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial t_0}\frac{\partial C}{\partial t_0} = \left(\frac{\partial B}{\partial t_0}\right)^2;$$

da nun

$$\frac{\partial A}{\partial t_0} = -\frac{1}{H_1 y'^2}\Big|^{t_0}$$

ist, so hat auch die Größe $\partial D_1/\partial t_0$ ein festes Vorzeichen, und zwar das entgegengesetzte der Größe $\partial D_1/\partial t$. Verbindet man also die Werte t_0 und t^0 durch die Gleichungen

$$D_1(t_0, t^0) = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial D_1}{\partial t^0} dt^0 = 0,$$

so ergibt sich für dt_0/dt^0 ein positiver Wert; d. h. konjugierte Punkte, die konjugiert bleiben, bewegen sich auf der Extremale in demselben Sinne fort. Das konnte man bisher für Aufgaben des gebundenen Extrems überhaupt nicht beweisen; unser Satz bezieht sich natürlich auch nur auf die besondere Aufgabenklasse, von der wir sprechen, $F_x = G_x = 0$.

Der Grundgedanke der hier durchgeführten Untersuchung ist in meiner Variationsrechnung[1] angedeutet; die Bedingung für die Darstellbarkeit der Determinante $\Delta(t, a, \lambda)$ durch einen Ausdruck $AC - B^2$ sind aber unnötig eng gefaßt, worauf mich Frl. E. Haberland in einer Prüfungsarbeit aufmerksam machte. Die bezeichnete Form der Determinante Δ hatte sich schon mehrfach dargeboten, wenn in meinem Seminar bei Einzelaufgaben isoperimetrischen Charakters konjugierte Punkte bestimmt wurden[2]. Ich habe dies Verfahren nach meinem in dieser Richtung erfolgreichsten Mitarbeiter die Lindemannsche Methode genannt; sie wird durch die durchgeführte Untersuchung zum ersten Male allgemein begründet, nachdem sie bisher den Charakter eines in Einzelaufgaben bewährten Kunstgriffs gehabt hatte.

VII.

Wir wenden die Theorie an auf eine isoperimetrische Aufgabe, die sich mit elliptischen Funktionen behandeln läßt, und benutzen dabei eine Arbeit von

[1] Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung 2. Aufl. (1925) § 28.

[2] Koschmieder, Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung. Diss. Breslau 1913. § 17.

C. Lindemann, Konjugierte Punkte bei Widerstandsaufgaben der Variationsrechnung. Diss. Breslau 1917. § 8.

Hrn. KOSCHMIEDER[1] sowie die eben erwähnte Prüfungsarbeit. Die Aufgabe kann in den Gleichungen

$$\delta\int y^2\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 0, \quad \delta\int\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 0$$

ausgesprochen werden; d. h. bei gegebener Länge soll das Trägheitsmoment einer stofflich gedachten ebenen Linie bezüglich einer in ihrer Ebene liegenden Achse möglichst groß oder möglichst klein gemacht werden. Man kann die Aufgabe auch auffassen als Bestimmung der Gleichgewichtsfigur eines unausdehnbaren Fadens in einer Ebene, die sich mit fester Winkelgeschwindigkeit um eine in ihr liegende feste Achse dreht.

Man hat mit stets positiver Quadratwurzel zu setzen

$$H = (y^2+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}, \quad H_{x'} = \frac{x'(y^2+\lambda)}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = a,$$

und erhält eine brauchbare Sonderklasse von Extremalen, indem man mit den JACOBIschen Bezeichnungen ansetzt

$$\lambda < a < 0, \quad c = \sqrt{\frac{a^2}{-a-\lambda}}, \quad c > 0, \quad \frac{\lambda-a}{\lambda+a} = k^2,$$

$$x = x_0 + c(t-t_0), \quad y = \frac{2ck}{k'^2}\operatorname{sn} t, \quad y' = \frac{2ck}{k'^2}\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = c\left(1+\frac{2ck^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 t\right) = G, \quad G_{x'} = \frac{c}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$H_{x'} = \frac{(y^2+\lambda)x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = a, \quad H_{x'x'} = H_1 y'^2 = \frac{y'^2(y^2+\lambda)}{\sqrt{x'^2+y'^2}^{\,3}} = \frac{ay'^2}{x'^2+y'^2},$$

$$A = \int_{t_0}^{t}\frac{x'^2+y'^2}{ay'^2}\,dt, \quad B = \int_{t_0}^{t}\frac{c\sqrt{x'^2+y'^2}}{ay'^2}\,dt,$$

$$C = \int_{t_0}^{t}\frac{c^2\,dt}{ay'^2}, \quad D(t_0, t) = AC - B^2.$$

Die Extremalen sind Wellenlinien von der Art der Sinuslinie; die Scheitel entsprechen den Werten $t = (2n+1)K$, wobei n eine ganze Zahl ist, und sind keine Wendepunkte, da in einem solchen die Größe

$$H_{yx'} = \frac{2yx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

verschwinden müßte, was in den Scheiteln offenbar nicht eintritt. Von diesen Werten muß t_0 verschieden sein; nach § VI liegt ein einziger zu $0\,(t = t_0)$ kon-

[1] KOSCHMIEDER, Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen. Crelles Journal Bd. 147 S. 105. 1917.



jugierter Punkt z. B. zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Größe C oder der von ihr nur durch feste Faktoren unterschiedenen

$$C_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\, \mathrm{dn}^2 t},$$

wenn diese nicht etwa mit Nullstellen der Größe B zusammenfallen.

Um gleichzeitiges Verschwinden der Größen B und C zu vermeiden, formen wir die Größe $D(t_0, t)$ in eine neue Gestalt $A_0 C_0 - B_0^2$ um, worauf schon in § VI hingewiesen wurde. Sind $b_1, b_2 \cdots$ Festwerte, so ist

$$D(t_0 . t) = b_1 \begin{vmatrix} \int_{t_0}^{t} \left(1 + \frac{4ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t + \frac{c^2k^4}{k'^4}\mathrm{cn}^4 t\right)\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} & \int_{t_0}^{t}\left(1 + \frac{2ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t\right)\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} \\ \int_{t_0}^{t}\left(1 + \frac{2ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t\right)\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} & \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} \end{vmatrix}.$$

Zieht man die zweite Spalte von der ersten ab, so bleibt

$$D(t_0, t) = b_1 \begin{vmatrix} \int_{t_0}^{t} \left(\frac{2ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t + \frac{c^2k^4}{k'^4}\mathrm{cn}^4 t\right)\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} & \int_{t_0}^{t}\left(1 + \frac{2ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t\right)\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} \\ \int_{t_0}^{t}\frac{2ck^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 t \cdot \frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} & \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t} \end{vmatrix};$$

zieht man jetzt die zweite Zeile von der ersten ab, so erhält man

$$D(t_0, t) = b_2 (A_0 C_0 - B_0^2),$$

$$A_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{cn}^2 t}{\mathrm{dn}^2 t}\, dt, \quad B_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\mathrm{dn}^2 t}, \quad C_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t\,\mathrm{dn}^2 t}.$$

dabei ist offenbar $A_0' C_0' = B_0'^2$, unendlich wird aber nur noch die Größe C_0; B_0 ist immer positiv, so daß die Größe

$$\frac{D(t_0, t)}{C_0} = b_2\left(A_0 - \frac{B_0^2}{C_0}\right)$$

an den Nullstellen der Größe C_0 sicher unendlich wird. Zwischen zwei solchen Unendlichkeitsstellen liegt nach § VI sicher ein einziger, zum Punkte 0 konjugierter Punkt.

Da nun der Integrand C_0' in den Scheiteln Doppelpole mit dem Residuum 0 hat und im übrigen positiv ist, liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Scheiteln genau eine einfache Nullstelle der Größe C_0, und letztere wächst mit t.

Eine t-Strecke, die drei aufeinanderfolgende Scheitel enthält, liefert auch mindestens einen zum Punkte o konjugierten Punkt.

Im vorliegenden Fall kann man aber noch ein genaueres Ergebnis ableiten. Die Größe

$$D(t_0, t) = b_2 (A_0 C_0 - B_0^2)$$

wird in den Scheiteln mit C_0 unendlich; A_0 ist immer endlich und positiv. Die Größe C_0 aber ist leicht auszurechnen; durch die einfachsten elliptischen Differentialformeln findet man das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dt}{\operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn}^2 t} = \frac{1}{k'^4} \operatorname{tn} t \operatorname{dn} t + \left(\frac{k}{k'}\right)^4 \frac{\operatorname{sn} t \operatorname{cn} t}{\operatorname{dn} t} + \frac{t}{k'^2} - \frac{1 + k^2}{k'^4} E(t).$$

Die reellen Pole dieses Ausdrucks rühren aus dem ersten Gliede her; setzt man, unter n eine ganze Zahl verstehend, $t_1 = (2n + 1) K$, so findet man

$$\operatorname{tn} t = \frac{\operatorname{sn} t_1}{\operatorname{cn}' t_1} \frac{1}{t - t_1} + \mathfrak{P}(t - t_1) = -\frac{1}{\operatorname{dn} t_1} \frac{1}{t - t_1} + \mathfrak{P}(t - t_1),$$

wobei das vieldeutige Zeichen $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeutet. Weiter ist offenbar

$$\frac{1}{k'^2} \operatorname{dn} t \,.\, \operatorname{tn} t = -\frac{1}{k'^2} \frac{1}{t - t_1} + \mathfrak{P}(t - t_1),$$

also, indem man an der Stelle t_1 reguläre Glieder beifügt,

$$C_0 = -\frac{1}{k'^2} \frac{1}{t - t_1} + \mathfrak{P}(t - t_1),$$

$$D(t_0, t) = \frac{b_1 A_0(t_1)}{k'^2} \frac{1}{t - t_1} + \mathfrak{P}(t - t_1).$$

Da nun $A_0(t)$ stets endlich und positiv ist, so erfüllt die Größe $D(t_0, t)$ an jeder Stelle $t = t_1$ die Gleichungen

$$D(t_0, t_1 - 0) = -\infty, \quad D(t_0, t_1 + 0) = +\infty$$

oder beide Gleichungen mit umgekehrtem Vorzeichen der rechten Seite. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Scheiteln geht also $D(t_0, t)$ von $-\infty$ bis $+\infty$, muß also eine ungerade Anzahl von Malen verschwinden, was dann ebensoviel konjugierte des Punktes o liefert.

Daß diese Anzahl aber nur 1 sein kann, zeigt ein Blick auf die Nullstellen der Größe C_0. Sind nämlich t_1 und t_2 benachbarte Scheitel, so liegt zwischen ihnen nur eine Nullstelle der Größe C_0, etwa t'; auf den Strecken $t_1 \cdots t'$ und $t' \cdots t_2$ kann also höchstens je eine Nullstelle der Größe $D(t_0, t)$ vorhanden sein. Da deren Gesamtzahl auf der Strecke $t_1 \cdots t_2$ aber ungerade ist, so muß diese Anzahl Eins sein.

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Scheiteln liegt also genau ein konjugierter des beliebigen, von den Scheiteln verschiedenen Punktes o.

VIII.

Wir kehren zu den allgemeinen Ansätzen des § V zurück. Der Punkt o, dessen konjugierte man suchte und untersuchte, mußte von den Scheiteln verschieden sein; es bleiben noch die konjugierten Punkte der Scheitel zu untersuchen. Zu diesem Zweck dienen die Betrachtungen des § IV mit leichter Abänderung.

Für die untersuchte Extremale sei $a = a_0$, $\lambda = \lambda_0$; an Stelle der Gleichungen (17) treten die Gleichungen

$$x'y'' - x''y' = \frac{H_{yx'}}{H_1}, \quad x'x'' + y'y'' = 0,$$

und da H_1 auf der betrachteten Extremale, also für $\lambda = \lambda_0$, nicht verschwindet, ist die rechte Seite der ersten hingeschriebenen Gleichung auch in λ an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ regulär. In den Entwicklungen des § IV braucht daher neben y_0 und a nur noch λ unter den Funktionszeichen f, g, H_x, $H_{x'y}$ hinzugefügt zu werden; an Stelle der Gleichungen (19), (20) hat man

$$H_{x'}(y_0, 1, 0, \lambda) = a, \quad H_{x'y}(y_0, 1, 0, \lambda)dy_0 + G_{x'}(y_0, 1, 0)d\lambda - da = 0$$

zu schreiben und erhält so wie dort für die Extremalen in der Umgebung der betrachteten die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \Phi(t, a, \lambda) + b = \mathfrak{x}(t, a, b, \lambda), \\ y &= \Psi(t, a, \lambda) \qquad = \mathfrak{y}(t, a, b, \lambda), \quad \mathfrak{x}_b = 1, \mathfrak{y}_b = 0. \end{aligned}$$

Auch die weitere Schlußreihe bleibt bei Bestand; unter der Annahme

$$x = b + \psi(p, a, \lambda), \quad y = \phi(p, a, \lambda)$$

gilt statt der Gleichung (25) die folgende

$$H_{x'y}dy + \frac{\partial H_{x'}}{\partial p}dp + G_{x'}d\lambda - da = 0,$$

in der die Gleichung

$$H_{x'} = F_{x'} + \lambda G_{x'} = a$$

wirksam ist; weiter folgt

$$\phi_a(p, a, \lambda) = \frac{1}{H_{x'y}}, \quad \phi_\lambda(p, a, \lambda) = \frac{-G_{x'}}{H_{x'y}},$$

und man findet genau wie dort, daß in einem Scheitel ($p = 0$) notwendig

$$\mathfrak{y}_a \neq 0, \quad \mathfrak{y}_a = \frac{1}{H_{x'y}}, \quad \mathfrak{y}_\lambda = \frac{-G_{x'}}{H_{x'y}} = -G_{x'}\mathfrak{y}_a \tag{48}$$

sein muß.

Um nach dieser Vorbereitung möglichst rasch zum Ziel zu kommen, erinnern wir an den allgemeinen Begriff der konjugierten Punkte bei der isoperimetrischen Aufgabe. Zwei auf einer Extremale $\mathfrak{C}$ liegende Punkte o und 1,

in denen $t = t_0$ und $t = t_1$ sei, sind konjugiert, wenn sie noch durch eine dem Bogen $\mathfrak{C}$ unendlich nahe benachbarte Extremale verbunden werden können, die bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung denselben Wert des isoperimetrischen Bedingungsintegrals liefert wie die Extremale $\mathfrak{C}$. In der Darstellung

$$x = \mathfrak{x}(t, a, b, \lambda), \quad y = \mathfrak{y}(t, a, b, \lambda)$$

$$\omega = \int_{t_0}^{t_1} G(y, x', y')\,dt$$

gibt dies die Forderungen

$$dx\Big|^{t=t_0} = dy\Big|^{t=t_0} = dx\Big|^{t=t_1} = dy\Big|^{t=t_1} = d\omega = 0, \tag{49}$$

wobei a, b, λ, t_0, t_1 differentielle Änderungen erhalten. Bezeichnet man also durch die Kopfmarken 0 und 1, daß die betreffende Größe an den Stellen 0 und 1 auf der Extremale $\mathfrak{C}$ gebildet werden soll und entsprechend der Richtung wachsender t, so ergibt sich nach (49)

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\mathfrak{x}}_t\,dt_0 + \overset{0}{\mathfrak{x}}_a\,da + \overset{0}{\mathfrak{x}}_b\,db + \overset{0}{\mathfrak{x}}_\lambda\,d\lambda &= 0\\
\overset{0}{\mathfrak{y}}_t\,dt_0 + \overset{0}{\mathfrak{y}}_a\,da + \overset{0}{\mathfrak{y}}_b\,db + \overset{0}{\mathfrak{y}}_\lambda\,d\lambda &= 0\\
\overset{1}{\mathfrak{x}}_t\,dt_1 + \overset{1}{\mathfrak{x}}_a\,da + \overset{1}{\mathfrak{x}}_b\,db + \overset{1}{\mathfrak{x}}_\lambda\,d\lambda &= 0\\
\overset{1}{\mathfrak{y}}_t\,dt_1 + \overset{1}{\mathfrak{y}}_a\,da + \overset{1}{\mathfrak{y}}_b\,db + \overset{1}{\mathfrak{y}}_\lambda\,d\lambda &= 0\\
\omega_{t_0}\,dt_0 + \omega_{t_1}\,dt_1 + \omega_a\,da + \omega_b\,db + \omega_\lambda\,d\lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Wenn nun 0 und 1 beide Scheitel sind, so folgt nach den durchgeführten Betrachtungen und Definitionen

$$\overset{0}{\mathfrak{y}}_t = \overset{1}{\mathfrak{y}}_t = 0. \quad \overset{0}{\mathfrak{y}}_b = \overset{1}{\mathfrak{y}}_b = 0, \quad \overset{0}{\mathfrak{x}}_b = \overset{1}{\mathfrak{x}}_b = 1,$$

$$\overset{0}{\mathfrak{y}}_a \neq 0, \quad \overset{1}{\mathfrak{y}}_a \neq 0, \quad \overset{0}{\mathfrak{x}}_t \neq 0, \quad \overset{1}{\mathfrak{x}}_t \neq 0,$$

$$\omega_{t_0} = -G(y, x', y')\Big|^0 = -\overset{0}{\mathfrak{x}}_t\overset{0}{G}_{x'}, \quad \omega_{t_1} = +G(y, x', y')\Big|^1 = \overset{1}{\mathfrak{x}}_t\overset{1}{G}_{x'};$$

dazu kommt die offensichtliche Gleichung $\omega_b = 0$, da ω offenbar von b nicht abhängt. Die Elimination der fünf Differentiale $dt_0, dt_1, da, db, d\lambda$ aus den Gleichungen (49) ergibt hiernach

$$\begin{vmatrix}
\overset{0}{\mathfrak{x}}_t & 0 & \overset{0}{\mathfrak{x}}_a & 1 & \overset{0}{\mathfrak{x}}_\lambda\\
0 & 0 & \overset{0}{\mathfrak{y}}_a & 0 & \overset{0}{\mathfrak{y}}_\lambda\\
0 & \overset{1}{\mathfrak{x}}_t & \overset{1}{\mathfrak{x}}_a & 1 & \overset{1}{\mathfrak{x}}_\lambda\\
0 & 0 & \overset{1}{\mathfrak{y}}_a & 0 & \overset{1}{\mathfrak{y}}_\lambda\\
-\overset{0}{\mathfrak{x}}_t\overset{0}{G}_{x'} & \overset{1}{\mathfrak{x}}_t\overset{1}{G}_{x'} & \omega_a & 0 & \omega_\lambda
\end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$\overset{0}{\mathfrak{x}}_t\overset{1}{\mathfrak{x}}_t(\overset{0}{G}_{x'} - \overset{1}{G}_{x'})(\overset{0}{\mathfrak{y}}_a\overset{1}{\mathfrak{y}}_\lambda - \overset{1}{\mathfrak{y}}_a\overset{0}{\mathfrak{y}}_\lambda) = 0$$

oder nach der letzten Gleichung (48)

$$\overset{0}{\mathfrak{x}}_t\overset{1}{\mathfrak{x}}_t\overset{0}{\mathfrak{y}}_a\overset{1}{\mathfrak{y}}_a(\overset{0}{G}_{x'} - \overset{1}{G}_{x'})^2 = 0.$$

Die ersten vier Faktoren sind von Null verschieden; die beiden Scheitel 0 und 1 sind also konjugiert, wenn

$$G^0_{x'} - G^1_{x'} = 0 .$$

Das ist bei der in § VII behandelten Aufgabe der Fall, da hier in allen Scheiteln die wachsenden Werten von t entsprechenden Richtungen dieselben sind und dabei

$$G_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \pm 1 ;$$

es gilt immer das positive oder immer das negative Vorzeichen. Dasselbe gilt immer, wenn G von y frei ist und in den betrachteten beiden Scheiteln die Richtungen wachsender t übereinstimmen, nicht entgegengesetzt sind.

Weiter läßt sich noch etwas Allgemeines aussagen für den Fall, daß die Extremale zwischen zwei Geraden $y = \text{const.}$, sie berührend, mehrmals hin und her geht und dabei in den Berührungspunkten auf jeder dieser Geraden immer in derselben Richtung fortgeht, daß also x' in den Scheiteln, die einer der beiden Geraden $y = \text{const.}$ angehören, stets dasselbe Vorzeichen hat. Ist nämlich $y = y_0$ eine jener Geraden, so ist für $G_{x'}$ immer der eine oder immer der andere der Werte $G_{x'}(y_0, 1, 0)$, $G_{x'}(y_0, -1, 0)$ zu nehmen. Beziffert man daher alle Scheitel der Extremale, wie sie im Sinne wachsender t aufeinander folgen, so liegen auf der Geraden $y = y_0$ die gerade bezifferten oder die ungerade bezifferten; nimmt man zwei von ihnen für die obigen Stellen 0 und 1, so verschwindet die Differenz $G^0_{x'} - G^1_{x'}$; diese beiden Scheitel sind konjugiert. Im ganzen sind also je zwei Scheitel konjugiert, deren Ziffern eine gerade Differenz haben.

Ausgegeben am 29. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 3. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Haber sprach über Gold und Silber im Meerwasser.

Eine sehr große Anzahl von Analysen, ausgeführt an Wasserproben aus den verschiedensten Meeren, hat in der Bai von San Franzisko im Mittel 0.01 bis 0.015 mg Gold in der Tonne, im Süd-Atlantik 0.008 mg/Tonne, dagegen in polaren Wässern um Island und vor der grönländischen Ostküste am Packeis 0.04 mg/Tonne und darüber ergeben. Besonders goldreich war das Schmelzwasser einiger Eisproben von der letzterwähnten Stelle.

2. Hr. Schur legte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. G. Szegö in Berlin vor: Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. (Ersch. später.)

Wählt man auf dem Einheitskreis als Belegungsfunktion eine elliptische Thetafunktion, so führt das Orthogonalisierungsproblem auf eine Folge von Polynomen, die in einfacher Weise mit den von Gauss in seiner »Summatio quarundam serierum singularium« eingeführten Ausdrücken zusammenhängen. Es ergeben sich zugleich neue bemerkenswerte Eigenschaften der Gaussschen Ausdrücke.

3. Hr. Haberlandt legte eine Arbeit vor »Über den Blattbau der *Crataegomespili* von Bronvaux und ihrer Eltern«.

Die Pfropfbastarde *Crataegomespilus Asnieresii* und *Dardari* werden seit Erwin Baur als Periklinalchimären aufgefaßt: *Mespilus germanica* hat den einschichtigen bzw. zweischichtigen Mantel, *Crataegus monogyna* den Kern geliefert. In der vorgelegten Arbeit wird gezeigt, daß der anatomische Bau der Laubblätter beider Pfropfbastarde mit dieser Annahme im Widerspruch steht, da er weit mehr dem Bau eines sexuellen Bastards entspricht. Es ist sonach mindestens wahrscheinlich, daß die genannten Pfropfbastarde durch Verschmelzung vegetativer *Mespilus*- und *Crataegus*-Zellen und -Kernen entstanden, daß sie »Burdonen« sind. Die Periklinalchimärentheorie der *Crataegomespili* ist nur haltbar, wenn gewisse Hilfshypothesen herangezogen werden.

4. Vorgelegt wurde die 2. Lieferung des I. Bandes des Nomenclator animalium generum et subgenerum (Berlin 1926) und Fasc. 42 der mit Unterstützung der Akademie veröffentlichten Opuscula Ichneumonologica von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1926).



Über den Blattbau der Crataegomespili von Bronvaux und ihrer Eltern.

Von G. Haberlandt.

Mit 21 Textfiguren.

I. Einleitung.

Zu der vorliegenden Arbeit bin ich auf einem Umwege gelangt. Den Ausgangspunkt bildeten Untersuchungen über den Bau der Spaltöffnungen sexueller Bastardpflanzen, die zu dem Zwecke ausgeführt wurden, um festzustellen, wie sich solche vegetative Zellen sexueller Bastarde verhalten, von denen auf Grund ihres komplizierten Baues zu erwarten ist, daß bei ihrer Entwickelung besonders zahlreiche Gene der elterlichen Chromosomensätze aktiv werden. Solche Zellen sind vor allem die Schließzellen der Spaltöffnungen, die in bezug auf den Bau ihrer Wände, auf die Beschaffenheit ihres Inhaltes und auf ihre physiologischen Eigentümlichkeiten besonders komplizierte Elementarorgane darstellen.

Je zahlreicher die Gene sind, die bei der Ausgestaltung einer Zelle wirksam werden, desto leichter wird es zu Entwickelungsstörungen kommen, wenn sich die von verschiedenen Arten stammenden väterlichen und mütterlichen Chromosomen nicht vertragen und »disharmonische Idioplasmaverbindungen« bilden. Nach der Ansicht verschiedener Forscher äußert sich diese Unverträglichkeit vielleicht darin, daß beim Zusammenwirken der beiderlei Chromosomen giftige Stoffwechselprodukte entstehen, die je nach der Menge, in der sie gebildet werden, zum Absterben, zu Hemmungs- und Mißbildungen oder auch zu luxurierendem Wachstum führen.

Ich habe nun im Frühjahr und Sommer 1925 einige Bastarde sowie auch Kulturpflanzen, deren Bastardcharakter erwiesen oder wenigstens wahrscheinlich ist, hinsichtlich der Beschaffenheit der Schließzellen ihrer Spaltöffnungen untersucht und tatsächlich die erwarteten Erscheinungen feststellen können. Frühzeitiges Absterben einer oder beider Schließzellen zahlreicher Spaltöffnungen, Hemmungs- und Mißbildungen, sowie auch Luxurierungserscheinungen, die sich durch über die Norm gesteigertes Wachstum oder durch das häufige Vorkommen von Zwillingsspaltöffnungen zu erkennen gaben, ließen sich in fast allen Fällen beobachten.

Es lag nun nahe, diese Untersuchung auf Pfropfbastarde auszudehnen, von denen ich im Herbst 1925 die *Crataegomespili* von Bronvaux in Angriff

nahm. Das positive Ergebnis dieser Untersuchung veranlaßte mich, auch die gewöhnlichen Epidermiszellen, die Haare und schließlich auch die übrigen Gewebesysteme der Laubblätter in Spreite und Blattstiel zu untersuchen und sie mit den betreffenden Geweben der beiden Eltern, *Mespilus germanica* und *Crataegus monogyna*, zu vergleichen. Das Ergebnis war insofern ein überraschendes, als es mit der herrschenden Annahme, die *Crataegomespili* seien Periklinalchimären, im Widerspruch steht. Ob dieser Widerspruch lösbar oder unlösbar ist, wird im Schlußabschnitt diskutiert werden. Da meine Untersuchungen über die Spaltöffnungen sexueller Bastarde noch nicht abgeschlossen sind, so soll das Ergebnis meiner an den Laubblättern der *Crataegomespili* und ihrer Eltern gemachten Beobachtungen schon jetzt mitgeteilt werden, zumal es ja auch in den Rahmen der Ausgangsuntersuchung nicht mehr hineinpaßt.

Das Untersuchungsmaterial wurde Anfang Oktober 1925 im Botanischen Garten zu Berlin-Dahlem gesammelt, in Alkohol konserviert und an Handschnitten untersucht. Zum Vergleich habe ich auch im Mai 1926 gesammeltes Material herangezogen. Da *Crataegus monogyna* eine sehr formenreiche Art ist, gelangte auch Herbarmaterial aus dem Botanischen Museum in Dahlem von sehr verschiedenen Standorten zur Untersuchung, und zwar solches aus der Mark Brandenburg (Rüdersdorf), aus der Provinz Hannover (Rüstersiel bei Wilhelmsaue), aus Tirol (Lienz), Mittelsteiermark (Gösting bei Graz), Mazedonien (Üsküb und Doeran), Griechenland (Eubaea) und Mesopotamien (M. Ida bei Kareikos). Auch Herbarmaterial von *Mespilus germanica* wurde untersucht, und zwar aus der Mark Brandenburg (Oderberg), Sachsen (Lößnitzgrund bei Dresden), Rheinpfalz (Wälder bei Dürkheim und Hartenburg bei Dürkheim), Frankreich (Arringaz bei Gray, Haute Saône), Italien (Casinalbo nel Modenese und Camaldoli bei Neapel), Mazedonien (Vrdena), Kaukasus (Ossetia), Transkaukasien (Borshom) und Paphlagonien (Küre-Nahas).

Die Blätter der Herbarpflanzen stammten teils von blühenden, teils von fruchtenden Zweigen, die in den Monaten Mai bis Oktober gesammelt wurden. Für die Vergleichbarkeit der Untersuchungsobjekte ist es nicht belanglos, daß im anatomischen Bau der Blätter blühender Zweige sich gewisse Unterschiede gegenüber den Blättern fruchttragender Zweige geltend machen. Sie beruhen darauf, daß die Entwickelung der verschiedenen Blattgewebe, insbesondere des Mesophylls, ziemlich langsam vor sich geht. Vollkommen ausgebildet ist der anatomische Bau der Blätter erst im Spätsommer und im Herbste.

Der Blattbau von *Mespilus*- und *Crataegus*-Zweigen, die auf verschiedenen Standorten, in weit voneinander entfernten Gegenden gesammelt wurden, weist keine wesentlichen Verschiedenheiten auf. Eine Ausnahme bildet nur die oberseitige Epidermis der Mispelblätter. Im übrigen sind die Unterschiede nicht qualitativer, sondern nur quantitativer Natur. Soweit es nötig ist, wird darauf im speziellen Teile hingewiesen werden. Den Beschreibungen der anatomischen Details liegt zunächst das Alkoholmaterial aus dem Botanischen Garten in Berlin-Dahlem zugrunde. Sie beziehen sich, soweit es feststellbar war, auf Sonnenblätter. Am exaktesten würde die Untersuchung ausgefallen

sein, wenn es möglich gewesen wäre, die Blätter des Baumes von Bronvaux, der die *Crataegomespili* erzeugte, zu untersuchen. Das war leider nicht möglich; doch ist nicht anzunehmen, daß dadurch die Vertrauenswürdigkeit der erhaltenen Resultate beeinträchtigt worden ist.

Bei der Untersuchung der Blattspreiten wurden stets Partien aus ihrer Mitte verwendet, nachdem sich herausgestellt hatte, daß die Spitzen und Basen der Spreiten nicht nennenswert anders gebaut sind. Von den Blattstielen wurden Schnitte von der Basis bis zur Spitze in Abständen von 1—5 mm hergestellt, um den Längsverlauf der Gefäßbündel zu studieren.

Für die Überlassung des Untersuchungsmaterials bin ich meinem verehrten Kollegen, Hrn. Prof. L. Diels, zu großem Dank verpflichtet. Auch meinem lieben Freunde und Kollegen, Hrn. Prof. C. Correns, der mir eine Anzahl von sexuellen Bastarden, die den Ausgangspunkt der Untersuchung bildeten, zur Verfügung gestellt hat und mich auch durch manchen wertvollen Wink aus dem Schatz seiner reichen Erfahrungen unterstützte, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

II. Historisches.

Die *Crataegomespili* von Bronvaux sind bekanntlich »Pfropfbastarde«, die nach Pfropfung von *Mespilus germanica* auf *Crataegus monogyna* an der Verbindungsstelle von Reis und Unterlage in Gestalt zweier Ästchen aufgetreten sind. Der eine Zweig glich mehr dem Weißdorn und wurde *Crataegomespilus Asnieresii* genannt; der andere erinnerte mehr an die Mispel und erhielt den Namen *Crataegomespilus Dardari*. Beide Formen sind jetzt in den meisten botanischen Gärten zu finden. Über eine dritte Form, *Cr. Iouini*, die sich von *Cr. Asnieresii* kaum unterscheidet, ist seit Nolls kurzer Angabe nichts weiter bekannt geworden.

Der äußere Habitus der beiden *Crataegomespili*, die Blattgestalt, der Blütenbau, die Fruchtform usw. sind von Noll, Joh. Meyer u. a. bereits so ausführlich beschrieben worden, daß hier nicht näher darauf einzugehen ist.

Während Noll, der sich zuerst sehr eingehend mit den *Crataegomespilis* beschäftigt hat, ihre Entstehung auf die Verschmelzung von *Crataegus*-Zellen und -Kernen mit *Mespilus*-Zellen zurückzuführen geneigt war, hat Baur als erster in bestimmter Weise die Ansicht ausgesprochen, daß diese Pfropfbastarde Periklinalchimären sind. Beide Formen besitzen nach ihm einen *Crataegus*-Kern und einen *Mespilus*-Mantel. Dieser besteht bei *C. Asnieresii* nur aus der Epidermis, bei *C. Dardari* dagegen außer dieser noch aus einer subepidermalen Zellschicht. Baur kommt zu dieser Annahme vor allem auf Grund der Anatomie der Laubblätter, die er eingehend untersucht hat, ohne freilich die Ergebnisse dieser Untersuchung ausführlicher mitzuteilen. Er gibt nur an, daß er die Blätter von *Cr. Asnieresii* oft geschnitten und mit denjenigen beider Eltern verglichen habe; es sei »mit aller Sicherheit zu sagen, daß die Blattepidermis vollkommen derjenigen von *Mespilus* gleicht« (I, S. 504). Da die Blattepidermen von *Crataegus* und *Mespilus* voneinander sehr verschieden sind, besonders hinsichtlich der Behaarung, so war es anscheinend leicht,

den *Mespilus*-Charakter der Blattepidermis von *C. Asnieresii* festzustellen. Das Blattinnere dagegen sei von dem von *Crataegus* »nicht zu unterscheiden und deutlich von demjenigen von *Mespilus* verschieden«. *C. Dardari* sei »nach der Blattanatomie zu schließen ein *Crataegus* mit zwei Zellschichten *Mespilus* außen«. Dies ist für Baur »das Resultat der Vergleichung einer großen Anzahl von Blättern« (I, S. 504). Näheres wird aber darüber nicht mitgeteilt.

Eine Bestätigung dieser Auffassung hat in einer ausführlichen Arbeit Johannes Meyer zu bringen versucht. Da es Winkler gelungen ist, sein *Solanum tubingense, Koelreuterianum, proteus* und *Gaertnerianum* auf Grund von Chromosomenzählungen mit Sicherheit als Periklinalchimären zu kennzeichnen, so lag es zunächst nahe, solche Zählungen auch bei den *Crataegomespilis* und ihren Eltern vorzunehmen. Schon Noll hat das ohne Erfolg versucht; J. Meyer dagegen gelang es festzustellen, daß bei *Crataegus* wie bei *Mespilus* die diploide Chromosomenzahl 32 beträgt. Es ist also unmöglich, den Charakter der *Crataegomespili* durch Zählung der Chromosomen im Mantel und im Kern zu bestimmen. Dagegen liefert die Gestalt der Chromosomen Anhaltspunkte: bei *Crataegus monogyna* sind sie kurz, gedrungen und dick, bei *Mespilus germanica* dagegen länger und schmäler, oft etwas gebogen. In der Vegetationsspitze von *Crataegomespilus Asnieresii* ließen sich schon in der subepidermalen Schicht typische *Crataegus*-Kernfiguren nachweisen. Bei *C. Dardari* gelang es wenigstens in einiger Entfernung von der Vegetationsspitze auch noch unter der Epidermis *Mespilus*-Kerne festzustellen, und zwar bis in die achte Schicht von außen. »In den gestreckten Zellen der inneren Gewebe waren wieder typische *Crataegus*-Kerne vorhanden.« Auf Grund anderer Beobachtungen nimmt Meyer mit Baur an, daß bei *Cr. Dardari* an der Vegetationsspitze nur zwei *Mespilus*-Zellagen den Mantel bilden.

Die anatomische Untersuchung der einzelnen Organe bestärkte dann Meyer in der Auffassung, daß die *Crataegomespili* Periklinalchimären sind, »deren Kernkomponente artreine Zellen von *Cr. monogyna*, deren Mantelkomponente solche von *Mespilus germanica* enthält« (S. 219). Wir werden später sehen, daß diese Behauptung nicht richtig ist. Hätte Meyer die Laubblätter genauer untersucht, so wäre er zu einem anderen Ergebnis gelangt. Seine Angaben über die Anatomie des Blattes sind sehr dürftig. Aus dem anatomischen Bau der Blattspreite glaubt er »nichts Bemerkenswertes« entnehmen zu können (S. 214) und verzichtet deshalb auf seine Beschreibung. Etwas näher geht er auf den Bau des Blattstiels ein, doch wird dieser, wie später gezeigt werden soll, unrichtig beschrieben.

Die Periklinalchimärennatur der *Crataegomespili*, die gegenwärtig für die große Mehrzahl der Forscher als erwiesen gilt, hat aber auch Gegner und Zweifler gefunden. Vor allem ist es L. Daniel, der auf Grund der Untersuchung zweier neuer *Crataegomespili*, *Cr. Bonnieri* und *Bruni*, an seiner schon seit langem vertretenen Ansicht festhält, daß die Eigenschaften der Pfropfbastarde auf der Vereinigung, Verwachsung (*soudure*) von vegetativen Zellen beider Eltern, auf Plasmaverschmelzung (*coalescence des plasmas*) und auf der spezifischen Wirkung morphogener Substanzen beruhen (S. 46). Das soll auch für die *Crataegomespili* gelten. Daniel stützt sich dabei auf die Untersuchung

der Früchte und der Sepalen der vorhin erwähnten *Crataegomespili* von Saujon. Er findet, daß bei *Crataegomespilus Bonnieri* die Merkmale der beiden Eltern nicht artrein zur Ausbildung gelangen, wie es die Chimärentheorie verlangen würde, sondern daß eine Reihe neuer Merkmale auftritt, wie z. B. das Vorhandensein von mehrschichtigem Palisadengewebe in den Sepalen. Die theoretischen Ausführungen Daniels leiden an einer gewissen Unklarheit und sind nicht überzeugend.

Eine wichtige Beobachtung, die die Periklinalchimärentheorie betreffs der *Crataegomespili* zu erschüttern geeignet ist, hat vor kurzem F. E. Weiss veröffentlicht. Er hat die Epidermiszellen der Laubblätter von *Mespilus* und *Crataegus* sowie der beiden *Crataegomespili* von Bronvaux in der Oberflächenansicht untersucht, was bisher versäumt worden ist, und folgendes festgestellt: Auf der Blattoberseite sind die Epidermiszellen bei *Crataegus* quadratisch, rechteckig oder polygonal und mit ganz geraden Seitenwänden versehen; bei *Mespilus* dagegen sind sie bedeutend größer, ihre Seitenwände sind stark gewellt[1]. Der Unterschied zwischen den Epidermiszellen der beiden Eltern ist hiernach sehr auffallend. Bei *Crataegomespilus Asnieresii* müßten nun nach der Periklinalchimärentheorie die Epidermiszellen wie bei *Mespilus* stark gewellte Seitenwände besitzen; das ist aber nicht der Fall, die Zellen sind vielmehr genau wie bei *Crataegus* mit ganz geraden Seitenwänden versehen. Bei *Crataegomespilus Dardari* sind die oberen Epidermiszellen etwas größer, die Seitenwände schwach gewellt, so daß hier eine Mittelbildung vorliegt, die aber mehr an *Crataegus* erinnert. — Vier Mikrophotographien illustrieren diesen Tatbestand. Weiss folgert daraus: »The features revealed bear out the conclusions of Daniel that in graft-hybrids we have a similarity with the phenomena noted in the case of seed-hybrids.« Bei den Pfropfbastarden dominiert in der Epidermis einerseits die für *Mespilus* charakteristische Behaarung, andererseits die für *Crataegus* charakteristische Form und Größe der Zellen, und zwar vollständig, wie bei *Cr. Asnieresii*, oder teilweise, wie bei *Cr. Dardari*. — Den Bau der Haare und der Spaltöffnungen hat Weiss nicht berücksichtigt.

Schließlich ist hier noch kurz auf die entwickelungsgeschichtlichen Untersuchungen einzugehen, die Konrad L. Noack im Anschluß an seine Studien an panaschierten Pelargonien über die Zellteilungsvorgänge bei der Blattentwickelung der *Crataegomespili*, insbesondere bei *Cr. Dardari*, angestellt hat. Er glaubt behaupten zu können, »daß die ganze Masse des Blattes bei *Cr. Dardari* aus einer einzigen subepidermalen Periblemschicht gebildet wird« (S. 524). Da nun diese eine *Mespilus*-Schicht sein soll, so folgert Noack, »daß sämtliche Blätter und Blattstiele aus *Mespilus*-Gewebe bestehen«, und daß diese sonach am Aufbau der ganzen Pflanze als einer Periklinalchimäre nicht beteiligt sind (S. 528). Die Beobachtungen bzw. Abbildungen Noacks sind aber deshalb nicht beweisend, weil sie sich auf zu alte Blattanlagen beziehen. »Die allerersten Stadien der Höckerbildung am Vegetationspunkt aufzufinden, ist mir nicht gelungen« (S. 522). Gerade auf diese Stadien,

[1] Diese Angabe ist, wie wir sehen werden, nur mit gewissen Einschränkungen richtig.

auf mediane Längsschnitte durch die jüngsten Blattanlagen, kommt es aber vor allem an. Ihre Untersuchung ist also nachzuholen. Dabei wird sich wahrscheinlich ergeben, daß auch die zweite Periblemschicht am Aufbau des Blattes beteiligt ist und wenigstens den größten Teil des Gefäßbündelsystems des Blattes liefert. Nach Ellynor Grau sollen tatsächlich bei *Solanum* — ob bei *S. lycopersicum* und *nigrum* oder den betreffenden Chimären wird nicht gesagt — die Blätter aus dem Dermatogen und mindestens zwei Periblemschichten entstehen. Doch sind diese Angaben zu kurz und unbestimmt. Für die Beteiligung der zweiten Periblemzellage an der Bildung des Blattes der Winklerschen diplochlamyden Periklinalchimäre *Solanum proteus* (mit zweischichtigem *lycopersicum*-Mantel und *nigrum*-Kern) sprechen auch die anatomischen Beobachtungen M. Mayer-Albertis, die auf Grund der histologischen Merkmale »die Hauptleitbündel in Stiel und Spreite, vielleicht sogar das ganze Leitbündelsystem einschließlich der Scheiden und vielleicht den Parenchymmantel des Stiels« auf eine tiefer gelegene Schicht des Vegetationspunktes, keinesfalls aber auf die äußerste Periblemschicht zurückzuführen geneigt ist (S. 26). — Übrigens liegen auch ältere Angaben über den Aufbau der Blätter aus dem Dermatogen und zwei Periblemschichten vor. Die zuverlässigsten rühren von Herrig her, der *Honkenya peploides* sehr genau untersucht hat.

III. Die Blattspreite.

A. Die Epidermis, Haare und Spaltöffnungen.

1. *Mespilus germanica.*

a) Epidermiszellen. Auf der Blattoberseite sind die Epidermiszellen der aus dem Botanischen Garten in Dahlem stammenden Blätter (Oktober 1925, Ende Mai 1926) mit sehr stark gewellten Seitenwänden versehen (Fig. 1 A). Etwas weniger stark ist die Wellung bei ausgewachsenen Blättern desselben Strauches, die Anfang Mai 1926 gesammelt wurden. Die Blätter des Herbarmaterials verhalten sich in bezug auf dieses Merkmal sehr verschieden. Bei manchen ist die Wellung der oberseitigen Epidermiszellen ebenso oder fast ebenso stark ausgeprägt wie bei dem Dahlemer Material (Camaldoli bei Neapel, 29. August, Oderberg, 26. September, Hartenberg bei Dürkheim, 16. August, Borshom in Transkaukasien, 24. August). Die Blätter anderer Standorte weisen dagegen oberseits viel weniger stark gewellte Epidermiszellen auf; oft sind die Seitenwände nur gebogen oder schwach S-förmig gekrümmt, häufig auch ganz gerade (Fig. 1 B, D). Dabei fällt aber auf, daß sich größere und kleinere Areale der Blattoberseite hinsichtlich des Wellungsgrades der Epidermiszellen recht verschieden verhalten. Nie fehlt die Wellung auf ausgedehnten Bezirken vollständig. Stets wechseln Areale mit schwach oder gar nicht gewellten Zellen mosaikartig mit Arealen ab, die stärkere Wellung zeigen. Meist sind diese letzteren wie größere oder kleinere Inseln (die im extremsten Falle nur aus zwei Zellen bestehen können [Fig. 1 C]) den Arealen mit nicht oder nur sehr schwach gewellten Zellen eingelagert (Lößnitzgrund bei Dresden, 4. August, Küre-Nahas in Paphlagonien, 3. September). Ob es sich hierbei um Lokal-

rassen oder nur um Standortsmodifikationen handelt, muß dahingestellt bleiben. Für die Vergleichung mit *Crataegus monogyna* und den *Crataegomespilis* ist jedenfalls wichtig, daß mehr oder minder stark gewellte Epidermiszellen den Blattoberseiten niemals fehlen, sei es, daß sie sich über die ganze Blattfläche verbreiten oder nur einzelne größere oder kleinere Inseln bilden.

Auf der Blattunterseite sind die Epidermiszellen ebenfalls mit stark gewellten Seitenwänden versehen, und zwar auch dann, wenn sie oberseits nur schwach oder nur stellenweise gewellt sind.

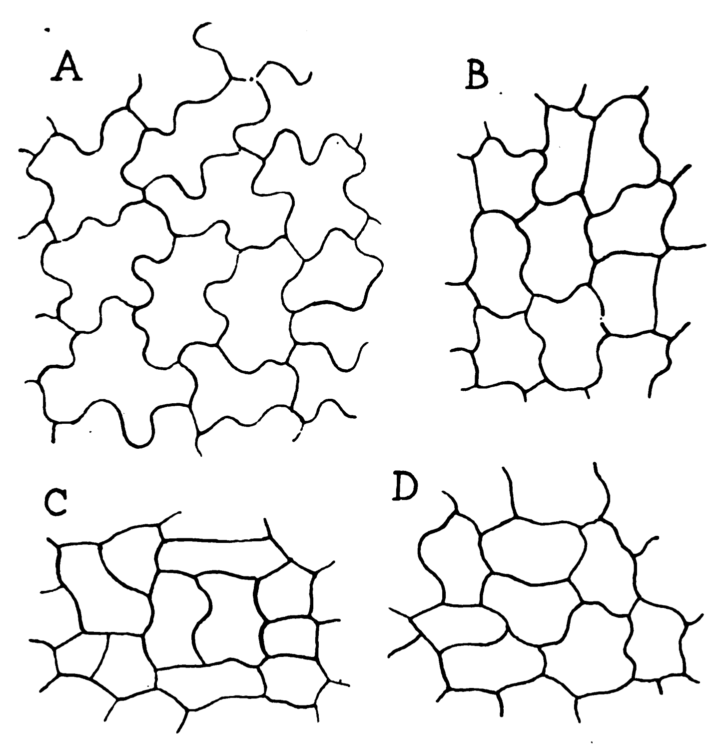


Fig. 1. Mespilus germanica. Epidermiszellen der Blattoberseite. A aus Dahlem. B aus Mazedonien. C und D aus Paphlagonien.

Die obere Epidermis weist über dem Palisadengewebe in der Regel keine oder nur schwache Kutikularleisten auf; über den Nerven sind sie mäßig stark entwickelt. Etwas stärkere Kutikularleisten besitzen die Blätter aus dem Lößnitzgrund bei Dresden und aus Vrdena in Mazedonien. Auf der Blattunterseite fehlen die Leisten oder sind nur angedeutet.

Die Innenwände der über dem Assimilationsgewebe gelegenen Epidermiszellen sind in hohem Maße schleimig verdickt (Fig. 2 A). Die Schleimpolster ragen konvex gegen die Zellumina vor; letztere sind oft bis auf schmale Spalten reduziert. Nur über den Gefäßbündel unterbleibt die Verschleimung der Innenwände.

Der größte tangentiale Durchmesser der Epidermiszellen beträgt bei den Dahlemer Blättern oberseits durchschnittlich 58, unterseits 42 μ; die Höhe der Zellen oberseits 18, unterseits 15 μ.

b) Haare. Auf der Blattoberseite treten Haare in größerer Anzahl nur über dem Mittelnerv, in geringerer dagegen über den feineren Nerven auf. Sehr zahlreich sind sie dagegen auf der Blattunterseite. Die Haare sind einzellig, steif, gerade oder schwach verbogen, in der Mitte durchschnittlich 18 μ dick. Das obere Haarende ist spitz, das Fußstück kegelförmig mit stielartigem, dünnem Fortsatz (Fig. 2B). Die stark verdickten Wände (4.5—5 μ) färben sich mit Chlorzinkjod in ihrer ganzen Dicke goldgelb, mit Sudan III rot, sind also stark kutinisiert. — Das Fußstück ist von 7—9 im Kreise angeordneten Nebenzellen umgeben, die durch tangentiale Teilungen von den dem Haar benachbarten Epidermiszellen abgetrennt sind (Fig. 2C). Ihre an das Fußstück grenzenden Seitenwände sind sehr stark verdickt.

Fig. 2. Mespilus germanica. A Oberseitige Blattepidermis im Querschnitt. B Haarbasis auf der Blattunterseite. C Haarbasis mit den Nebenzellen in der Flächenansicht.

Fig. 3. Mespilus germanica. Spaltöffnungen in der Flächen- und Querschnittsansicht.

c) Spaltöffnungen. Nur die Blattunterseite weist Spaltöffnungen auf. In der Flächenansicht sind die Schließzellenpaare bei geschlossener Spalte mehr minder länglich elliptisch. Ihre durchschnittliche Länge beträgt 32 μ, ihre Breite 22 μ; letztere beträgt sonach 68.7 Prozent der Länge. Der Vorhof ist durchschnittlich 10 μ breit und reicht fast bis zu den Polen des Apparates, wo er unter einem mehr minder spitzen Winkel endigt (Fig. 3A, B). — Auf Querschnitten sind die äußeren Kutikularleisten dünn, scharf, von wechselnder Breite (bis 5 μ), die Zentralspalte ist hoch, ein Hinterhof fehlt, da innere Kutikularleisten nicht vorhanden oder kaum angedeutet sind (Fig. 3C, D). Die Innenwände der Schließzellen sind sehr stark verdickt, viel stärker als die Außenwände. — Sehr charakteristisch sind in der Flächenansicht die bei vielen Spaltöffnungen von den Enden der Schließzellen in die benachbarten Epidermiszellen vorspringenden Membranleisten, die sich zuweilen

spalten und zu Falten erweitern. Manchmal tritt nur eine Leiste an einem Pole auf, manchmal zwei, die auseinanderspreizen (Fig. 3 B), im Maximum vier, d. i. je zwei an beiden Polen. Zuweilen sind statt der Leisten nur knötchenförmige Vorsprünge vorhanden (Fig. 3 A). — An den Dahlemer Blättern sind die Membranleisten schon im Mai ausgebildet, doch noch nicht ausgewachsen. Am Herbarmaterial waren die Leisten meist vorhanden, wenn auch oft nur ganz kurz (Oderberg, Lößnitzgrund, Hartenburg bei Dürkheim, Borshom in Transkaukasien). Das Auftreten solcher Membranleisten und -falten ist sonach ein zwar sehr häufiges, aber kein konstantes Merkmal der Spaltöffnungen. — Abnormale, mißgebildete Schließzellen wurden nicht beobachtet, Zwillingsspaltöffnungen fehlen, obliterierte Schließzellen sind sehr selten.

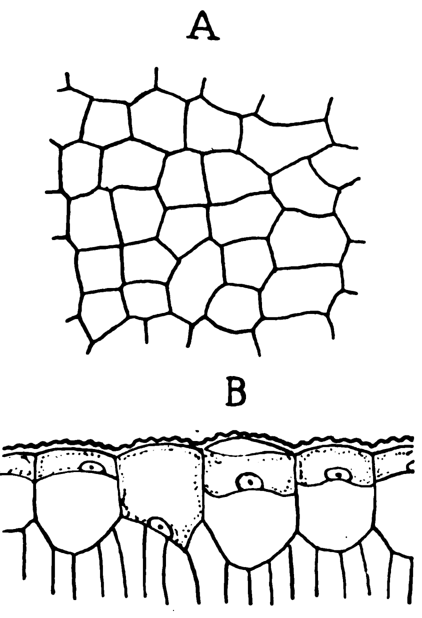


Fig. 4. Crataegus monogyna. A Epidermis der Blattoberseite in der Flächenansicht, B desgleichen in der Querschnittsansicht.

2. *Crataegus monogyna.*

a) Epidermiszellen. Die Blattoberseite besitzt polygonale, mit geraden oder hier und da schwach gebogenen Seitenwänden versehene Epidermiszellen (Fig. 4 A). Die Außenwände tragen geschlängelte kräftige Kutikularleisten, die meist einander annähernd parallel verlaufen, stellenweise aber auch ein unregelmäßiges Gewirre bilden oder auch ganz fehlen. Auf der Blattunterseite sind die Seitenwände gerade oder schwach gebogen, häufig auch s-förmig gekrümmt. Die einzelnen Blätter eines Zweiges verhalten sich übrigens in dieser Hinsicht oft ziemlich verschieden. Es gibt auch Blätter, auf deren Unterseite die Epidermisseitenwände fast durchgehends schwach gewellt sind. Eine so starke Wellung wie bei *Mespilus* wird aber niemals auch nicht annähernd erreicht. Die Kutikularleisten der unteren Epidermis sind schwächer als die der oberen; manche Bezirke sind ganz frei davon. Der größte Durchmesser der Epidermiszellen beträgt oberseits durchschnittlich 28 μ, unterseits 27 μ. — Die Epidermisinnenwände sind oberseits wie bei *Mespilus* stark schleimig verdickt (Fig. 4 B). Dünne Schleimpolster treten häufig auch an den Außenwänden auf. Zwischen den Zellen mit verschleimten Innenwänden finden sich oft auch einzelne Zellen oder Zellgruppen, deren Wände keinerlei Verschleimung zeigen. Diese Zellen sind in der Regel bedeutend niedriger als die verschleimten. Letztere werden oberseits durchschnittlich 50 μ hoch. Unter den Gefäßbündeln sind die Epidermiszellen niedriger, ihre Innenwände nicht verschleimt. — Auf der Blattunterseite erreichen die Epidermiszellen lange nicht die Höhe der oberseits gelegenen. Die Mehrzahl derselben besitzt nichtverschleimte Innenwände.

b) Haare. Bei dem Dahlemer Material treten auf der Blattoberseite nur sehr spärliche Haare über der Nervatur auf. Auf der Blattunterseite sind die

Haare über dem Mittelnerv und den stärkeren Seitennerven in größerer Anzahl vorhanden, vereinzelt auch über den feineren Nerven und dem Assimilationsgewebe. Die einzelligen Haare sind ungefähr ebenso lang wie bei *Mespilus*, doch geschmeidig, stark verbogen und geschlängelt, in der Mitte durchschnittlich 13 μ dick. Spitze und Basis wie bei *Mespilus*, Nebenzellen des Fußstücks in der Regel nur 5. Die Wanddicke schwankt sehr. Manche Haare besitzen Wände, die 3—3.5 μ dick sind, andere sind ganz dünnwandig und bandförmig kollabiert, meist auch der Länge nach tordiert. Alle Haare, auch die dickwandigen, färben sich mit Chlorzinkjod von der Basis bis zur Spitze dunkelviolett, bestehen demnach aus relativ reiner, nicht kutinisierter Zellulose. Die sehr zarte Kutikula wird nur schwach gelb. Die verdickten Wand-

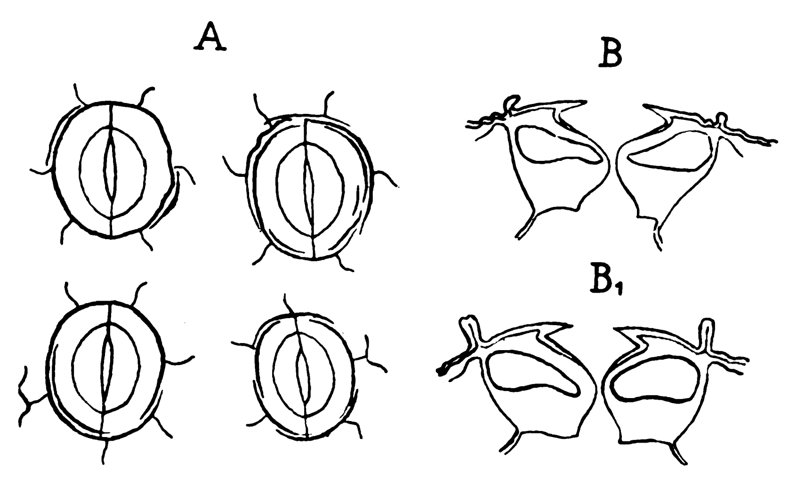


Fig. 5. Crataegus monogyna. A Spaltöffnungen in der Flächenansicht. B (Dahlem) Spaltöffnung im Querschnitt. B_1 (Gösting bei Graz) desgleichen.

partien der Nebenzellen färben sich lichtblau. — Das Herbarmaterial aus Mazedonien und Mesopotamien besitzt dickwandige Haare, die sich mit Chlorzinkjod dunkelviolett oder schmutzig grauviolett färben, also nicht oder nur sehr schwach kutinisiert sind.

c) Spaltöffnungen kommen nur auf der Blattunterseite vor. In der Flächenansicht sind die Schließzellenpaare bei geschlossener Spalte kurz elliptisch, gedrungen, nicht selten von fast kreisförmigem Umriß. Ihre durchschnittliche Länge beträgt 36 μ, ihre Breite 32 μ; letztere beträgt sonach 88.8 Prozent der Länge. Der Vorhof ist durchschnittlich 15 μ breit, elliptisch und reicht lange nicht bis zu den Polen der Schließzellen. Über der Umrißlinie des Apparates erhebt sich eine besonders kräftige Kutikularleiste, die ringsum vollkommen geschlossen ist; oder es treten an ihrer Stelle mehrere bogige Leisten auf, die mit ihren Enden übereinandergreifen (Fig. 5 A, B). Besonders stark und hoch sind diese Leistenringe beim Göstinger Material entwickelt, was namentlich auf Querschnitten auffällt (Fig. 5 B). Welche physiologische bzw. ökologische Bedeutung sie besitzen, ist ungewiß. Vielleicht handelt es sich um die Herstellung niederer äußerer Atemhöhlen oder wenigstens um Ansätze zu solchen. Die Kutikularleisten der Umgebung sind

schwächer und verlaufen entweder parallel zu den über dem Kontur der Spaltöffnungsapparate befindlichen Leistenringen oder ziehen an diesen geradlinig vorüber. — Auf Querschnitten sind die äußeren Kutikularleisten der Schließzellen dünn, von wechselnder Breite; die Zentralspalte ist niedrig, der trichterförmige Hinterhof wird von ganz schwachen inneren Kutikularleisten begrenzt (Fig. 5 B, B_1). Die Innenwände der Schließzellen sind sehr stark verdickt. — Abnormale, obliterierte Schließzellen und Zwillingsspaltöffnungen fehlen.

Die Epidermis der Laubblätter mit ihren Haaren und Spaltöffnungen weist demnach, wenn wir die vorstehenden Angaben kurz zusammenfassen, folgende Hauptunterschiede zwischen *Mespilus germanica* und *Crataegus monogyna* auf:

a) Die Epidermiszellen der Blattoberseite sind in der Oberflächenansicht bei *Mespilus* größer und auf der ganzen Blattfläche oder wenigstens auf inselförmigen Bezirken mit stark gewellten Seitenwänden versehen; sie besitzen keine oder nur schwache bis mäßig starke Kutikularleisten. Bei *Crataegus* sind die Zellen bedeutend kleiner, ihre Seitenwände sind gerade oder höchstens schwach gebogen, die Kutikularleisten stets kräftig. Auf Querschnitten sind die Epidermiszellen von *Crataegus* doppelt so hoch als die von *Mespilus*. Ihre Innenwände sind bei beiden schleimig verdickt, und zwar bei *Mespilus* aller über dem Assimilationsgewebe gelegenen Zellen, bei *Crataegus* nur die überwiegende Mehrzahl.

b) Die Haare sind bei *Mespilus* steif, gerade oder wenig verbogen, sehr dickwandig und stark kutinisiert; bei *Crataegus* dagegen geschmeidig, mannigfach verbogen, dünnwandig oder nur mäßig, selten stark verdickt und niemals kutinisiert. Dementsprechend färben sich die ersteren mit Chlorzinkjod goldgelb, die letzteren violett. Bei *Mespilus* ist die Behaarung der Blätter reichlich, bei *Crataegus* dagegen recht spärlich.

c) Die Spaltöffnungen sind bei *Mespilus* etwas kleiner und gestreckter als bei *Crataegus*, wo sie durch ihre gedrungene Form auffallen. Die Zentralspalte ist bei *Mespilus* höher als bei *Crataegus*; der hier vorhandene Hinterhof fehlt dort. Besondere Merkmale sind bei *Mespilus* die von den Polen der Spaltöffnungsapparate in die benachbarten Epidermis einspringenden Membranleisten, die freilich auch fehlen können, bei *Crataegus* die die Schließzellenpaare umsäumenden besonders kräftigen Kutikularleisten.

3. *Crataegomespilus Asnieresii.*

a) Epidermiszellen. In der Oberflächenansicht sind die Epidermiszellen, wie schon Weiss festgestellt hat, polygonal, mit geraden Seitenwänden; nur hier und da sind diese schwach gebogen (Fig. 6 A). Die Außenwände besitzen kräftigere Kutikularleisten, die bald einander parallel verlaufen, bald unregelmäßig geschlängelt sind; an manchen Stellen fehlen sie. Auf der Blattunterseite weisen die Epidermiszellen ziemlich stark gewellte Seitenwände auf, die Kutikularleisten sind weniger kräftig als oberseits. Auf Querschnitten sieht man, daß die Innenwände mit Schleimpolstern versehen sind (Fig. 6 B).

doch sind auch Zellen mit unverschleimten Innenwänden häufig; der größte tangentiale Durchmesser der Zellen beträgt oberseits 28 μ, unterseits 27 μ. Die Höhe der Epidermiszellen mit Schleimpolstern nur 22 μ; die ohne Polster sind 18 μ hoch.

b) Haare. Die Verteilung und Häufigkeit der Haare auf der Blattober- und -unterseite ist dieselbe wie bei *Mespilus*. Doch sind die Haare meist nicht gerade, sondern verbogen und geschlängelt wie bei *Crataegus*. Ihre durchschnittliche Dicke beträgt in der Mitte 10 μ, die Wanddicke 2.5 μ. So dünnwandige Haare wie bei *Crataegus* kommen nicht vor. Mit Chlorzinkjod nehmen

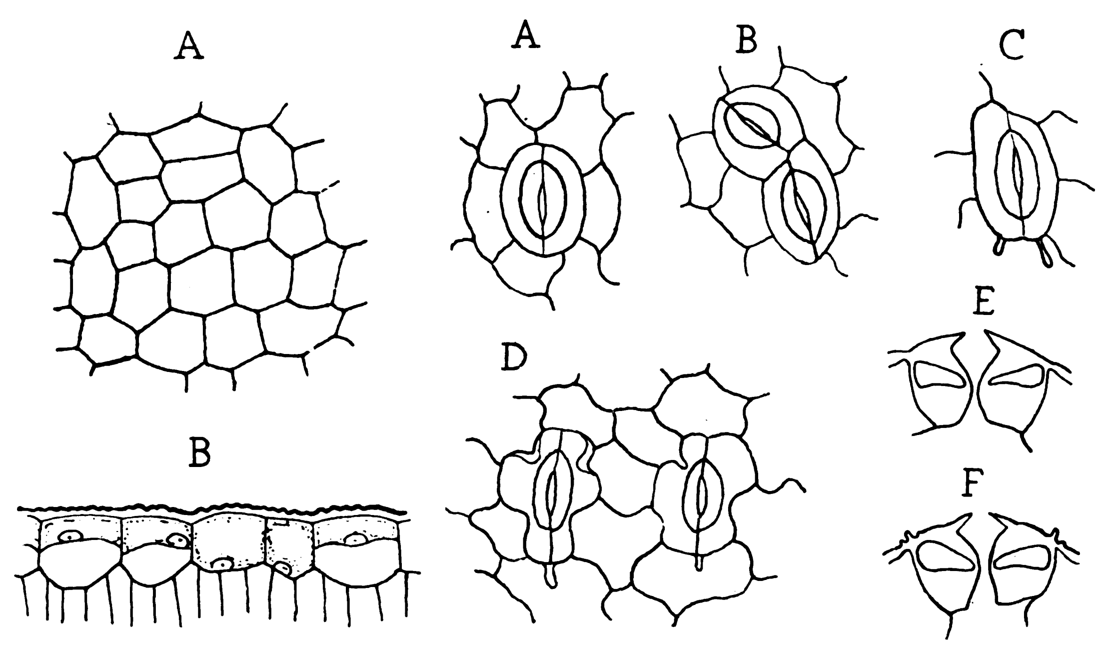


Fig. 6. Crataegomespilus Asnieresii. A Epidermis der Blattoberseite in der Flächenansicht, B desgleichen im Querschnitt.

Fig. 7. Crataegomespilus Asnieresii. A normale Spaltöffnung, B Zwillingsspaltöffnungen, C und D abnorme Spaltöffnungen, E Spaltöffnung im Querschnitt, F desgleichen, mit Kutikularring.

die Wände eine schmutzig grauviolette, häufig auch graugelbe Farbe an. Sie sind demnach schwach bis mittelstark kutinisiert. Fußstück und Nebenzellen (5—9) wie bei *Mespilus*.

c) Spaltöffnungen. In der Oberflächenansicht sind die Spaltöffnungsapparate bei geschlossener Spalte elliptisch, durchschnittlich 29 μ lang und 22 μ breit. Die Breite beträgt demnach 75.8 Prozent der Länge (Fig. 7 A). Der Längsdurchmesser der Apparate variiert übrigens stark, zwischen 22.5—35 μ. Die äußeren Kutikularleisten sind ziemlich dünn, scharfkantig (Fig. 7 E, F), die Zentralspalte niedrig, der Hinterhof bei bloß angedeuteter oder fehlender innerer Kutikularleiste enger als der Vorhof. Wie bei *Mespilus* ragen von den Polen der Schließzellen nicht selten Membranleisten in die benachbarten Epidermiszellen hinein (Fig. 7 C). Zuweilen treten über den Rückenwänden der Schließzellen, ähnlich wie bei *Crataegus*, Kutikularleisten auf, doch sind

sie nicht so scharf ausgeprägt (Fig. 7 F). — Neben diesen normal gebauten Spaltöffnungen treten nicht selten auch Abnormitäten auf. Die Schließzellen eines Apparates können ungleich groß (Fig. 7 C), ihre Rückenwände mehr oder minder stark gewellt sein, so daß die betreffenden Schließzellen Epidermiszellen gleichen (Fig. 7 D); die äußeren Kutikularleisten, der Vorhof und die Zentralspalte sind dabei normal ausgebildet. Ziemlich häufig kommen Spaltöffnungen mit einer obliterierten Schließzelle vor. Auch Zwillingsspaltöffnungen lassen sich beobachten (Fig. 7 B), ferner benachbarte Spaltöffnungen, die durch kurze Zellulosebalken miteinander verbunden sind. Bemerkenswert ist, daß diese Abnormitäten häufig zu mehreren nebeneinander auftreten. So z. B. zwei oder drei Spaltöffnungen mit gewellten Rückenwänden (Fig. 7 D) oder mehrere auffallend kleine Spaltöffnungen.

4. *Crataegomespilus Dardari.*

a) Epidermiszellen. Wie schon Weiss angegeben hat, sind auf der Blattoberseite die Epidermiszellen etwas größer als bei *Crataegus* und mit

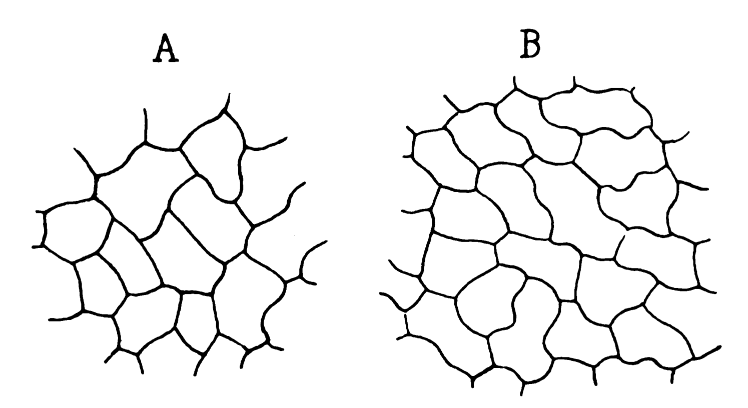


Fig. 8. Crataegomespilus Dardari. Epidermis der Oberseite zweier Blätter.

schwach gewellten Seitenwänden versehen. Doch kommen auch Areale vor, auf denen die Seitenwände ganz gerade oder nur schwach gebogen sind (Fig. 8 A), und gleich daneben Areale mit verhältnismäßig stärker gewellten Seitenwänden, wenn auch die Wellung nie jenen Grad erreicht wie bei *Mespilus* (Fig. 8 B). Auffallend ist, daß die Areale mit geraden Seitenwänden keine Kutikularleisten besitzen, während jene mit gewellten Wänden kräftige Leisten aufweisen, die teils in annähernd parallelem Verlauf über die Zellgrenzen hinwegziehen, teils kurz bleiben, unregelmäßig geschlängelt sind und sich auf die einzelnen Zellen beschränken. Ähnlich verhält sich die Epidermis der Blattunterseite, doch ist hier die Wellung der Seitenwände stärker, oft so stark wie bei *Mespilus*. Kutikularleisten treten nur über den Nerven auf und sind nur schwach ausgebildet. Auf Querschnitten sieht man, daß oberseits häufig Verschleimung der Epidermisinnenwände eintritt, doch bleiben viele Zellen unverschleimt. Unterseits sind keine verschleimten Innenwände zu sehen. Der größte tangentiale Durchmesser der Zellen beträgt oberseits durchschnittlich 36 μ, unterseits 28 μ. Die Höhe der Epidermiszellen mit Schleim-

polstern oberseits im Mittel 22 μ, die der unverschleimten Zellen 17 μ. Unterseits sind sie nur 12 μ hoch.

b) Haare. Hinsichtlich des Vorkommens der Haare auf beiden Blattseiten verhält sich *C. Dardari* wie *Mespilus*. Doch sind sie etwas stärker verbogen und geschlängelt, wenn auch nicht so stark wie bei *Crataegus* und *C. Asnieresii*. Die Dicke der Haare beträgt in ihrer Mitte durchschnittlich 12 μ, die Wanddicke 3.7 μ. Mit Chlorzinkjod färben sich die einzelnen Haare recht verschieden, oft rein gelb, häufig aber nur graugelb. Fußstück und Nebenzellen verhalten sich wie bei *Mespilus*.

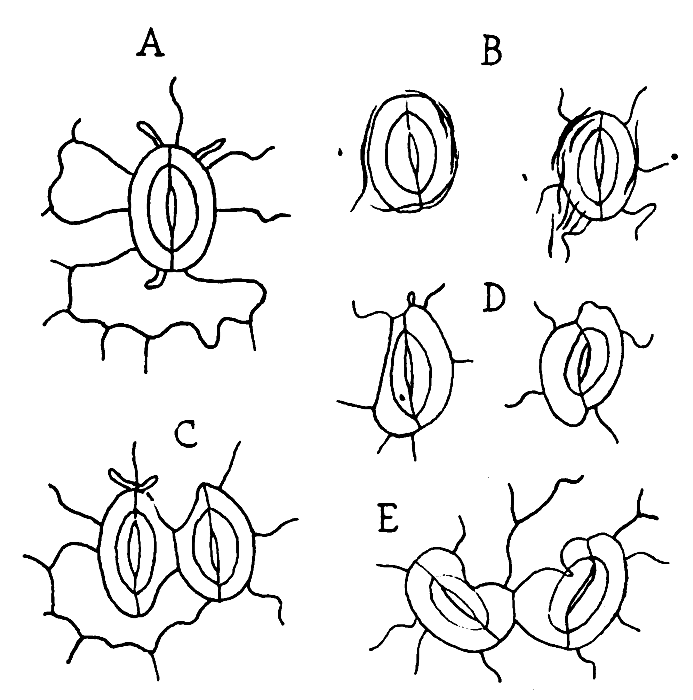


Fig. 9. Crataegomespilus Dardari. Spaltöffnungen auf der Blattunterseite. A Spaltöffnung mit Membranleisten. B Spaltöffnungen mit Kutikularleisten, C Zwillingsspaltöffnung, D und E abnorme Spaltöffnungen.

c) Spaltöffnungen. Bei geschlossener Spalte sind die Spaltöffnungsapparate im Mittel 30 μ lang und 20.5 μ breit. Die Breite beträgt sonach 68 Prozent der Länge. Häufiger noch als bei *C. Asnieresii* springen von den Polen der Schließzellen Wandleisten in die angrenzenden Epidermiszellen vor (Fig. 9 A). Zuweilen erheben sich über den Rückenwänden der Schließzellen Kutikularleisten, die aber nicht so regelmäßig verlaufen wie bei *Crataegus*, oft mit einem Ende auf die benachbarte Epidermiszelle übergreifen und niemals einen geschlossenen Ring bilden (Fig. 9 B). Die Querschnittsbilder variieren sehr. Die äußeren Kutikularleisten der Schließzellen sind bald breit und dünn, bald schmal und dick (Fig. 10 A, B). Die Vorhofweite schwankt ziemlich stark, die Zentralspalte ist verschieden hoch, der Hinterhof meist deutlich ausgebildet, doch stets enger als der Vorhof. Nicht selten kommt es vor, daß die verdickten Innenwände der Schließzellen nach unten zu keilförmig

sich verschmälern und daß sich an die Kanten dieser Keile die Innenwände der benachbarten Epidermiszellen ansetzen (Fig. 10C). Solche Spaltöffnungen können schon als abnorm bezeichnet werden. Auch sonst kommen mannigfache Abnormitäten vor: gewellte Rückenwände (Fig. 9E), asymmetrischer Bau infolge ungleicher Größe oder Verschiebung der Schließzellen (Fig. 9D). Rückbildung der Kutikularleisten und Membranverdickungen. In Fig. 10F ist ein stark rückgebildeter Spaltöffnungsapparat abgebildet, an dem die äußeren Kutikularleisten vollkommen fehlen; die rechte, kleinere Schließzelle besitzt noch eine ziemlich stark verdickte Außen- und Innenwand, die linke, größere unterscheidet sich von einer gewöhnlichen Epidermiszelle nur dadurch, daß ihre Innenwand, ohne verschleimt zu sein, etwas verdickt ist. Der ganze

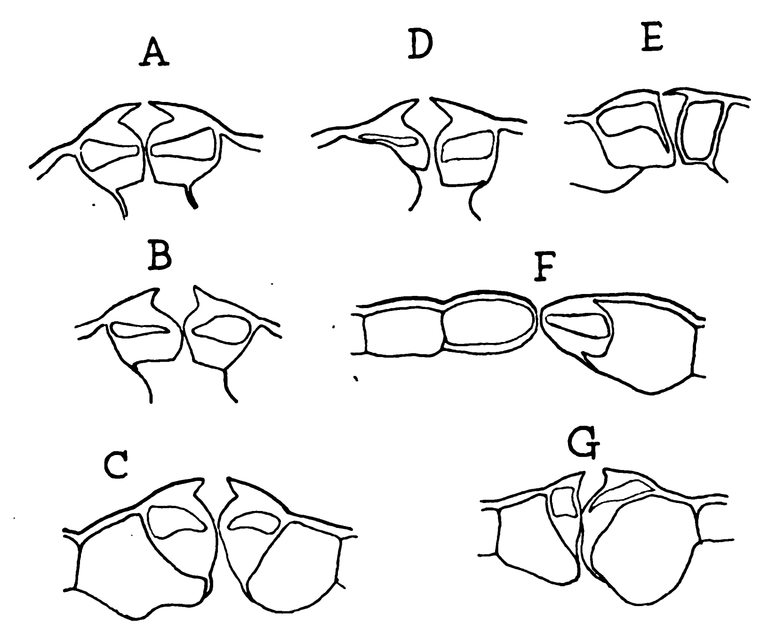


Fig. 10. Crataegomespilus Dardari. A und B normale Spaltöffnungen. C, D, G abnorme Spaltöffnungen, z. T. mit abgestorbenen Schließzellen. E und F weitgehend abnorme Spaltöffnungen.

Apparat erinnert an manche Wasserspalten. Stark abnorm ist auch die Spaltöffnung Fig. 10E. Obliterierte, zusammengepreßte Schließzellen sind nicht selten, desgleichen Zwillings- und selbst Drillingsspaltöffnungen (Fig. 9C, E).

5. Vergleichung der Blattepidermis der *Crataegomespili* mit der ihrer Eltern.

Vergleichen wir nun die Epidermis der Laubblattspreiten der beiden *Crataegomespili* mit der Epidermis, den Haaren und Spaltöffnungen ihrer Eltern, so ergeben sich folgende gemeinsame Merkmale und Unterschiede:

Crataegomespilus Asnieresii.

a) Die Epidermiszellen besitzen auf der Blattoberseite wie bei *Crataegus* gerade oder schwach gebogene Seitenwände, während die bedeutend größeren Epidermiszellen von *Mespilus* in größerer oder geringerer Anzahl stark ge-

wellte Seitenwände aufweisen. Natürlich muß mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß bei der Pfropfung des Baumes von Bronvaux eine Mispelform verwendet wurde, deren oberseitige Blattepidermis, wie bei dem Material aus dem Lößnitzgrund bei Dresden und aus Paphlagonien, aus Zellen mit geraden Seitenwänden bestand, zwischen welche Inseln mit gewellten Seitenwänden eingestreut waren. Falls diese Beschaffenheit der Epidermis genotypisch bedingt war, wäre zu erwarten, daß die Epidermis von *Cr. Asnieresii* ebenfalls stellenweise starke Wellung aufwiese, wenn dieselbe eine echte Mispelepidermis wäre. Das ist aber nicht der Fall. Zellen mit stärker gewellten Seitenwänden konnten niemals beobachtet werden. — Auf der Blattunterseite sind die Seitenwände der Epidermiszellen ziemlich stark gewellt, doch nicht so stark wie bei *Mespilus*. — Auf der Blattoberseite gleicht daher die Epidermis in bezug auf die Zellform der *Crataegus*-Epidermis, auf der Unterseite ähnelt sie der *Mespilus*-Epidermis. — Die Außenwände sind bei *Cr. Asnieresii* oberseits wie bei *Crataegus* mit kräftigen Kutikularleisten versehen, die bei *Mespilus* über dem Palisadengewebe fehlen oder nur schwach ausgebildet sind. — Der tangentiale Durchmesser der Zellen stimmt ganz mit dem der *Crataegus*-Zellen überein; hinsichtlich der Zellhöhe verhält sich *Cr. Asnieresii* wie *Mespilus*, während *Crataegus* mehr als doppelt so hohe Epidermiszellen besitzt. Die Innenwände sind verschleimt, doch wie bei *Crataegus* nicht bei allen über dem Palisadengewebe befindlichen Zellen, während bei *Mespilus* nur über den Nerven unverschleimte Innenwände auftreten. — Die Epidermiszellen der Laubblätter von *Crataegomespilus Asnieresii* gleichen demnach teils der *Mespilus*-, teils der *Crataegus*-Epidermis, doch ähneln sie im ganzen weit mehr der letzteren. Dies gilt vor allem für Form und Größe der Zellen in der Flächenansicht.

b) Die Haare von *Cr. Asnieresii* verhalten sich in bezug auf Zahl und Verteilung wie die von *Mespilus*, doch sind sie stark verbogen und geschlängelt wie bei *Crataegus*. In bezug auf die Dicke und Kutinisierung der Wände stellen sie Mittelbildungen vor.

c) Die Spaltöffnungen von *Crataegomespilus Asnieresii* sind nicht so gestreckt wie die von *Mespilus*, doch nicht so gedrungen wie die von *Crataegus*. In Prozenten ihrer Länge ausgedrückt, beträgt ihre Breite bei *Mespilus* 68.7, bei *Crataegus* 88.8, bei *Cr. Asnieresii* 75.8. Vorhof, Zentralspalte und Hinterhof verhalten sich intermediär. Wie bei *Mespilus* springen an den Polen der Schließzellen nicht selten Membranleisten vor; über den Rückenwänden sieht man zuweilen ähnliche Kutikularleisten wie bei *Crataegus*. Wenn so die normalen Spaltöffnungen Mittelbildungen darstellen, wie man sie bei einem sexuellen Bastard erwarten darf, so wird dieser Eindruck noch durch das Vorkommen abnormer und obliterierter Schließzellen verstärkt, die ja bei sexuellen Bastarden gleichfalls oft zu beobachten sind.

Das Gesamtergebnis ist also, daß bei *Crataegomespilus Asnieresii* die Epidermis mit ihren Haaren und Spaltöffnungen in histologischer Hinsicht keine *Mespilus*-Epidermis, sondern eine Mittelbildung zwischen der *Mespilus*- und der *Crataegus*-Epidermis ist. Sie verhält sich so, wie man es von der Epidermis eines sexuellen Bastards erwarten dürfte.

Crataegomespilus Dardari.

a) Die Epidermiszellen besitzen oberseits meist schwach, unterseits stärker gewellte Seitenwände, sie ähneln also sowohl der *Mespilus-* wie der *Crataegus*-Epidermis. An letztere erinnern auch die kräftigen Kutikularleisten der Blattoberseite. Hinsichtlich der Höhe der Epidermiszellen und der Verschleimung der Innenwände verhält sich *C. Dardari* wie *Cr. Asnieresii.* — Auch bei diesem Pfropfbastard stellt demnach die Blattepidermis eine Mittelbildung vor. doch ist die Ähnlichkeit mit der *Crataegus*-Epidermis nicht mehr so groß wie bei *Cr. Asnieresii.*

b) Die Haare treten reichlich auf und sind gleichfalls Mittelbildungen. doch mit stärkerer Annäherung an *Mespilus.*

c) Die Spaltöffnungen haben in der Oberflächenansicht ungefähr die Form der *Mespilus*-Spaltöffnungen. Membranleisten an den Polen der Schließzellen wie bei *Mespilus*, oft Kutikularleisten über den Rückenwänden wie bei *Crataegus*, doch weniger scharf ausgeprägt. Vorhof, Zentralspalte und Hinterhof in ihren Dimensionen recht verschieden, bald mehr an *Mespilus*, bald an *Crataegus* erinnernd. Abnorme Spaltöffnungen ziemlich häufig, desgleichen obliterierte Schließzellen.

Auch bei *Cr. Dardari* ist daher die Blattepidermis samt Haaren und Spaltöffnungen keine reine *Mespilus*-Epidermis. sondern eine Mittelbildung, im ganzen allerdings mit größerer Annäherung an *Mespilus.*

B. Das Mesophyll, das mechanische System und die Gefäßbündel.

1. *Mespilus germanica.* Das im Mittel 0.19 mm dicke Blatt besitzt nur eine Palisadenzellage, doch ist diese von beträchtlicher Höhe (100 bis 105 μ). Einzelne Palisaden sind quergeteilt. Dann folgt eine Zellschicht. deren Elemente als palisadenförmig gestreckte Sammelzellen zu bezeichnen sind, hierauf das aus 3—4 Lagen bestehende Schwammparenchym. aus rundlichen oder unregelmäßig gestreckten Zellen bestehend, dessen unterste Lage wieder palisadenartige Streckung zeigt (Fig. 11 A).

Die größeren Gefäßbündel sind auf der Leptom- wie auf der Hadromseite mit dickwandigen Bastsicheln versehen (Fig. 11 B). An diese schließen sich noch ober- und unterseits je zwei Lagen aus ziemlich dickwandigen. kollenchymartigen Parenchymzellen. die in radialer Richtung nicht gestreckt sind. unterseits große Kalkoxalatkristalle enthalten und beiderseits an die Epidermis grenzen. Diese ist etwas eingesenkt, besonders auf der Oberseite. so daß die Blattoberfläche über dem stärkeren Bündel gefurcht ist. — Die mittelstarken Gefäßbündel besitzen oberseits keine Bastbelege; die dickwandigen Parenchymlamellen. die bis zur Epidermis reichen, sind oberseits meist 2 Zellen hoch und 2 breit; ihre Zellen sind in radialer Richtung etwas gestreckt. Unterseits besteht das dickwandige Parenchym auch nur aus 2 Lagen niederer Zellen mit Kristalleinschlüssen. Die schwächsten Gefäßbündel und Bündelendigungen besitzen keine Bastbelege mehr und sind rings von einer Leitparenchymscheide umgeben. an die oberseits normale Palisadenzellen. unterseits wieder 2 Lagen kleiner, schwach oder gar nicht verdickter Paren-

chymzellen grenzen. — Bei allen Gefäßbündeln ist das Leptom reichlich ausgebildet, die Gefäße und Tracheiden sind sehr dickwandig, mit Spiralleisten oder einfachen Quertüpfeln versehen.

2. *Crataegus monogyna.* Das 0.24 mm dicke Blatt besitzt drei Palisadenschichten; die beiden oberen sind durch Querteilungen einer einzigen Schicht entstanden. Die dritte Lage entspricht der Sammelzellschicht von *Mespilus*, doch ist die Form der Zellen die typische Palisadenform. Das Schwammparenchym ist 4—5schichtig, die Zellen sind rundlich oder etwas gestreckt, die unterste Lage ist wie bei *Mespilus* palisadenähnlich.

Die Gefäßbündel der Seitennerven erster Ordnung, wie überhaupt die stärkeren Leitbündel, besitzen beiderseits dickwandige, sichelförmige oder un-

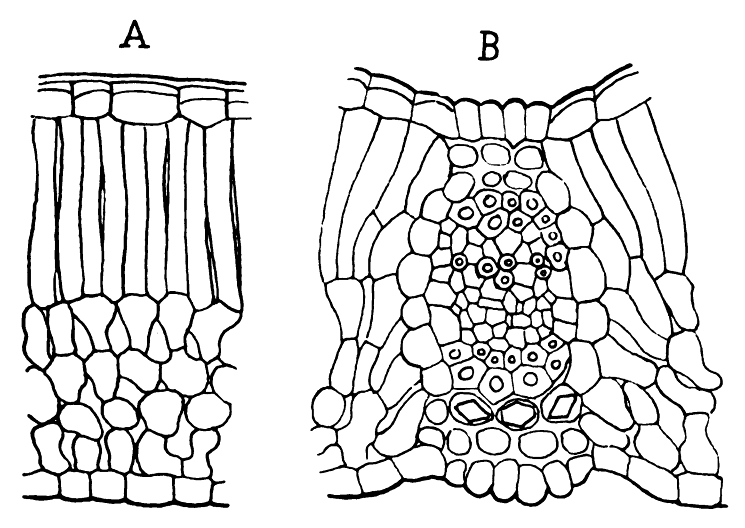


Fig. 11. Mespilus germanica.
A Laubblattquerschnitt, B Querschnitt durch einen stärkeren Blattnerven.

regelmäßig gestaltete Bastbelege. Zwischen diesen und der oberen und unteren Epidermis treten in mehreren Lagen dickwandige, kollenchymartige Zellen auf. Zwischen den mittelstarken Bündeln und der oberen Epidermis sind diese Zellen oft stark radial gestreckt (Fig. 12 B) und wohl als metamorphosierte Palisadenzellen anzusprechen. Häufig sind sie wiederholt quergefächert und enthalten dann in jedem Fache einen Kalkoxalatkristall (Fig. 12 A). Auf Längsschnitten durch die Gefäßbündel erscheinen die radial gestreckten mechanischen Zellen entweder gleichfalls palisadenförmig, oder sie sind in der Längsrichtung des Bündels gestreckt, d. h. plattenförmig. Häufig besitzen sie ziemlich unregelmäßige Formen. Mit ihrer starken radialen Streckung hängt zusammen, daß die darüberliegende Epidermis nicht oder nur wenig eingesenkt ist, so daß die Furchen fehlen oder ganz seicht sind. Zwischen dem Bündel und der unteren Epidermis treten wie bei *Mespilus* zwei Lagen mäßig verdickter niederer Parenchymzellen auf. — Die mittelstarken Gefäßbündel besitzen sehr unregelmäßige Bastbelege, oft in Gestalt unterbrochener

Bastscheiden. Die kleinen Gefäßbündel und die Bündelendigungen sind bastfrei oder werden nur von vereinzelten Bastzellen begleitet. Die Bündelendigungen bestehen nur noch aus spiralförmig verdickten oder mit querspaltenförmigen Tüpfeln versehenen Tracheiden, die durch ihr weites Lumen auffallen — ihr Durchmesser beträgt 13—18 μ — und so den Charakter von Speichertracheiden annehmen (Fig. 12C). — Alle Gefäßbündel besitzen ein gut entwickeltes Leptom; die Wände der Tracheiden sind nur mäßig verdickt.

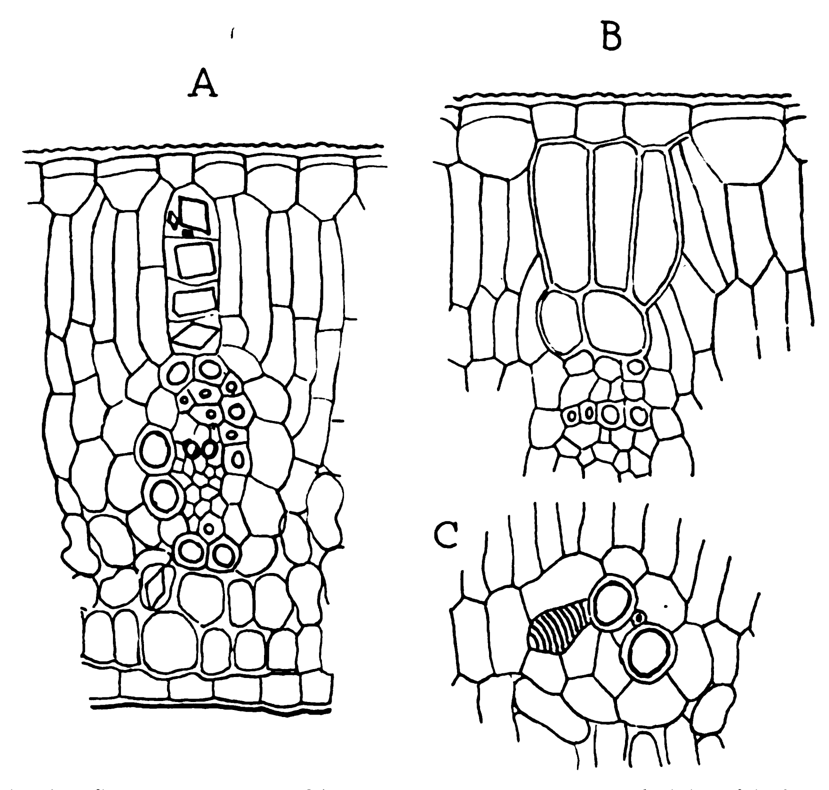


Fig. 12. Crataegus monogyna. Blattquerschnitt. A mittelstarkes Gefäßbündel, darüber Kristallbehälter, B dickwandige, gestreckte Parenchymzellen über dem Gefäßbündel. C Gefäßbündelendigung mit Speichertracheiden.

Die Unterschiede im Bau des Mesophylls, des mechanischen Systems und der Gefäßbündel zwischen *Mespilus germanica* und *Crataegus monogyna* bestehen sonach der Hauptsache nach darin, daß 1. das Palisadengewebe bei *Crataegus* mächtiger ist als bei *Mespilus*, 2. die zwischen den Gefäßbündeln und der oberen Epidermis vorhandenen mechanischen Zellen bei *Crataegus* häufig radial gestreckt, oft palisadenförmig, bei *Mespilus* dagegen stets niedrig sind und daß 3. die Tracheiden der Gefäßbündelendigungen bei *Crataegus* nach Art der Speichertracheiden weitlumig, bei *Mespilus* dagegen ziemlich englumig sind.

3. *Crataegomespilus Asnieresii.* Das Palisadengewebe des 0.24 mm dicken Blattes ist meist dreischichtig wie bei *Crataegus*; das Schwammparenchym besteht aus gestreckten, palisadenähnlichen oder gekrümmten Zellen

und ist 3—5schichtig (Fig. 13). Die Bastbelege der stärkeren Gefäßbündel sind nur schwach entwickelt. Die einzelnen Bastzellen sind zwar dickwandig, doch treten sie nur in geringer Zahl auf. Den mittelstarken und kleineren Gefäßbündeln fehlen sie meist vollständig. Die zwischen den Leitbündeln und den beiderseitigen Epidermen befindlichen Parenchymzellen sind oft nur schwach oder gar nicht verdickt und enthalten namentlich unterseits reichlich Kristalleinschlüsse. Da diese Zellen wie bei *Mespilus* radial nicht gestreckt sind — nur ausnahmsweise ist eine geringe Streckung bemerkbar — und da sie ferner nur in zwei, höchstens drei Lagen auftreten, so kommt es, von den Seitennerven erster Ordnung abgesehen, bei der ansehnlichen Dicke des Mesophylls, auf beiden Blattseiten zur Bildung mehr minder tiefer Furchen. Die spiralfaserig verdickten Tracheiden der Gefäßbündelendigungen sind nicht zu Speichertracheiden erweitert.

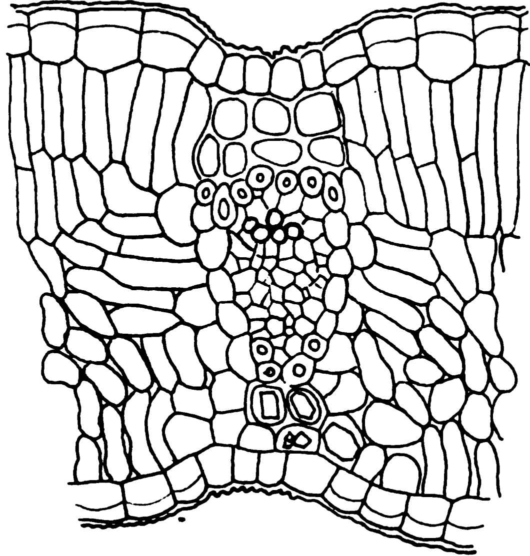


Fig. 13. Crataegomespilus Asnieresii. Querschnitt durch die Blattspreite mit einem stärkeren Nerven.

4. *Crataegomespilus Dardari.* Das Palisadengewebe des 0.19 bis 0.2 mm dicken Blattes ist zweischichtig, die obere Schicht hier und da mit Querwänden versehen; die untere Schicht locker gebaut, stellenweise als Sammelzellschicht entwickelt. Nur die Gefäßbündel der Seitennerven 1. Ordnung besitzen unterseits kräftige Bastsicheln, oberseits schwache Bastbelege. Die übrigen Bündel weisen durchgehends nur schwache Bastbelege auf, oft nur einzelne Bastzellen, häufig auch gar keine. Zwischen der oberen Epidermis und den stärkeren Gefäßbündeln sind 2—3 Lagen niedriger Parenchymzellen mit schwach verdickten Wänden vorhanden, die häufig, wie die gleichnamigen Zellen der Unterseite, Kristalle enthalten. Die Bündelendigungen bestehen aus Spiral- und Tüpfeltracheiden, die etwas weiter (10—12 μ) als bei *Mespilus*, aber nicht so weit wie bei *Crataegus* sind.

5. Vergleichung des Mesophylls, der mechanischen Gewebe und der Gefäßbündel der *Crataegomespili* mit den gleichnamigen Geweben ihrer Eltern.

Crataegomespilus Asnieresii gleicht in bezug auf Dicke und Ausbildung des Mesophylls, insbesondere des Palisadengewebes dem Weißdorn, dagegen in bezug auf das Fehlen der Radialstreckung der zwischen oberer Epidermis und Gefäßbündeln befindlichen mehr minder dickwandigen Parenchymzellen der Mispel. Da die Tracheiden der Bündelendigungen nicht oder nur wenig erweitert sind, so ist auch hinsichtlich dieses Punktes die Ähnlichkeit mit der Mispel gegeben.

Crataegomespilus Dardari gleicht in bezug auf das Mesophyll mehr der Mispel, ebenso betreffs der radial nicht gestreckten Parenchymzellen zwischen oberer Epidermis und Gefäßbündeln. Die Tracheiden der Bündelenden stehen in bezug auf ihre Weite ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Eltern.

Bemerkenswert ist, daß beide *Crataegomespili*, besonders *C. Asnieresii*, von den Hauptnerven und den Nerven 1. Ordnung abgesehen, ein schwächer entwickeltes mechanisches System besitzen als *Mespilus* und *Crataegus*.

IV. Der Blattstiel.

A. Die Epidermis.

Über den anatomischen Bau des Blattstiels liegen Angaben von Joh. Meyer vor. Er gibt an, daß die Epidermiszellen auf Querschnitten scharf zutage tretende Unterschiede aufweisen, wobei er unberücksichtigt läßt, daß sich

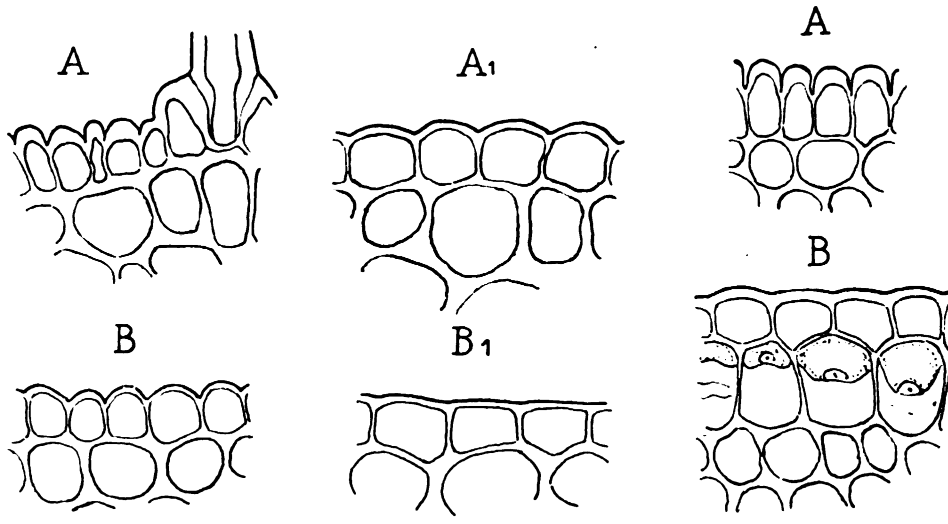


Fig. 14. Mespilus germanica. Blattstielepidermis. A von der Oberseite, A_1 von der Unterseite eines Blattstiels. B von der Oberseite, B_1 von der Unterseite eines anderen Blattstiels. Jedesmal aus der Mitte des Stieles.

Fig. 15. Crataegus monogyna. Epidermis des Blattstiels. A von der Oberseite. B von der Unterseite des Stiels.

Ober- und Unterseite des Blattstiels in dieser Hinsicht verschieden verhalten. Bei *Crataegus monogyna* sollen die Epidermiszellen rundlich sein, so daß sie annähernd ebenso hoch wie breit sind; ihre Außenwand ist angeblich wenig verdickt und kaum hervorgewölbt. Bei *Mespilus germanica* dagegen erscheinen die Epidermiszellen mehr oder weniger seitlich zusammengedrückt, so daß ihre Höhe die Breite bei weitem übertrifft. Die Außenwände sind stark verdickt und stark vorgewölbt. »Genau dasselbe Bild wie *M. germanica* zeigen beide Mischlinge«. (S. 214.)

Ich fand bei *M. germanica* die Epidermiszellen der Furche auf der Oberseite des Blattstiels nicht bei allen Blättern von gleichem Bau. Bei manchen

waren sie höher als breit, stellenweise seitlich zusammengepreßt, die Außenwände dick und stark vorgewölbt, also so wie Meyer es angibt (Fig. 14 A). Bei andern dagegen waren die Zellen ungefähr ebenso hoch wie breit, ihre Außenwände nur schwach verdickt und schwach bis mäßig vorgewölbt (Fig. 14 B), und zwar an der Basis des Blattstiels sowohl wie in der Mitte und wie vor dem Übergang in die Spreite. Auf der Unterseite des Blattstiels sind die Zellen bei allen Blättern meist breiter als hoch, ihre Außenwände sind nur mäßig oder schwach verdickt und nicht oder nur schwach vorgewölbt (Fig. 14 A_1, B_1). An den Flanken des Stieles geht die Form der Epidermiszellen allmählich in die der Oberseite über.

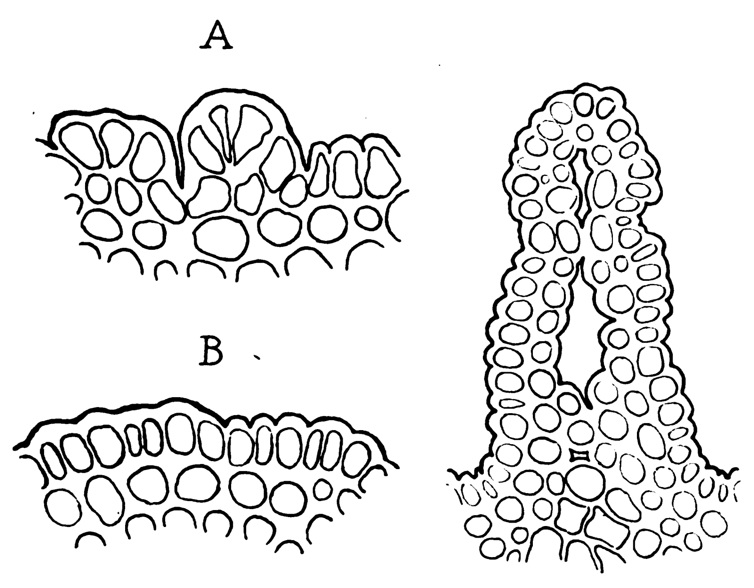


Fig. 16. Crataegomespilus Asnieresii. A Epidermis der Blattstieloberseite mit angrenzendem Kollenchym. B Epidermis der Blattstielunterseite. C Querschnitt durch einen Gewebslappen an einer Flanke des Stieles.

Bei *Crataegus monogyna* sind die Epidermiszellen am Grunde der Furche auf der Blattstieloberseite bei den von mir untersuchten Blättern klein, bedeutend höher, oft doppelt so hoch als breit, mehr minder stark verdickt und stark vorgewölbt (Fig. 15 A). Auf der Unterseite sind sie größer, ebenso breit als hoch oder breiter und mit mäßig verdickten und meist nur schwach vorgewölbten Außenwänden versehen (Fig. 15 B). Die Vorwölbung ist aber stets zu beobachten.

Die Epidermiszellen des Blattstiels von *Mespilus* und *Crataegus* sind also entgegen den Angaben Meyers voneinander nicht wesentlich verschieden, bei *Mespilus* auf der Unterseite etwas größer, breiter und mit schwächer verdickten Außenwänden versehen als bei *Crataegus*.

Die Querschnittsform des Blattstiels von *Crataegomespilus Asnieresii* ist ungefähr dieselbe wie die von *Crataegus*; auch die Dimensionen sind annähernd dieselben. Auffallend sind die häufigen Längswülste, die zu breiten Leisten oder Lappen werden können und dann einzeln oder zu zweien rechts

und links an der Unterseite auftreten (Fig 16C). Die Epidermiszellen sind oberseits von sehr verschiedener Breite, doch stets höher als breit, oft seitlich zusammengepreßt, zuweilen Wülste bildend, mit mäßig bis stark verdickten und meist stark vorgewölbten Außenwänden versehen (Fig. 16 A). Im Gegensatz zu den Eltern sind auch auf der Blattstielunterseite sowie an den Flanken die Epidermiszellen höher als breit, oft zusammengepreßt, ihre Außenwände ziemlich stark verdickt und mehr minder stark vorgewölbt (Fig. 16B). Eine Ausnahme bildete ein Blattstiel, dessen Epidermiszellen unterseits meist breiter als hoch waren und deren mäßig verdickte Außenwände sich gar nicht oder nur schwach vorwölbten. An diesem Blattstiel waren auch die Wulstbildungen schwächer ausgeprägt. Wenn man von diesem Blattstiel absieht, so dürften

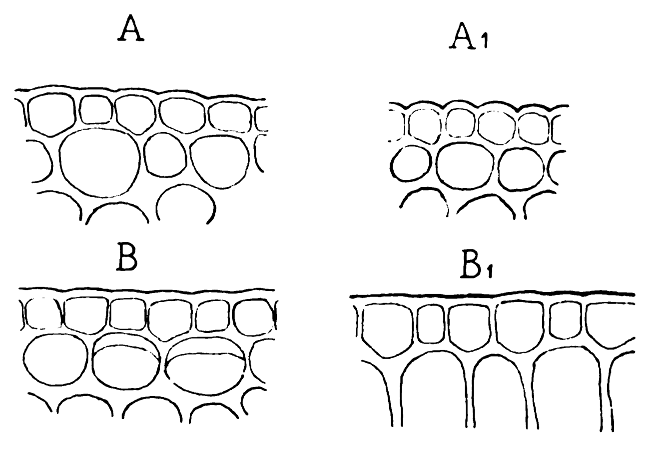


Fig. 17. Crataegomespilus Dardari. Blattstielepidermis. A von der Oberseite. B von der Unterseite eines Stieles. A_1 B_1 desgleichen von einem anderen Stiele.

die besprochenen Merkmale zugunsten der Periklinalchimärentheorie sprechen: der Umfang des Blattstiels ist bei *Mespilus* bedeutend größer als bei *Crataegus*; die *Mespilus*-Haut ist daher für den *Crataegus*-Kern zu weit und muß sich in Falten werfen, die als Wülste und Lappen erscheinen. Auch das Kollenchym beteiligt sich, von der Epidermis gewissermaßen mitgenommen, in 1—2 Lagen an der Bildung der Lappen, die in der Mitte von breiten Interzellularspalten durchzogen werden (Fig. 16C). Daß die Epidermiszellen auch an den Flanken und an der Unterseite des Blattstiels schmäler und häufig seitlich zusammengepreßt sind, hängt vielleicht ebenfalls damit zusammen, daß die Epidermis in ihrer Flächenausdehnung beschränkt wird. Ein zwingender Beweis für die Periklinalchimärennatur des *C. Asnieresii* ist das beschriebene Verhalten der Blattstielepidermis allerdings nicht, und zwar um so weniger, als ja die Epidermis der Spreite *Crataegus*-Charakter besitzt.

Der Blattstiel von *Crataegomespilus Dardari* erinnert nicht nur äußerlich, sondern auch in bezug auf Form und Größe des Querschnittes sehr an den von *Mespilus*. Die an der Basis seichte und flache Furche auf der Oberseite wird gegen die Mitte des Stieles zu immer tiefer, ihre Grundfläche schmäler; oft läuft die Furche am Grunde winkelig zu, ihre Seitenflächen grenzen unmittelbar aneinander. Gegen die Spreite zu flacht sich die Furche wieder ab.

Die Epidermiszellen sind wesentlich anders gebaut als bei *Cr. Asnieresii.* Am Grunde der Furche bzw. an ihren Seitenflächen sind die kleinen Epidermiszellen ebenso breit wie hoch oder etwas breiter, ihre wenig verdickten Außenwände wölben sich nur wenig vor (Fig. 17 A. A_1). Auf der Unterseite des Stieles sind die Zellen ebenso groß oder etwas größer, ungefähr ebenso breit wie hoch, mit mäßig verdickten Außenwänden versehen, die bei einem Blattstiel schwach vorgewölbt, bei einem anderen ganz eben sind (Fig. 17 B, B_1). An den Flanken des Stieles zeigt die Epidermis ein zwischen Ober- und Unterseite intermediäres Verhalten. Die Ähnlichkeit der Blattstielepidermis von *Crataegomespilus Dardari* mit der von *Mespilus germanica* ist also recht groß und entspricht der Periklinalchimärentheorie.

B. Die Gefäßbündel und ihre Bastbelege.

Der Gefäßbündelverlauf im Blattstiele wird von Joh. Meyer nur teilweise richtig beschrieben, da er die kleinen Seitenbündel übersehen hat. Das verschiedene Verhalten der Bastbelege hat er richtig erkannt. Wenn er am Schluß seiner kurzen Angaben sagt: »In dieser Hinsicht verhält sich *Cr. Asnieresii* ganz analog der *Cr. monogyna, Cr. Dardari* dagegen analog der *M. germanica*« (S. 215), so ist der erste Teil dieser Behauptung, wie wir sehen werden, nicht ganz zutreffend; der zweite Teil widerspricht aber der von Meyer verteidigten Periklinalchimärentheorie, wonach die Gefäßbündel beider Pfropfbastarde *Crataegus*-Bündel sein müßten.

Bei *Mespilus germanica* treten drei gleich starke, auf dem Querschnitt elliptische Bündel in die Blattbasis ein, nähern sich allmählich und verschmelzen schon vor der Mitte des Stieles zu einem einzigen breiten Strange, dessen Hadrom bis zum Übergang in die Spreite durch zwei Furchen auf der Unterseite seine Zusammensetzung aus drei Bündeln erkennen läßt (Fig 18 B, C). Knapp vor der Spreitenbasis wird beiderseits je ein kleines Seitenbündel abgespalten (Fig. 18 A). Das Leptom weist erst nach der Verschmelzung der drei Bündel einen Bastbeleg auf, der in der Mitte des Stieles aus vereinzelten Bastzellen oder aus wenigzelligen Gruppen solcher besteht. Erst am oberen Ende des Stieles wird die Bastsichel stärker, setzt sich aber nur an den Rändern des Stranges aus je einem Bastbande, im übrigen aus zahlreichen, dichtgedrängten kleinen Bastbündelchen zusammen.

Bei *Crataegus monogyna* tritt ein einziges, auf dem Querschnitt halbmondförmiges Gefäßbündel in die Blattbasis ein, auf der Leptomseite begleitet von vereinzelten, schwach verdickten Bastzellen (Fig. 19 C). Schon 1—2 mm höher zweigen sich von den Rändern dieses Bündels zwei schwache Seitenbündel ab, von denen je eines in den flügelartigen Leisten verläuft, die die Furche auf der Stieloberseite begrenzen (Fig. 19 B). Sie sind mit Bastbelegen versehen, so wie auch auf der Leptomseite des im Querschnitt fast hufeisenförmigen Hauptbündels immer kräftiger werdende Bastbänder auftreten. Die beiden flügelartigen Leisten werden von der Mitte des Stieles an immer breiter und nehmen infolge des Auftretens von Assimilationsgewebe Spreitencharakter an. Die beiden Seitenbündel rücken immer tiefer in die Flügel hinein (Fig. 19 A).

Der Bündelverlauf im Blattstiel von *Crataegomespilus Asnieresii* ist nicht einheitlich. Die einzelnen Blattstiele verhalten sich in dieser Hinsicht ziemlich verschieden. So trat z. B. in einen Blattstiel wie bei *Crataegus* nur ein einziges Gefäßbündel von halbmondförmiger Querschnittsform ein, von dem etwas höher als bei *Crataegus* zwei schwache Seitenbündel abzweigten. Beim Übergang vom Stiel in die Spreite spalteten sich vom Hauptbündel nochmals zwei Seitenbündel ab. In einem anderen Blatte traten wie bei *Mespilus* drei starke Bündel in die Stielbasis ein, die wenige Millimeter höher schon zu einem einzigen Bündel verschmolzen waren; dasselbe sah jetzt ganz wie ein *Crataegus*-Bündel aus (Fig. 20). Noch 6 mm über der Basis waren Seitenbündel nicht vorhanden, erst von der Mitte an traten sie auf. Vor dem Übergang des Stieles in die Spreite waren auf der einen Seite ein einziges, auf der anderen drei in einer Reihe liegende Seitenbündel vorhanden. Im ganzen ähnelt der Bündelverlauf sehr dem von *Crataegus*, doch mit Anklängen an *Mespilus*. In bezug auf die Ausbildung der Bastbelege der Bündel verhält sich *Cr. Asnieresii* wie der Weißdorn.

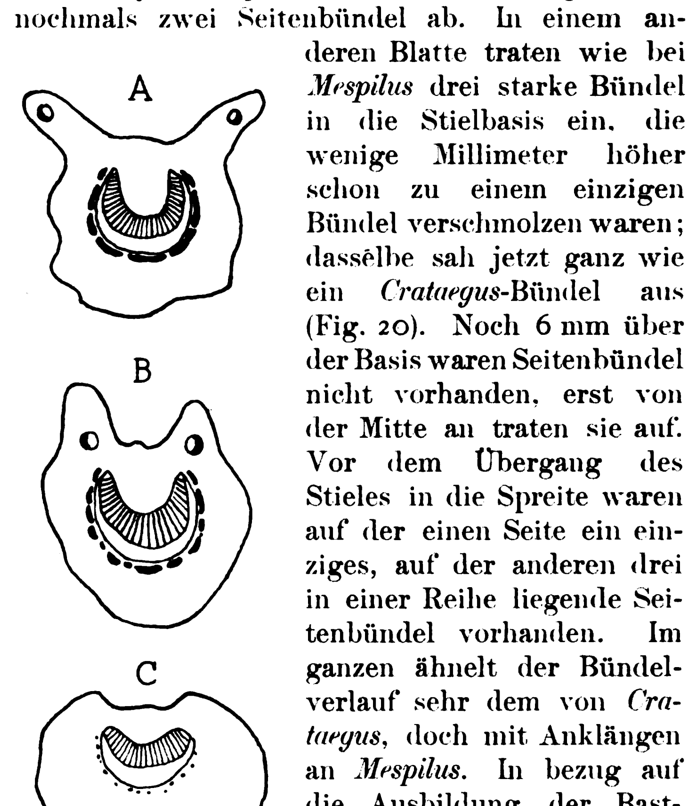


Fig. 18. Mespilus germanica. Blattstielquerschnitte. A vor dem Übergange des Stieles in die Spreite. B aus der Mitte. C an der Basis des Stieles. Hadrom schraffiert, Bast schwarz.

Fig. 19. Crataegus monogyna. Querschnitte durch einen Blattstiel. A aus der Mitte des Stiels. B 3 mm über der Basis. C an der Basis des Stiels.

Noch größere Schwankungen im Bündelverlauf lassen sich in den Blattstielen von *Crataegomespilus Dardari* beobachten. In der Regel treten in die Stielbasis wie bei *Mespilus* drei starke Bündel ein, die im Hadromteil die Neigung zur Zerklüftung zeigen und erst ganz oben oder auch gar nicht miteinander verschmelzen (Fig. 21 A). Zuweilen sind schon an der Basis zwei Seitenbündel von ungleicher Stärke vorhanden, ein anderes Mal wieder fehlen sie selbst beim Übergang des Stieles in die Spreite. Manchmal weist ein Querschnitt durch die Mitte des Stieles drei starke mittlere Bündel und zwei schwache Seitenbündel auf, so daß die Merkmale des Bündelverlaufs von *Mes-*

pilus und *Crataegus* vereinigt sind (Fig. 21 B). Im allgemeinen aber nähert sich der Bündelverlauf mehr dem von *Mespilus*. — In bezug auf die Bastbelege herrscht größte Ähnlichkeit mit denen der Mispel.

Alles in allem liefert auch der anatomische Bau der Blattstiele keine Anhaltspunkte für die Periklinalchimärentheorie. Nur das Verhalten der Epidermis von *Cr. Asnieresii* spricht zu ihren Gunsten. Der Gefäßbündelverlauf der *Crataegomespili*-Blattstiele kann dagegen als Argument für die Burdonenhypothese gewertet werden, und zwar nicht nur deshalb, weil er häufig eine Mittelbildung darstellt, sondern auch aus dem Grunde, weil er so variabel ist.

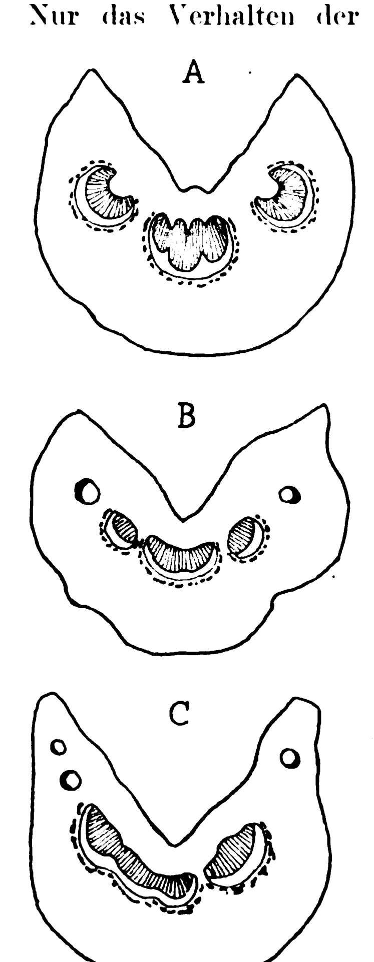


Fig. 21. Crataegomespilus Dardari. Querschnitte aus der Mitte dreier Blattstiele. Haare nicht eingetragen.

V. Besprechung der Ergebnisse.

Das Gesamtergebnis der vorliegenden Untersuchung läßt sich, soweit es sich um die ermittelten Beobachtungstatsachen handelt, folgender-

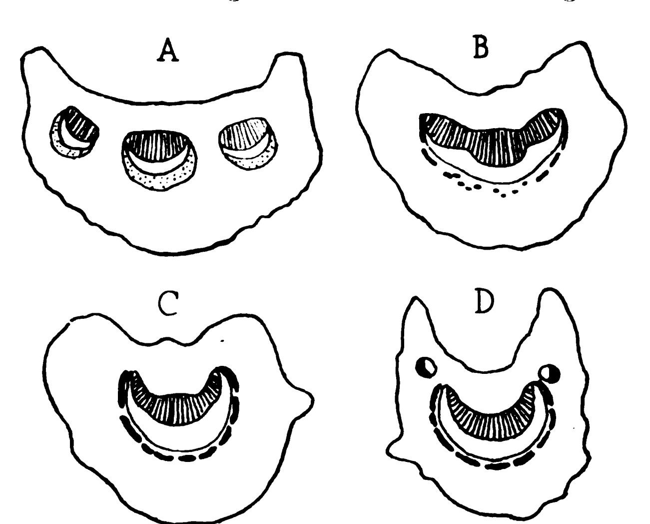


Fig. 20. Crataegomespilus Asnieresii. Querschnitte durch den Blattstiel. A an der Stielbasis, B 1.5 mm höher, C 4 mm höher, D aus der Mitte. Hadrom schraffiert, Bast schwarz. Die Haare sind nicht eingetragen.

maßen kurz zusammenfassen: Im anatomischen Bau der Laubblätter der *Crataegomespili* von Bronvaux stellen die histologischen Merkmale teils Mittelbildungen zwischen den Merkmalen der bei beiden Eltern, *Mespilus germanica* und *Crataegus monogyna*, vor, teils mosaikartige Kombinationen der elterlichen Merkmale. Daraus ergeben sich betreffs der Entstehung und der Natur der *Crataegomespili* von vornherein folgende Möglichkeiten.

1. Die *Crataegomespili* sind sexuelle Bastarde. Die Unterlage des Baumes in Bronvaux ist kein reiner *Crataegus*, sondern ein sexueller Bastard

zwischen *Crataegus* und *Mespilus*. Aus dem Kallus der Verwachsungsstelle sind die *Crataegomespili* als Adventivzweige der Bastardunterlage hervorgegangen. Diese von E. Laurent ausgesprochene Deutung ist bereits von Noll erörtert und widerlegt worden. E. Louis hat Noll mitgeteilt, daß unterhalb der Veredlungsstelle aus der Unterlage des Baumes in Bronvaux zahlreiche Zweige hervorsprossen, die in jeder Hinsicht echte *Crataegus*-Zweige waren. Noll hat solche Zweige selbst gesehen und sich auch auf Grund anatomischer Untersuchungen von der Richtigkeit der Angabe Louis' überzeugt. Gegen die obige Annahme spricht auch der Umstand, daß, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, L. Daniel zwei neue *Crataegomespili* (*Cr. Bonnieri* und *Bruni*), die bei Saujon entdeckt wurden, beschrieben hat. Es wäre doch ein ganz sonderbarer Zufall, wenn auch diese beiden Formen als Adventivzweige einer sexuellen Bastardunterlage entstanden wären.

2. Die *Crataegomespili* sind Hyperchimären im Sinne Strasburgers. Im Kallus der Verwachsungsstelle haben sich *Crataegus*- und *Mespilus*-Zellen mosaikartig zu den Vegetationspunkten der Adventivzweige vereinigt. Bei so innigem Verbande beeinflussen sich die verschiedenen Arten angehörigen Zellen annähernd so, »als wenn die Chromosomen, wie beim sexuellen Bastard, in derselben Kernhöhle vereinigt wären«. (S. 521.) Auf diese Weise kommt es zu bastardähnlichen Zwischenformen zwischen den beiden Eltern. Gegen diese Auffassung, die zunächst was Bestechendes für sich hat, ist Baur mit guten Gründen aufgetreten. Er hebt hervor, daß mit Rücksicht auf die Zellteilungsfolge und den Wachstumverlauf in den Vegetationspunkten jeder solcher aus durcheinander gewürfelten artverschiedenen Zellen bestehende Vegetationspunkt sehr bald in seine beiden Komponenten aufspalten müßte und daß »vor allem die Seitensprosse fast durchweg Rückschläge in die Stammformen oder Sektorialchimären sein müßten!« (II. S. 604.) Dem ist nur zuzustimmen. Faßt man z. B. die Epidermis bzw. das Dermatogen einer solchen Vegetationsspitze ins Auge, so kann es mit einer, mit zwei oder mehreren nebeneinander am Scheitel liegenden Initialzellen wachsen. Ist nur eine Initialzelle vorhanden, so kann das ganze Dermatogen nur von einer Elterform abstammen, und der Pfropfbastard wird wenigstens in bezug auf die Epidermis zu einer Periklinalchimäre. Sind zwei Initialzellen vorhanden, so könnten sie von je einem Elter herrühren. Dann würde der Pfropfbastard auf einer Längshälfte die eine, auf der anderen Hälfte die andere Epidermis besitzen; er würde in bezug auf die Epidermis Sektorial- und Periklinalchimäre zugleich sein. Es ist leicht sich vorzustellen, was für Möglichkeiten eintreten würden, wenn das Dermatogen mehrere Initialzellen besäße. Zu analogen Folgerungen käme man auch bezüglich des Periblems und Pleroms. So würde ein Stamm- und Blattbau zustande kommen, der dem tatsächlich gegebenen vollkommen widerspräche.

3. Die *Crataegomespili* sind Burdonen im Sinne Hans Winklers, d. h. durch Verschmelzung einer *Mespilus*-Zelle mit einer *Crataegus*-Zelle entstanden, wobei auch die beiden Kerne miteinander verschmolzen sind. Diese schon von Alexander Braun für *Laburnum Adami* ausgesprochene Annahme hat Noll für die *Crataegomespili* näher zu begründen versucht. In der Tat sprechen die in dieser Arbeit mitgeteilten histologischen Tatsachen in weit-

gehendem Maße zugunsten dieser Auffassung. Wenn einzelne Merkmale, wie z. B. die Form der Epidermiszellen von *Cr. Asnieresii*, ganz den Merkmalen des einen Elters entsprechen, so würde es sich eben um dominierende Merkmale handeln. Daß die Adventivknospen, welche die Pfropfbastarde repräsentierten, aus einer einzigen Verschmelzungszelle hervorgegangen sind, hat schon Noll angenommen und ist der wahrscheinlichste Entstehungsmodus. Durch Etagenteilung würde sich diese Zelle in drei übereinanderliegende Zellen geteilt haben, die zu den Initialen des Dermatogens, Periblems und Pleroms geworden sind. Es ist aber auch möglich, daß die Verschmelzungszelle durch Allwärtsteilungen in eine Zellgruppe sich umgewandelt hat, in der erst später die Differenzierung in die drei Histogene stattfand. Endlich ist auch mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die Verschmelzungszelle nur das Dermatogen oder dieses und auch noch die äußerste Periblemschicht lieferte, alles übrige aber nur von einem Elter, nämlich *Crataegus*, stammt. Dann läge nur ein partieller Burdo, analog dem *Solanum Darwinianum* Winklers vor. Sollten die *Crataegomespili* überhaupt Burdonen sein, so wäre allerdings die Annahme, daß sie es in ihrer Gänze sind, näherliegend.

Wie erklärt sich dann der Unterschied zwischen *Cr. Asnieresii* und *Dardari*? Auch diese Frage hat Noll bereits zu beantworten gesucht. Er nimmt an, daß der bei der Verschmelzung überwandernde Kern mehr oder minder geschädigt wird, womit sicherlich eine entsprechende funktionelle Schädigung verbunden ist. Dieselbe muß sich später geltend machen, wenn die Deszendenten des Verschmelzungskernes wirksam werden und die spezifischen Merkmale des Organismus hervorrufen. Der nicht übergewanderte Kern dagegen wird nicht geschwächt, er bildet den stärkeren Bestandteil des Verschmelzungskernes, dessen Einfluß entsprechend überwiegt. Unter diesen Voraussetzungen kommt also Noll zu der Annahme, daß zur Bildung der Initiale von *Cr. Dardari* ein *Crataegus*-Kern in eine *Mespilus*-Zelle übertrat, im anderen Falle bei Bildung der Initiale von *Cr. Asnieresii* dagegen ein *Mespilus*-Kern in eine *Crataegus*-Zelle. Die Möglichkeit, daß sich die Sache so verhält, ist nicht zu bestreiten, wenn auch manche Bedenken zu erheben sind. Vor allem ist es nicht eben wahrscheinlich, daß die Schwächung des übergewanderten Zellkerns in gleichem Ausmaße auf alle Deszendenten des Verschmelzungskernes übergeht, wie das bei der Konstanz der beiden Pfropfbastarde — die später zu besprechenden Rückschläge sind eine Sache für sich — angenommen werden müßte. Wahrscheinlicher ist es vielmehr, daß die Verschiedenheit von *Cr. Asnieresii* und *Dardari*, vorausgesetzt, daß sie Burdonen sind, auf Unterschieden in der Art der Reduktionsteilung der verschmolzenen Kerne beruhen.

Damit sind wir bei der schon oft ventilierten Frage der Chromosomenreduktion vegetativ verschmolzener Zellkerne angelangt. Die diploide Chromosomenzahl beträgt nach Joh. Meyer bei *Crataegus* und *Mespilus* sowie auch bei den beiden Pfropfbastarden 32. Es muß also, wenn letztere Burdonen sind, nach der vegetativen Kernverschmelzung eine Reduktionsteilung stattgefunden haben. Daß eine solche erfolgen kann, ist seit den Untersuchungen Němecs bald behauptet, bald bestritten worden. Der eben genannte Forscher hat sich dafür, Strasburger dagegen ausgesprochen. Auch Kemp und Lunde-

GARDII leugnen das Auftreten echter Reduktionsteilungen in chloralisierten Wurzeln, doch gibt ersterer zu, daß durch Kernzerfall und multipolare Spindelbildung die normale Chromosomenzahl wenigstens annähernd wiederhergestellt werden könnte. Zuletzt hat HANS WINKLER (1916) die Möglichkeit eines Reduktionsvorganges auf Grund seiner Untersuchungen über tetraploide Gigas-Formen von *Solanum nigrum* hervorgehoben. Chromosomenzählungen hat er zwar nicht vorgenommen, allein aus dem Auftreten von Rückschlägen zur diploiden Normalform auf eine vorausgegangene Reduktionsteilung in denjenigen Zellen geschlossen, aus denen der zurückgeschlagene Gewebekomplex hervorgegangen ist. Dieser Schluß dürfte in der Tat zwingend sein. In welcher Weise die Reduktionsteilung stattfindet, bleibt freilich ungewiß. Jedenfalls ist aber die Tatsache, daß die *Crataegomespili* dieselbe diploide Chromosomenzahl aufweisen wie ihre Eltern, kein Argument dagegen, daß unsere Pfropfbastarde Burdonen sein können.

Eine gewisse Schwierigkeit für die Burdonenhypothese bilden die häufigen Rückschläge der *Crataegomespili* zu den elterlichen Formen. Über ihr Auftreten findet man bei JOH. MEYER nähere Angaben. Rückschläge zu *Mespilus* sind bei *Cr. Asnieresii* offenbar sehr selten. Es liegt nur der Hinweis NOLLS auf eine diesbezügliche Angabe JOUINS vor. Dagegen sind Mispel-Rückschläge bei *Cr. Dardari* häufig. Rückschläge zu *Crataegus* lassen sich bei *Cr. Asnieresii* häufig, bei *C. Dardari* gelegentlich beobachten. Daß alle diese Rückschlagsbildungen durch die Periklinalchimärentheorie in durchaus befriedigender Weise erklärt werden können, hat J. MEYER näher ausgeführt. Allein auch die Burdonenhypothese kann sich mit ihnen abfinden. Voraussetzung ist nur, daß auch bei sexuellen Bastarden derlei vegetative Spaltungen bzw. Rückschläge vorkommen. Das ist nun in der Tat der Fall, wenn auch nur wenige Beobachtungen dieser Art vorliegen. »Vegetative Bastardspaltungen«, sagt H. DE VRIES in seiner Mutationstheorie II. B. S. 674 ff., »sind seltene Erscheinungen, aber vielleicht teilweise deshalb, weil man in einer ganzen Reihe von Knospenvariationen die Möglichkeit der Bastardnatur der betreffenden Pflanze nicht berücksichtigt hat.« »Zahlreiche in der Literatur beschriebene Beispiele von Knospenvariationen stellen ohne Zweifel solche vegetative Bastardspaltungen vor.« DE VRIES beschreibt einen von ihm selbst gezüchteten Bastard von *Veronica longifolia* mit der Varietät *V. longifolia alba*. Dieser Bastard blüht blau und läßt sich leicht durch Teilung vermehren. In ausgedehnten, durch viele Jahre fortgesetzten Kulturen sind mehrfach Fälle von sektorialer und von Knospenvariation beobachtet worden. »Letztere trat bisweilen am Rhizom auf. Der ganze aus der Erde hervorwachsende Sproß entbehrte in seiner Rinde und in seinen Blättern des roten Farbstoffes und war somit schon vor der Blüte leicht kenntlich. Die Blüten waren sämtlich weiß, während die übrigen Sprosse desselben Rhizoms blau blühten. Bisweilen fand ich auch eine weißblühende Traube als Seitenzweig an einem sonst blau blühenden Stengel.« Auch sektoriale Spaltungen kommen vor. Die Samen der weiß gewordenen Blüten geben weiß blühende Nachkommen. Betreffs einiger anderer Beispiele sei auf DE VRIES' Zusammenstellung verwiesen. In bezug auf vegetative Rückschlagsbildungen unterscheiden sich sonach, soweit sich gegen-

wärtig beurteilen läßt, die *Crataegomespili* von sexuellen Bastarden vor allem durch das viel häufigere Vorkommen solcher Rückschläge. Worauf dies beruht, läßt sich vom Standpunkte der Burdonenhypothese aus nicht sagen. Ein weiterer Unterschied besteht dann noch darin, daß *Cr. Dardari* nicht nur Rückschläge, sondern, wie Joh. Meyer sie nennt, auch »Umschläge« aufweist, d. h. Sprosse, die nicht Mispel- oder Weißdornzweige, sondern *Cr. Asnieresii*-Zweige sind. Solche Umschläge treten sehr häufig auf. Die Periklinalchimärentheorie kann ihr Zustandekommen leicht erklären. Die Behauptung Meyers, daß ihr Vorkommen die Möglichkeit, *Cr. Dardari* sei ein Burdo im Winklerschen Sinne, ganz ausschließe, scheint mir aber zu weit zu gehen.

Die geschwächte Fertilität von *Cr. Asnieresii* und die völlige Sterilität von *Cr. Dardari* sind Eigenschaften, die die *Crataegomespili* mit vielen sexuellen Bastarden gemein haben und die also für ihre Burdonennatur sprechen, obgleich sich ja auch die Periklinalchimärentheorie damit abzufinden weiß. Sämlinge von *Cr. Asnieresii* sind meines Wissens bisher nur in sehr geringer Anzahl beobachtet worden. Noll berichtet über einen Versuch von E. Louis, der von etwa 100 ausgesäten Samen drei Keimpflanzen erhalten hat, die reinen *Crataegus*-Pflanzen glichen. Ob eine Bestäubung mit *Asnieresii*-Pollen oder eine gemischte mit *monogyna*-Pollen stattgefunden hatte, ließ sich nicht feststellen. So läßt sich aus der Ähnlichkeit der Sämlinge mit *Crataegus monogyna* nichts Sicheres folgern.

Alles in allem muß zugegeben werden, daß vieles für die Burdonennatur der *Crataegomespili* spricht und nichts entscheidend dagegen.

4. Die *Crataegomespili* sind Periklinalchimären im Sinne Baurs: *Cr. Asnieresii* ist eine haplochlamyde, *Cr. Dardari* eine diplochlamyde Chimäre.

Baur und Joh. Meyer nehmen an, daß die *Crataegomespili* in ihrem anatomischen Bau nicht nur genotypisch, sondern auch phänotypisch Periklinalchimären sind. Diese Annahme stützt sich zunächst auf die Behauptung, daß die Blattepidermis mit ihren Haargebilden bei *Cr. Asnieresii* eine reine *Mespilus*-Epidermis sei, während das ganze Blattinnere dem von *Crataegus* entspreche. Diese Behauptung ist aber, wie aus Weiss' und meinen Untersuchungen bestimmt hervorgeht, unrichtig. Sie trifft auch für *Cr. Dardari* nicht zu. Wir haben es vielmehr in der Blattepidermis, wie auch im Blattinneren, mit Mittelbildungen zu tun, wobei bald die Mispel-, bald die Weißdornmerkmale sich stärker geltend machen, oder auch mit mosaikartigen Kombinationen der elterlichen Merkmale. Betreffs aller Einzelheiten sei auf den speziellen Teil dieser Arbeit verwiesen. Phänotypisch sind also die *Crataegomespili* bestimmt keine Periklinalchimären. In dieser extremen Fassung ist die Periklinalchimärentheorie nicht haltbar.

Nun könnten aber die *Crataegomespili* zwar genotypisch Periklinalchimären, phänotypisch aber Modifikationspfropfbastarde sein. Das wäre so zu verstehen, daß die Zellkerne bzw. die Chromosomensätze der Mantel- wie der Kernkomponente vollkommen artrein sind, daß aber an der Ausbildung der phänotypischen Merkmale der einzelnen Zellen und Gewebe nicht nur die Kerne der betreffenden Komponente, sondern direkt oder indirekt auch die Nachbarkerne oder selbst entfernter gelegene Kerne beteiligt sind, die der anderen



Komponente angehören. Wenn auch das Cytoplasma der beiden Partner spezifisch verschieden ist, könnte schon von diesem allein aus die gegenseitige Beeinflussung erfolgen.

Diese Beeinflussung der Entwicklung einer bestimmten Zelle oder eines bestimmten Gewebes der einen Komponente seitens der Zellkerne oder des Cytoplasmas der anderen Komponente könnte man sich zunächst so vorstellen, daß die physiologischen Eigenschaften, vor allem die Stoffwechselvorgänge, die von den Kernen, bzw. dem Cytoplasma des einen Partners bewirkt werden, die histologische Entwicklung des anderen Partners in andere Bahnen lenken. Es kämen dabei voraussichtlich in der Regel Hemmungsbildungen oder Mißbildungen zustande. Die abnorm gebauten Schließzellen der *Crataegomespilus*-Blätter sind wahrscheinlich so zu deuten. Schwerer wird man sich entschließen, die geraden Seitenwände der Epidermiszellen auf der Blattoberseite von *Cr. Asnieresii* als derart bewirkte Hemmungsbildungen aufzufassen. Wenn die Haare der Mischlingsblätter die Mitte einhalten zwischen den steifen, dickwandigen, stark kutinisierten Mispelhaaren und den geschmeidigen, weniger stark verdickten und nicht kutinisierten Weißdornhaaren, dann könnte man vermuten, daß die sich entwickelnden Haare der Mispelepidermis durch das *Crataegus*-Mesophyll in ihrer Ernährung und ihrem Wachstum ungünstig beeinflußt wurden. Sie würden dann keine echten Mittelbildungen, sondern nur Hemmungsbildungen sein. Freilich wäre es dann nur konsequent, anzunehmen, daß auch die geschmeidigen, nicht kutinisierten Weißdornhaare Hemmungsbildungen sind, hervorgerufen durch eine ungünstige Beeinflussung seitens des Mesophylls des Weißdornblattes. Das wäre aber doch eine zu gezwungene, höchst unwahrscheinliche Annahme. Immerhin ist es möglich, ja wahrscheinlich, daß Beeinflussungen im obigen Sinne bei der histologischen Ausgestaltung der *Crataegomespili* eine gewisse Rolle spielen, wie eine solche bezüglich der Morphologie der äußeren Gliederung, Blattform usw. von der Periklinalchimärentheorie tatsächlich angenommen werden muß. Das gilt nicht nur für die *Crataegomespili*, sondern auch für *Laburnum Adami* und Winklers *Solanum*-Pfropfbastarde.

Noch eine andere Art der Beeinflussung des einen Partners seitens des anderen ist denkbar. Es wäre möglich, daß durch diesen Einfluß, der wieder auf Stoffwechseländerungen beruhen könnte, in dem betreffenden Gewebe des beeinflußten Partners latente Merkmale geweckt werden, die in dem beeinflussenden Partner normalerweise zur Ausbildung gelangen. So könnte z. B. in den Kernen der Schließzellen von *Mespilus* die idioplasmatische Anlage (der Erbfaktor) für den Kutikularring, der den Spaltöffnungsapparat von *Crataegus* umsäumt, von den Vorfahren her latent vorhanden sein; unter dem Einfluß des *Crataegus*-Partners wird sie aktiv und führt zur Ausbildung eines atavistischen Merkmals. Wenn dabei der Kutikularring nicht bei allen Spaltöffnungen auftritt, und wo er auftritt, schwächer ausgebildet ist, so würde das darauf beruhen, daß der vom *Crataegus*-Partner ausgehende Einfluß nicht intensiv genug ist, um das latente Merkmal zur vollen Ausbildung gelangen zu lassen.

Auch das Fehlen der Wellung der oberseitigen Epidermiszellen von *Crataegomespilus Asnieresii* ließe sich so unter gewissen Voraussetzungen ver-

ständlich machen, obgleich hier die Annahme einer bloßen Hemmungsbildung näherliegt. Doch reicht zur Erklärung aller bei den *Crataegomespilis* beobachteten anatomischen Bastardmerkmale die Annahme des Aktivwerdens latenter Anlagen meines Erachtens nicht aus.

Ein direkter Einfluß der Kerne des einen Partners auf die histologische Ausbildung des anderen Partners würde dann stattfinden, wenn die von den Kernen bzw. Genen ausgeschiedenen morphogenen Stoffe — ich wähle absichtlich diesen ganz allgemeinen Ausdruck — in die sich entwickelnden Zellen und Gewebe des anderen Partners hinüberdiffundieren und hier gemeinsam mit den Genen dieser Zellen die definitive Ausgestaltung bewirken würden. So käme es zu Mittelbildungen wie bei sexuellen Bastarden. Das nimmt ja auch Strasburgers Hyperchimärenhypothese an.

Bevor wir zu den Voraussetzungen übergehen, unter denen die Annahme einer direkten Beeinflussung der Zellen und Gewebe der einen Komponente durch die Kerne der anderen möglich wäre, und so die Hilfshypothesen aufstellen, die die Periklinalchimärentheorie braucht, um sich mit den Tatsachen, die in dieser Arbeit mitgeteilt sind, abzufinden, soll die Frage aufgeworfen werden, wie sich in bezug auf histologische Mittelbildungen die Winklerschen *Solanum*-Pfropfbastarde verhalten, die nach den Chromosamenzählungen zweifellos echte Periklinalchimären sind. Es liegen in dieser Hinsicht Angaben von Maria Mayer-Alberti vor, die die Blätter von *Solanum tubingense*, *Koelreuterianum* und *proteus*, sowie der Eltern *S. lycopersicum* und *nigrum* anatomisch genau untersucht hat. Sie kommt zu dem Ergebnis, daß in Stiel und Spreite die beiden Komponenten der Chimären sich im allgemeinen wie die entsprechenden Gewebe der beiden Eltern verhalten. So sind z. B. die Epidermiszellen des Stieles von *S. tubingense* und *proteus* mit ihrem *lycopersicum*-Mantel genau so »gestaucht« wie die von *S. lycopersicum*, während *S. Koelreuterianum* mit seinem *nigrum*-Mantel die gestreckten Epidermiszellen von *S. nigrum* besitzt. Die Deckhaare von *S. tubingense* und *proteus* weisen eine vollkommen glatte Kutikula auf, genau so wie bei *S. lycopersicum*, während sie bei *S. Koelreuterianum* sowie bei *S. nigrum* stark warzig ist. Das Palisadengewebe von *S. tubingense* ist großzellig und interzellularenreich, wie das von *S. nigrum*, der Kernkomponente, das von *S. proteus*, der diplochlamyden Chimäre, und das von *S. Koelreuterianum* mit seinem *lycopersicum*-Kern dagegen kleinzellig und interzellularenarm. Im übrigen ist auf die ausführliche tabellarische Übersicht (S. 24 und 25) zu verweisen.

M. Mayer-Alberti führt nur zwei Intermediärbildungen an: bei *S. nigrum* treten auf der Blattoberseite 3—5 Spaltöffnungen auf einem Feld von rund 0.1 qmm auf, bei *S. lycopersicum* dagegen nur vereinzelte. »Die beiden haplochlamyden Bastarde verhalten sich in diesem Punkte ausgesprochen intermediär, und zwar in der überraschenden Weise, daß man nebeneinander Areale von ganz ungleichem Verhalten antrifft; neben solchen, die dem einen, solche, die dem anderen Elter zu folgen scheinen, und wieder dritte, die einen Mittelweg eingeschlagen haben. Es übt also das großmaschige und interzellularenreiche *nigrum*-Mesophyll auf die *lycopersicum*-Epidermis im *tubigense*-Verband einen dahin gehenden Reiz aus, daß sie mehr Spaltöffnungen ausbildet, als

sie sonst auf ihrer arteigenen Unterlage tut. Umgekehrt wirkt das engmaschige, interzellularenarme Mesophyll von *S. lycopersicum* im *Koelreuterianum*-Verband hemmend auf die Ausbildung der Spalten in der *nigrum*-Epidermis.« *S. proteus* mit Epidermis plus Mesophyll von *S. lycopersicum* verhält sich eindeutig wie *S. lycopersicum*. Worin der »Reiz« besteht, den das Mesophyll auf die Epidermis bzw. auf die Ausbildung der Spaltöffnungen ausübt, darüber spricht sich die Verfasserin nicht näher aus. Doch hält sie bei der funktionellen Zusammengehörigkeit von Interzellularen und Spaltöffnungen »die beobachteten Tatsachen immerhin sowohl kausal als auch teleologisch bis zu einem gewissen Grad verständlich« (S. 28).

Einen zweiten Fall von Intermediärbildung bilden die Zellkerne der Spreitenepidermis. Sie sind bei *S. nigrum* »im Durchschnitt doppelt so groß« wie bei *S. lycopersicum*, bei *S. tubingense* und *Koelreuterianum* dagegen »so wechselnd und abweichend in Größe und Gestalt, daß man sie weder dem einen noch dem anderen Elter zuteilen kann« (S. 20). Auch zeigen sie Zuspitzungen und amöbenartige Ausläufer. Die *proteus*-Kerne gleichen den *lycopersicum*-Kernen. Das Verhalten der Kerne der beiden haplochlamyden Chimären verständlich zu machen, wird nicht versucht.

Als eine dritte Intermediärbildung, die aber von Mayer-Alberti nicht als solche erwähnt wird, ist wohl auch das Parenchym im Blattstiel von *S. proteus* aufzufassen. »Die Zahl der Lagen spricht für die Herkunft von *S. nigrum*, der Kubikinhalt der Einzelzelle aber neigt zu *S. lycopersicum*« (S. 25).

Aus all diesen Beobachtungen geht jedenfalls hervor, daß bei den *Solanum*-Periklinalchimären die Gewebe der Laubblätter fast ausnahmslos jenen des einen oder des anderen Elters gleichen. Dadurch unterscheiden sich die *Solanum*-Pfropfbastarde wesentlich von den *Crataegomespilis*; dieser Umstand spricht gegen die Periklinalchimärennatur der letzteren, ist aber kein entscheidender Beweis dagegen. Denn anatomische Intermediärbildungen kommen, wenn auch recht spärlich, auch bei den *Solanum*-Mischlingen vor. Man könnte sonach das abweichende Verhalten der *Crataegosmespili* damit erklären, daß das Protoplasma von *Mespilus* und *Crataegus* von den Zellkernen und dem Protoplasma der anderen Spezies viel leichter in seiner gestaltenden Tätigkeit beeinflußt wird als das Protoplasma der beiden elterlichen *Solanum*-Arten.

Im Zusammenhang mit dem Vorausgegangenen muß auch der anatomische Bau von *Laburnum Adami* zum Vergleich herangezogen werden. Bekanntlich wird dieser Pfropfbastard auf Grund der Untersuchungen Macfarlanes und vor allem Buders gegenwärtig als eine Periklinalchimäre aufgefaßt, mit einem einschichtigen Mantel, der Epidermis, von *Cytisus purpureus* und dem Kern von *Laburnum vulgare*.

Die Epidermis der Laubblattspreite von *L. Adami* gleicht nach den Befunden der beiden genannten Forscher in allen wesentlichen Punkten der von *C. purpureus*. Die Zellen sind bedeutend größer als bei *L. vulgare* und enthalten, wie Buder festgestellt hat, gleich der *purpureus*-Epidermis reichlich Gerbstoff, der der Epidermis von *L. vulgare* vollkommen fehlt. *L. Adami* und *C. purpureus* besitzen auf der Blattunterseite keine Haare, während sie bei *L. vulgare* reichlich auftreten. Auch zeigen die Epidermiszellen des letzteren, zumal auf der Blatt-

unterseite, die Neigung, sich zu flachen Kegeln papillös vorzuwölben, was bei den anderen nicht zu beobachten ist. Die Spaltöffnungen sind bei *L. vulgare* auf die Blattunterseite beschränkt, während sie bei *C. purpureus* und *L. Adami* auch auf der Oberseite reichlich vorkommen; allerdings ist ihre Zahl bei letzterem, wie schon Macfarlane betont hat, merklich geringer. Interessant ist die Beobachtung Buders, daß bei *L. Adami* häufig mißgebildete Spaltöffnungen auftreten. »Oft ist zwischen der Schließzelle und der ungeteilten Epidermisnachbarzelle noch tatsächlich eine Spalte vorhanden, bisweilen sogar die Epidermiszelle an dieser ganz nach Schließzellenart mit verdickten und stärker kutinisierten Leisten versehen. Ähnliche Leisten und Spalten findet man auch hier und da zwischen zwei Epidermiszellen von sonst gewöhnlicher Größe und Form« (S. 251). Querschnittsbilder hat Buder nicht zu Gesicht bekommen, und so unterläßt er auch die theoretische Auswertung seiner Beobachtung. Das häufigere Vorkommen der beschriebenen Mißbildungen bei *L. Adami* ist ein vollkommenes Analogon zu den entsprechenden Vorkommnissen bei sexuellen Bastarden und den *Crataegomespilis* und muß von demselben Gesichtspunkte aus gewertet werden. Ein Argument gegen die Periklinalchimärentheorie kann man darin nicht erblicken.

Auch ich habe die Laubblattepidermis von *L. Adami* untersucht und mit der der beiden Eltern verglichen. (Das im Herbste gesammelte Material stammte teils aus dem Garten des pflanzenphysiologischen Instituts, teils aus dem Botanischen Garten in Berlin-Dahlem.) Bei *L. vulgare* wie bei *C. purpureus* sind die Epidermiszellen auf beiden Blattseiten von polyognaler Gestalt, mit ganz geraden Seitenwänden versehen und bilden ein sehr gleichmäßiges Mosaik. Doch sind sie bei *C. purpureus* bedeutend größer als bei *L. vulgare*. In der Oberflächenansicht beträgt ihr Durchmesser bei *C. purpureus* oberseits im Mittel 30 μ, unterseits 35 μ, bei *L. vulgare* oberseits 26 μ, unterseits 20 μ. Während also bei *C. purpureus* die Epidermiszellen oberseits beträchtlich kleiner sind als unterseits, verhält sich die Sache bei *L. vulgare* gerade umgekehrt. Am größten sind die Epidermiszellen von *L. Adami*, doch lassen sich bei der unregelmäßigen Gestalt der Zellen und der starken Größenschwankung keine Durchschnittszahlen angeben. Auf der Blattoberseite sind sie 30—65 μ lang und 22—35 μ breit, auf der Unterseite 37—90 μ lang und 25—50 μ breit. Sie sind also um vieles größer als bei *L. vulgare* und auch bei *C. purpureus*. Buder dagegen fand sie beim Mischling nur »merklich größer« als bei *C. purpureus*. Die oberseitigen Epidermiszellen sind wie bei *C. purpureus* kleiner als die unterseitigen. Auffallend ist, namentlich auf der Unterseite, die unregelmäßige Gestalt der Zellen, deren Seitenwände nicht selten gebogen oder schwach S-förmig gekrümmt sind. Auffallend ist ferner, besonders auf der Blattunterseite, daß viele Zellen Paare bilden, wie sie aus der Teilung je einer Mutterzelle hervorgehen. Daraus ergibt sich, daß die Zellen häufig doppelt, ja dreifach so lang als breit sind. Man darf daraus folgern, das die letzten Teilungen erst spät eintreten, da sie sogar im Herbste noch nicht durch Brechung der Seitenwände und gleitendes Wachstum unkenntlich geworden sind.

Die Epidermiszellen der Laubblätter von *L. Adami* unterscheiden sich demnach nach meinen Beobachtungen von denen der beiden Eltern in ziemlich

auffallender Weise. Ihre bedeutende Größe erklärt sich vom Standpunkt der Periklinalchimärentheorie aus wohl daraus, daß die *purpureus*-Haut beim Wachstum des *Adami*-Blattes durch den *Laburnum vulgaris*-Kern stark gedehnt wird, daß ihr Flächenwachstum eine starke Steigerung erfährt. Es kommt dann häufig zu nachträglichen Teilungen, die aber erst spät erfolgen.

Die Spaltöffnungsapparate sind bei *L. vulgare* und *C. purpureus* ungefähr gleich groß; ihre Länge beträgt im Mittel 23 μ. Bei *L. Adami* dagegen sind sie durchschnittlich 28.5 μ lang, entsprechend der bedeutenden Größe der Epidermiszellen. Abnorme Spaltöffnungen, wie sie Buder beschreibt, habe ich beim Mischling zwar auch beobachtet, doch nur in geringer Zahl.

Das Palisadengewebe von *C. purpureus* besteht nach Buder aus einer, häufig auch aus zwei Schichten; das von *L. vulgare* weist weniger häufig eine zweite Schicht auf. Das Schwammparenchym ist bei *C. purpureus* sehr dicht, bei *L. vulgare* dagegen locker gebaut. Bei *L. Adami* gleicht das Mesophyll im allgemeinen dem von *L. vulgare*; »hinsichtlich der Ausbildung von Interzellularen steht es in der Mitte zwischen den Stammarten. Der dichtere Zusammenschluß der Zellen bringt es mit sich, daß die zweite Schicht öfter als bei *L. vulgare* den Habitus von Palisaden gewinnt, was Fuchs als Ähnlichkeit mit *C. purpureus* deutete«. Dagegen wäre zu bemerken, daß der dichtere Zusammenschluß der Zellen nicht zur Palisadenform führen muß, da er ja auch im Schwammparenchym realisiert sein kann. Wenn Zellen zu Palisaden auswachsen, so erfolgt dies durch spezifische Wachstumsvorgänge; oder die Palisadenform kommt zustande, indem die betreffenden meristematischen Mutterzellen durch Einschaltung von Wänden senkrecht zur Blattoberfläche in Tochterzellen zerteilt werden. So könnte das häufigere Vorkommen einer zweiten Palisadenschicht bei *L. Adami* tatsächlich als ein *purpureus*-Merkmal gedeutet werden, wenn nicht bei der bedeutenden Plastizität des Palisadengewebes ein solcher Schluß sehr unsicher wäre.

Was sonst noch, namentlich durch Buders eingehende Untersuchungen, über den anatomischen Bau von *Laburnum Adami* bekannt geworden ist, steht mit der Periklinalchimärentheorie in gutem Einklang. Echte Mittelbildungen lassen sich nicht nachweisen. So spricht also auch das Verhalten dieses Pfropfbastards gegen die Annahme, daß die *Crataegomespili* mit ihren verschiedenen histologischen Mittelbildungen Periklinalchimären sind.

Andererseits lassen sich verschiedene Eigenschaften der *Crataegomespili* zugunsten der Periklinalchimärentheorie anführen. Johannes Meyer legt in dieser Hinsicht ein entscheidendes Gewicht auf die obenerwähnte Verschiedenheit in der Gestalt der Chromosomen von *Mespilus* und *Crataegus*. Diese Verschiedenheit soll es trotz der gleichen Chromosomenzahl beider Komponenten bei den *Crataegomespilis* ermöglichen mit Sicherheit festzustellen, welche Zellen und Gewebe Mispel- und welche Weißdorngewebe sind. Da ich die *Crataegomespili* cytologisch nicht untersucht habe, kann ich die Beweiskraft dieses Argumentes nicht beurteilen. Eine Nachuntersuchung scheint mir aber dringend geboten zu sein.

Während der Bau der Laubblätter, wie wir gesehen haben, mit der Periklinalchimärentheorie nicht, oder nur unter gewissen, erst später zu erörternden

Hilfsannahmen vereinbar ist, scheint der anatomische Bau des Stammes nach den Beobachtungen NOLLS und JOH. MEYERS mit ihr übereinzustimmen. Im sekundären Holz der Pfropfbastarde fehlen wie bei *Crataegus* die Gefäße mit zarten quer- oder spiralfaserigen Verdickungen, die dem Holz von *Mespilus* eigentümlich sind. Ich kann diese Beobachtung bestätigen.

Was die Blüte betrifft, so gibt J. MEYER an, daß die Pollenkörner von *Crataegomespilus Asnieresii* nahezu so groß wie die von *Crataegus* (24.2 und 26.8 μ), die von *Cr. Dardari* nahezu so groß wie die von *Mespilus* (33 und 38.3 μ) sind. Größeres Gewicht legt MEYER auf die Zahl der Karpelle, von dem bei *Crataegus* nur eines, bei *Mespilus* dagegen fünf vorhanden sind, während beide Mischlinge wieder nur je ein Karpell besitzen. Dem widerspricht F. C. WEISS, der bei *Cr. Dardari* auch Blüten mit zwei Karpellen und zwei Griffeln gefunden hat, von welch letzteren der eine nur teilweise entwickelt war. In diesen Fällen liegt also eine Mittelbildung vor, was gegen die Periklinalchimärentheorie spricht.

Der anatomische Bau der Frucht dagegen stützt die Theorie. Beim Weißdorn ist sie nur von der rot gefärbten Epidermis überzogen, bei der Mispel und den beiden Mischlingen kommt es durch Teilung der Epidermiszellen zur Peridermbildung. Das Fruchtfleisch von *Cr. Asnieresii* gleicht vollkommen dem von *Crataegus*, das nur aus anthocyanführenden Parenchymzellen besteht und keine Steinzellen aufweist, während in dem anthocyanfreien Fruchtfleisch von *Mespilus* und *Cr. Dardari* zahlreiche Steinzellen auftreten. Zur Erklärung dieses Verhaltens des *Dardari*-Fruchtfleisches nimmt MEYER an, daß bei der Ausgestaltung der Frucht die subepidermale *Mespilus*-Schicht der Außenfläche sich wiederholt (periklin) geteilt habe. Betreffs weiterer Einzelheiten ist auf MEYERS Abhandlung zu verweisen (S. 218).

Als ein wichtiges, wenn auch nicht durchschlagendes Argument zugunsten der Periklinalchimärentheorie sind die häufigen Rückschläge der *Crataegomespili* zu den beiden Stammformen anzusehen. Sie werden, wie schon BAUR betont hat, von dieser Theorie in ungezwungener, einfacher Weise erklärt. In diesem Punkte ist sie der Burdonenhypothese zweifellos überlegen.

Schließlich würde es für die Periklinalchimärentheorie ein gewichtiges Argument bilden, wenn Sämlinge von beiden Mischlingen in größerer Anzahl aufgezogen worden wären und die Sämlinge von *Cr. Asnieresii* sich ausnahmslos als Weißdornpflanzen, die von *Cr. Dardari* als Mispelpflanzen erwiesen hätten. Doch ist es bisher, wie schon oben erwähnt wurde, nicht gelungen, solche Sämlinge in genügender Anzahl zu erhalten. *Cr. Dardari* hat bisher überhaupt noch niemals Samen geliefert, und von *Cr. Asnieresii* sind nur drei Sämlinge beobachtet worden, die sich wie reine *Crataegus*-Pflanzen verhielten (E. LOUIS). Es wäre sehr erwünscht, wenn Anbauversuche mit Samen von *Cr. Asnieresii* in größerem Maßstabe durchgeführt würden, wobei allerdings die Bestäubung der Blüten der Mutterpflanzen genau kontrolliert werden müßte.

Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß, wenn die *Crataegomespili* wirklich Periklinalchimären sein sollten, mit Rücksicht auf die verschiedenen Intermediärbildungen im anatomischen Bau ihrer Laubblätter eine direkte oder



indirekte Beeinflussung der sich entwickelnden Gewebe der einen Komponente seitens der Kerne (und eventuell auch des Cytoplasmas) der anderen stattfinden müßte. Wie man sich eine solche indirekte Beeinflussung vorzustellen hätte, ist bereits oben näher erörtert worden. Sie kommt gewiß auch zur Geltung, doch zweifellos nicht allein. Die Hauptrolle wird die direkte Beeinflussung spielen, die darin besteht, daß morphogene Substanzen von den Kernen der einen Komponente ausgeschieden werden, in die andere Komponente übertreten und hier in Kombination mit den morphogenen Substanzen der Kerne dieser Komponente zur Entstehung von Mittelbildungen führen.

Es fragt sich nun, welche Annahmen zu machen sind, um ein solches Zusammenwirken der Kerne der beiden Komponenten des Mischlings verständlich zu machen. Diese Annahmen sind die Hilfshypothesen, die die Periklinalchimärentheorie der *Crataegomespili* braucht, um sich der Burdonenhypothese gegenüber behaupten zu können.

Die erste dieser Annahmen oder Voraussetzungen betrifft die Reichweite des Kerneinflusses einer Zelle. Im allgemeinen wird gegenwärtig angenommen, daß der Einfluß eines Kernes bis zu den Grenzen der Zelle reicht, der er angehört. Auf diese Annahme hat schon vor Jahren Julius Sachs seine Energidenlehre aufgebaut. Doch läßt sich kein triftiger Grund gegen die Annahme geltend machen, daß unter Umständen der Einfluß des Kernes vor den Zellgrenzen nicht haltmacht, sondern über diese hinaus sich auch in Nachbarzellen, ja selbst noch in entfernter gelegenen Zellen auswirkt. Die morphogenen Substanzen, die der Kern ausscheidet, müßten dann durch die Zellwände hindurchtreten, wobei die Plasmodesmen eine wichtige Rolle spielen könnten. Schon Strasburger hat derartiges angenommen, um die Entwicklungsvorgänge in seinen »Hyperchimären« zu erklären.

Die zweite Annahme, die nicht zu umgehen ist, ist die, daß der Kern einer bestimmten Zelle nicht nur jene morphogenen Substanzen ausscheidet, die den histologischen Charakter der betreffenden Zelle bestimmen, sondern auch solche, die die histologischen Merkmale von Zellen bewirken, die einem anderen Gewebe angehören. Es müssen mit anderen Worten außer den die charakteristischen Merkmale der betreffenden Zelle bewirkenden Genen auch noch andere Gene und Genkomplexe aktiv werden. Bei *Crataegomespilus Asnieresii* müßten z. B. die *Crataegus*-Kerne der subepidermalen Mesophyllzellen der Blattoberseite nicht nur jene Substanzen ausscheiden, welche die Palisadenform bewirken, sondern auch jene, welche die charakteristischen Merkmale der *Crataegus*-Epidermis samt Haaren und Spaltöffnungen hervorrufen. Diese Stoffe würden dann nach ihrem Übertritt in die unentwickelte *Mespilus*-Epidermis entweder mit den von den Mispelkernen ausgeschiedenen Stoffen vereint wirksam werden und so zu Mittelbildungen führen wie bei der Ausbildung der einzelnen Haare und der Spaltöffnungen; oder die *Crataegus*-Stoffe würden teilweise die Oberherrschaft gewinnen, den *Mespilus*-Stoffen nach R. Goldschmidts Auffassung zuvorkommen, und so die Dominanz der *Crataegus*-Merkmale hinsichtlich der Oberflächengestalt der Epidermiszellen bewirken.

Eine solche Annahme muß nun Bedenken erregen, denn sie führt zu weittragenden Konsequenzen. Wenn in einem Kern außer jenen Genen, die die spezifischen Merkmale der betreffenden Zelle bewirken, auch noch diejenigen Gene aktiv werden, welche die Merkmale der Zellen einer anderen Gewebeart hervorrufen, so darf konsequenterweise angenommen werden, daß auch die Gene für alle übrigen Gewebesysteme, die sich gleichzeitig entwickeln, wirksam werden und die betreffenden morphogenen Substanzen ausscheiden. Dann verbreitet sich über die Zellgrenzen hinweg ein Gemisch verschiedenartigster morphogener Stoffe in den sich entwickelnden Organen, dem Blatt, dem Stamm, der Wurzel. Das würde natürlich nicht nur für die *Crataegomespili*, sondern auch für jede beliebige andere höher entwickelte Pflanze gelten.

Wie kommt es dann, muß weiter gefragt werden, daß in diesem Stoffgemisch die einzelnen Stoffe stets am richtigen Orte wirksam werden, die Stoffe, welche die Epidermismerkmale bewirken, im Dermatogen und an keiner anderen Stelle, die Gefäßbündelstoffe gerade nur in den Prokambiumsträngen usw.? Man kann darauf antworten, daß die betreffenden primären Meristeme (bzw. ihre Cytoplasmakörper) eine besondere oder ausschließliche Empfindlichkeit für jene Stoffe besitzen, die sie zu dem machen, wozu sie dem ganzen Bauplan der Pflanze nach bestimmt sind. Der bekannte Vergleich, den EMIL FISCHER in bezug auf die Wirksamkeit der Enzyme aufgestellt hat, der Vergleich mit Schlüssel und Schloß, wäre sonach auch hier am Platze. Wie werden dann aber die verschiedenen Empfindlichkeiten der Meristeme und ihrer Cytoplasmakörper im jugendlichen Organ richtig verteilt, so daß bei der Entwicklung kein wirres Durcheinander entsteht? Man wird bei der Beantwortung dieser Frage zur Annahme eines geheimnisvollen Bauplans gedrängt, der der Funktion der Zellkerne, ihrer Chromosomen und Gene übergeordnet ist.

Dies sind kurz gefaßt die letzten Konsequenzen, zu denen die Periklinalchimärentheorie der *Crataegomespili* führt, und deren Tragweite über das *Crataegomespilus*-Problem weit hinausreicht. Wer sich nicht entschließen kann, sie anzunehmen, der wird die Periklinalchimärentheorie für die *Crataegomespili* ablehnen und sich zur Burdonenhypothese bekennen müssen. Ich selbst versage es mir, mich für die eine oder andere Auffassung zu entscheiden.

Literatur.

1. BAUR, Erwin, I. Pfropfbastarde, Biologisches Zentralblatt, B. 30, 1910.
2. Derselbe, II. Pfropfbastarde, Periklinalchimären und Hyperchimären. Berichte der deutsch. bot. Gesellsch., B. 27, 1910.
3. Derselbe, III. Einführung in die experimentelle Vererbungslehre. II. Aufl., Berlin 1914.
4. BUDER, Johannes. Studien an *Laburnum Adami*. II. Allgemeine anatomische Analyse des Mischlings und seiner Stammpflanzen, Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre, S. 5, 1911.
5. DANIEL, Lucien, L'hybridation asexuelle ou variation spécifique chez les plantes greffées. Revue générale de Botanique, T. 27, 1915.
6. GRAU, Ellynor, Untersuchungen über die Regeneration der Vegetationspunkte an abgeschnittenen Sprossen im Hinblick auf die Bildung der Pfropfbastarde. Inauguraldissertation der Universität Königsberg, 1917.



7. Herrig, Friedrich, Beiträge zur Kenntnis der Blattentwicklung einiger phanerogamen Pflanzen. Flora B. 107, 1915.

8. Kemp, H. P. On the Question of the Occurrence of »Heterotypical Reduction« in Somatic Cells. Annals of Botany, B. 24, 1910.

9. Lundegårdh, H., Zur Mechanik der Kernteilung. Svensk Botanisk Tidskrift. B. 8, 1914.

10. Mayer-Alberti, Maria, Vergleichende Untersuchungen über den Blattbau einiger *Solanum*-Pfropfbastarde. Mitteilungen aus dem Institut für allgemeine Botanik in Hamburg. B. 6, 1924.

11. Meyer, Johannes. Die *Crataegomespili* von Bronvaux. Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre. B. 13. 1915.

12. Němec, Bogumil, Das Problem der Befruchtungsvorgänge und andere zytologische Fragen. Berlin 1910.

13. Noack, Konrad L., Entwicklungsmechanische Studien an panaschierten Pelargonien. Zugleich ein Beitrag zur Theorie der Periklinalchimären. Jahrbücher f. wissenschaftl. Botanik. B. 61, 1922.

14. Noll, F., Die Pfropfbastarde von Bronvaux. Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde zu Bonn. 1905.

15. Strasburger, Ed., Meine Stellungnahme zur Frage der Pfropfbastarde. Berichte der deutsch. bot. Gesellsch., B. 27, 1909.

16. de Vries, Hugo, Die Mutationstheorie. II. B., 1903.

17. Weiss, F. E., On the Leaf-Tissues of the Graft Hybrids *Crataegomespilus Asnieresii* and *Crataegomespilus Dardari*. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. V. 69, 1925.

18. Winkler, Hans, I. Über das Wesen der Pfropfbastarde. Berichte der deutsch. bot. Gesellsch. B. 28. 1910.

19. Derselbe, II. Untersuchungen über Pfropfbastarde. I. Teil. Die unmittelbare gegenseitige Beeinflussung der Pfropfsymbionten, Jena 1912.

20. Derselbe. III. Über die experimentelle Erzeugung von Pflanzen mit abweichenden Chromosomenzahlen. Zeitschrift f. Bot.. 8. Jahrg., 1916.

Ausgegeben am 7. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XVIII. Gesamtsitzung. 10. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. K. A. Hofmann sprach über die Bildung von Nitrit und Nitrat aus Ammoniak, Harnstoff, Cyanaten, Calciumcyanamid bei Temperaturen unter Rotglut.

Es wird nachgewiesen, daß hierbei ohne Verlust, d. h. ohne Austritt von molekularem Stickstoff, vollkommene Oxydation eintritt, weil der dreiwertige Stickstoff seine durch Oxydation frei werdenden Valenzen sofort mit Sauerstoff absättigt. So nimmt auch Natriumazid bei seinem thermischen Zerfall: $NaN_3 \longrightarrow NaN = + N_2$ molekularen Sauerstoff glatt auf zu quantitativer Nitritbildung, aus dem durch weitere Oxydation das Nitrat hervorgeht.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Lorentz übersandte im Namen der Société Hollandaise des sciences de Harlem den 15. Band der »Œuvres complètes de Christian Huygens« (La Haye 1925).

3. Die Generaldirektion der Staatlichen Museen in Berlin überreichte im Auftrage des Ehrenmitgliedes der Akademie Hrn. von Bode das Werk: »Hauptwerke aus den Staatlichen Museen zu Berlin, Wilhelm von Bode zu Ehren herausgegeben von den Abteilungsleitern« (Berlin 1926).

4. Vorgelegt wurde die Arbeit von Eduard Sthamer, »Die Hauptstraßen des Königreichs Sicilien im 13. Jahrhundert« (Sonderabdr. Napoli 1926).

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied der philosophischen Klasse Hrn. Karl Holl am 23. Mai und das ordentliche Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Franz Bruno Hofmann am 6. Juni durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 22. Juli.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

XIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 17. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Johnsen sprach über die Optik des Brillanten. (Ersch. später.)

Besonders wurde folgendes untersucht: es falle ein Lichtstrahl senkrecht auf die Tafel in Richtung ϱ; er werde reflektiert an zwei unteren Hauptfacetten und trete aus einer oberen Hauptfacette in Richtung $-\varrho$ aus. Welche Paare zugeordneter Winkelwerte ϕ und ψ lassen das zu? Hierbei ist ϕ der spitze Winkel zwischen oberer Hauptfacette und Rundistenebene, ψ der spitze Winkel zwischen unterer Hauptfacette und Rundistenebene. Die erhaltene Beziehung zwischen ϕ und ψ wird durch folgende beiden Gleichungen (I) und (II) formuliert, worin n den Brechungsindex bedeutet.

$$\text{(I)}\ \operatorname{ctg}\phi = -\frac{1+n\cos 4\psi}{n\sin 4\psi};\qquad \text{(II)}\ \cos 4\psi = -\frac{\sin^2\phi}{n} \pm \frac{\cos\phi}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\phi}.$$

Aus der Bedingung totaler, nicht partieller Reflexion ergeben sich für ψ folgende Grenzen $45^\circ > \psi > 28^\circ\,36\tfrac{1}{2}'$.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. Hermann Weyl in Zürich vor: Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Die Theorie der Integralgleichungen liefert den Fundamentalsatz von H. Bohrs Theorie der fastperiodischen Funktionen, das Analogon der Parsevalschen Gleichung für die fastperiodische Funktion $f(s)$, wenn man den Kern $f(s-t)$ ansetzt. Es tritt ein gruppentheoretischer Schluß hinzu, welcher zeigt, daß dieser Kern nur einfache Schwingungen zu Eigenfunktionen besitzt.



Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen.

(Aus einem Schreiben an Hrn. Harald Bohr.)

Von Prof. Dr. H. Weyl
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Als Sie uns neulich in Zürich über die fastperiodischen Funktionen vortrugen, regte sich in mir von neuem der lebhafte Wunsch nach einer natürlichen Begründung des *Fundamentalsatzes* Ihrer schönen Theorie, des Analogon der Parsevalschen Gleichung[1]. Ich brachte das Unbefriedigende der gegenwärtigen Lage in der Diskussion zum Ausdruck und meinte: wenn es gelänge, für die Parsevalsche Gleichung im Gebiet der gewöhnlichen Fourierreihen einen Beweis zu finden, der nicht durch die gleichmäßige Approximation der gegebenen Funktion f mittels trigonometrischer Polynome hindurchgeht, so stünde zu erwarten, daß sich dieser Beweis auf die fastperiodischen Funktionen werde übertragen lassen. Ein solcher Beweis sei um so mehr erwünscht, da ja in der allgemeinen Theorie der fastperiodischen Funktionen der Approximationssatz sich auf die Parsevalsche Gleichung stützen muß und nicht umgekehrt. Inzwischen ist es mir gelungen, dieses Desideratum zu erfüllen. Meine Untersuchungen über geschlossene kontinuierliche Gruppen zeigten mir den Weg. Auch dort steht im Zentrum ein Vollständigkeitstheorem: die Vollständigkeit des Charakteristikensystems[2]. Man gewinnt sie durch Reduktion der sog. regulären Darstellung. Für die einfachste Gruppe, für die einparametrige kommutative Gruppe der Drehungen eines Kreises fällt aber dieser gruppentheoretische Vollständigkeitssatz mit der gewöhnlichen Parsevalschen Gleichung zusammen.

Ich gehe danach so vor. Ist $f(s)$ die stetige Funktion von der Periode 2π, für welche die Parsevalsche Gleichung bewiesen werden soll, so nehme ich $f(s-t)$ *als Kern einer Integralgleichung* und suche die Eigenwerte und Eigenfunktionen des »Hermiteschen Kernes«

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s-r)\bar{f}(t-r)\,dr = g(s-t) \tag{1}$$

[1] Vgl. vor allem H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. II. III., Acta Mathematica **45—47** (1924—26).

[2] Weyl, Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 390.

zu bestimmen. Offenbar ist jede einfache Schwingung $e^{i\lambda s}$ mit ganzzahliger Frequenz λ, für welche der zugehörige Fourierkoeffizient

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(s)\, e^{-i\lambda s}\, ds \neq 0$$

ist, eine solche Eigenfunktion und $|a(\lambda)|^2$ der zugehörige Eigenwert (ich nenne hier Eigenwert, was nach Hilbert als reziproker Eigenwert zu bezeichnen wäre). Ich behaupte: (A) *Dies sind alle Eigenfunktionen.* Alsdann liefert der allgemeine Satz aus der Theorie der Integralgleichungen, daß (B) die Spur des Kernes $g(s-t)$ gleich der Summe der Eigenwerte ist, die Parsevalsche Gleichung. (A) ist natürlich auf Grund der Theorie der Fourierreihen sofort klar; es gilt aber, den Beweis dafür auf direktem Wege zu erbringen.

Die einfachste heute klassische Begründung des Satzes (B) gab E. Schmidt in seiner Dissertation (Göttingen 1905). Wendet man seine Methode konstruktiv, so sieht sie in unserm Falle so aus: Man bildet die iterierten Kerne $g, g^2, g^3, \cdots$ gemäß der Formel für die (hier kommutative) Zusammensetzung

$$ff^*(s-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(s-r) f^*(r-t)\, dr$$

oder

$$ff^*(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(s-r) f^*(r)\, dr\,. \tag{2}$$

Ist f nicht identisch $=0$, so sind deren Spuren $g^n(0) = \gamma_n$ positive Zahlen, und es strebt γ_n/γ_{n-1} wachsend gegen eine Zahl c, $\dfrac{g^n(s-t)}{c^n}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $E(s-t)$. c ist der größte Eigenwert, $E(s-t)$ derjenige Bestandteil des Kernes $g(s-t)$, der zu diesem Eigenwert gehört:

$$gE = c\cdot E\,,\quad EE = E\,. \tag{3}$$

Wendet man die Methode von neuem auf $g - c\cdot E$ an, so erhält man den nächst kleineren Eigenwert c' samt dem zugehörigen Bestandteil $E'(s-t)$, usf. Die Gleichung

$$g(s-t) = c\,E(s-t) + c'\,E'(s-t) + \cdots$$

ist eine selbstverständliche Folge dieser Konstruktion.

$$E(s-t) \text{ ist } = \phi_1(s)\,\bar{\phi}_1(t) + \cdots + \phi_h(s)\,\phi_h(t)\,, \tag{4}$$

wo die $\phi_\alpha(s)$ das unitär-orthogonale System der zu c gehörigen Eigenfunktionen bilden $[E(0) = \text{Spur von } E(s-t) = h]$. Sie sind nur bis auf eine unitäre Transformation bestimmt. Um zu der Behauptung (A) zu gelangen und damit die Parsevalsche Gleichung zu beweisen, muß aus der Tatsache, daß die rechte Seite von (4) eine Funktion von $s-t$ allein ist, geschlossen werden, daß bei geeigneter Normierung die $\phi(s)$ einfache Schwingungen sind. Dies kann man auf verschiedene Weisen erkennen. Z. B. ergibt es sich aus

der Theorie der kommutativen h-gliedrigen hyperkomplexen Zahlen; die hyperkomplexen Zahlen sind dabei die linearen Kombinationen der h Funktionen $\phi_1(s), \phi_2(s), \cdots, \phi_h(s)$; ihre Multiplikation, die aus dieser h-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit nicht herausführt, ist durch (2) erklärt. Oder man kann so verfahren. Bei irgendeinem festen t ist $\phi(s+t)$ so gut eine zu c gehörige Eigenfunktion wie $\phi(s)$; daher gelten Formeln

$$(5) \qquad \phi_\alpha(s+t) = \sum_{\beta=1}^{h} e_{\alpha\beta}(t)\,\phi_\beta(s). \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, h)$$

Aus (4) erkennt man dies, wenn man in

$$\phi_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} E(s-r)\,\phi_\alpha(r)\,dr$$

s durch $s+t$ ersetzt:

$$e_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{\phi}_\beta(r-t)\,\phi_\alpha(r)\,dr.$$

Die Gleichungen (5) sagen aus: Verschiebung des Arguments um t bewirkt an den Funktionen $\phi_\alpha(s)$ die lineare Transformation

$$\mathrm{E}(t) = \| e_{\alpha\beta}(t) \|.$$

Darum muß

$$(6) \qquad \mathrm{E}(t)\,\mathrm{E}(t') = \mathrm{E}(t+t')$$

sein [$\mathrm{E}(t)$ ist eine Darstellung der Drehungsgruppe $x' = e^{it}x$], und $\mathrm{E}(t)$ ist für jeden Wert von t unitär, weil das Funktionssystem $\phi_\alpha(s)$ unitär-orthogonal ist und diesen Charakter durch die Verschiebung des Arguments um t nicht verliert. Hieraus und aus der Kommutativität

$$\mathrm{E}(s)\,\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)\,\mathrm{E}(s)$$

folgt nun auf bekannte Weise, daß die Normierung so getroffen werden kann, daß alle seitlichen $e_{\alpha\beta}(t)\,(\alpha \neq \beta)$ verschwinden, während die in der Hauptdiagonale stehenden $e_\alpha(t)$ vom absoluten Betrag 1 sind. Die Gleichungen (6) und (5) liefern

$$e_\alpha(s)\,e_\alpha(t) = e_\alpha(s+t), \quad \phi_\alpha(t) = e_\alpha(t)\phi_\alpha(0)$$

und damit das gewünschte Resultat:

$$\phi_1(s) = e^{i\lambda_1 s}, \quad \phi_2(s) = e^{i\lambda_2 s}, \cdots, \quad \phi_h(s) = e^{i\lambda_h s}.$$

Wegen der Periodizität müssen die reellen λ ganze Zahlen sein. c ist das Quadrat des Betrages der zugehörigen Fourierkoeffizienten $a_1, a_2, \cdots, a_h$ von f. — Der bei Fortsetzung des Verfahrens zu bildende Kern

$$g'(s-t) = g(s-t) - c \cdot E(s-t)$$

entsteht nach der Formel (1) aus derjenigen Funktion

$$f'(s) = f(s) - (a_1 e^{i\lambda_1 s} + \cdots + a_h e^{i\lambda_h s}),$$

die von f übrigbleibt, wenn die beim ersten Schritt ermittelten, in f enthaltenen Schwingungen subtrahiert werden.



Und dies alles läßt sich nun in der Tat ohne weiteres auf die fastperiodischen Funktionen übertragen! Man braucht sich dabei nicht einmal auf die Tatsache zu stützen — deren direkter Beweis etwas peinlich ist —, daß Summe und Produkt von fastperiodischen Funktionen wieder fastperiodisch sind. Denn bei der Bildung von g und seiner Iterierten entstehen immer nur Funktionen f^* »von gleicher Art« wie f; d. h. man hat eine positive Konstante C von der Beschaffenheit, daß jede Fastperiode τ von f mit dem Annäherungsmaß ε:

$$|f(s+\tau)-f(s)| \leqq \varepsilon \text{ für alle } s,$$

eine Fastperiode von f^* mit dem Annäherungsmaß $C\varepsilon$ ist. Nur den Satz also, daß eine fastperiodische Funktion f einen Mittelwert $M\{f\}$ besitzt, benötige ich. Für E ergeben sich seiner Konstruktion zufolge durch Grenzübergang wieder die Gleichungen (3), aus deren erster übrigens nachträglich sofort folgt, daß $E(s)$ fastperiodisch ist, und zwar »von der gleichen Art« wie $f(s)$.

Im rein periodischen Fall liefert der sog. Entwicklungssatz der Integralgleichungstheorie, der hier eine unmittelbare Folge der Parsevalschen Gleichung ist, für jede Funktion von der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(s-t)\,x(t)\,dt$$

eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe, in der nur die Frequenzen von $f(s)$ auftreten. Den Approximationssatz gewinnt man daraus, wenn man für $x(t)$ eine nicht-negative Funktion vom Mittelwert 1 wählt, welche nur in der nächsten Umgebung der Stelle $t = 0$ von Null verschieden ist. Analog kann man vorgehen im Gebiete der fastperiodischen Funktionen. Man erkennt so, daß der Approximationssatz, welcher behauptet, daß $f(s)$ durch eine Superposition von in f vorkommenden einfachen Schwingungen beliebig genau gleichmäßig angenähert werden kann, mit der Frage der Basis, mit den zahlentheoretischen Eigenschaften und Abhängigkeiten der vorkommenden Frequenzen nichts zu tun hat, und man bekommt eine explizite Abschätzung der Gliederzahl des approximierenden Aggregats, welche nur die Kenntnis jener Größen voraussetzt, deren Existenz durch den Begriff der fastperiodischen Funktion selbst gefordert ist. Erst nachdem der Approximationssatz gewonnen ist, zeigt man dann, daß für jede durch unsere Konstruktion nicht gelieferte Frequenz λ der Mittelwert $a(\lambda) = M\{f(s)e^{-i\lambda s}\}$ (gleichfalls existiert und) $= 0$ ist; ferner, daß man durch Addition und Multiplikation den Bereich der fastperiodischen Funktionen nicht verläßt, weil jedes endliche Aggregat einfacher Schwingungen fastperiodisch ist.

Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume.

Von F. SCHOTTKY.

(Vorgetragen am 10. Dezember 1925 [s. Jahrg. 1925 S. 589].)

Wenn man das EULERsche Problem der Bewegung eines starren Körpers auf den vierdimensionalen Raum ausdehnt, so treten statt der drei EULERschen Drehungskomponenten sechs auf, die ganz ähnlichen Gleichungen genügen wie die EULERschen drei. Die Differentialgleichungen erhalten besonders einfache Gestalt, wenn man jede Komponente $p_{\alpha\beta}$ mit dem zugehörigen Trägheitsmoment $A_\alpha + A_\beta$ behaftet. Nennt man das Produkt $q_{\alpha\beta}$, so ist eine der Gleichungen:

$$dq_{12} = (a_1 - a_2)\{q_{14}q_{24}(a_3 du + dv) + q_{13}q_{23}(a_4 du + dv)\}.$$

Die übrigen gehen hieraus hervor durch beliebige Vertauschung der Zahlen $1, 2, 3, 4$ untereinander. $q_{\alpha\beta}$ ist hierbei als alternierend aufzufassen:

$$q_{\beta\alpha} = -q_{\alpha\beta}.$$

a_1, a_2, a_3, a_4 sind die Quadrate der vier Trägheitsmomente A_α; u und v sind lineare Funktionen der Zeit, also Größen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit ändern.

Diese Gleichungen widersprechen einander nicht, wenn man u und v nicht als Funktionen von t, sondern als zwei unabhängige komplexe Veränderliche betrachtet. Natürlich auch dann nicht, wenn die vier Größen a_α nicht Quadrate von Trägheitsmomenten, sondern vier willkürliche Punkte in der Ebene der komplexen Größe z sind. Sie stimmen ferner vollständig überein mit denjenigen Differentialgleichungen, denen die sechs Quotienten

$$\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta}$$

von sieben Thetafunktionen zweier Veränderlichen: $\vartheta, \vartheta_{12} \cdots \vartheta_{34}$ genügen, wenn man von diesen Theta bestimmte konstante Faktoren absondert und sie dadurch zu einer Art von σ-Funktionen macht. Ein sehr bemerkenswerter Umstand aber ist, daß, wenn man für diese sechs Thetaquotienten mit gemeinsamem Nenner die Differentialgleichungen aufstellt, diese Gleichungen nicht die Thetaquotienten definieren, sondern allgemeinere Funktionen, die nicht nur drei, sondern vier wesentliche Parameter enthalten. Deshalb ist es von



Interesse, das durch die sechs Differentialgleichungen charakterisierte Problem rein analytisch zu behandeln, abgesehen von aller Mechanik und Hypermechanik.

Wir wollen aber gar nicht die sechs Differentialgleichungen zugrunde legen, sondern nur die algebraischen Gleichungen zwischen den $q_{\alpha\beta}$, die sich aus ihnen ergeben. Es sind vier. Sie lassen sich, durch Einführung einer willkürlichen Größe z, in eine Formel zusammenfassen. Wir bilden die vier Elementarfunktionen $\sqrt{z-a_\alpha}$ und bestimmen sie, ihren Vorzeichen nach willkürlich, für irgendeinen festen Punkt o der z-Ebene, der von den vier Grundpunkten a_α verschieden ist. Dann sind sie auch bestimmt längs jeder Linie, die von o ausgeht und durch keinen der Grundpunkte hindurchgeht. Endigen darf sie in einem solchen Punkt a_α. Aber dann kann man auch, indem man die Linie rückwärts durchläuft, a_α zum Anfangspunkt wählen.

Man bilde nun die Produkte je zweier dieser Elementarfunktionen und auch das aller vier:

$$\sqrt{z_{\alpha\beta}} = \sqrt{z-c_\alpha}\,\sqrt{z-c_\beta}\,.$$

$$\sqrt{F(z)} = \prod_{o=1}^{4}\left(\sqrt{z-c_\alpha}\right).$$

Ferner die in den Komponenten linearen Ausdrücke:

$$\sqrt{z_{14}}\,q_{23} + \sqrt{z_{23}}\,q_{14} = F_1(z)\,,$$

$$\sqrt{z_{24}}\,q_{31} + \sqrt{z_{31}}\,q_{24} = F_2(z)\,,$$

$$\sqrt{z_{34}}\,q_{12} + \sqrt{z_{12}}\,q_{34} = F_3(z)\,.$$

Dann besteht die algebraische Grundeigenschaft der sechs Größen q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{23}, q_{31}, q_{12} darin, daß die Summe $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ bei jedem konstanten Werte von z selbst konstant ist. Bei veränderlichem z ist die Summe natürlich eine Funktion $\Phi(z)$ von der Form $G(z) + 2D_0\sqrt{F(z)}$, wo $G(z)$ ein Polynom zweiten Grades und D_0 eine Konstante bedeutet.

Nun legen wir, um möglichst geringe Voraussetzungen zu haben, gar nicht die Differentialgleichungen, sondern nur die in der Formel $\sum F_\alpha^2(z) = \Phi(z)$ vereinigten vier quadratischen Gleichungen zugrunde; bei den Größen a_α sehen wir davon ab, daß sie Quadrate von Trägheitsmomenten sind, und betrachten sie als vier willkürliche Punkte der z-Ebene.

Eine der vier Gleichungen, die aus der Voraussetzung folgen, ist

$$q_{14}q_{23} + q_{24}q_{31} + q_{34}q_{12} = D_0\,.$$

Die drei Koeffizienten von $G(z)$ denken wir uns dadurch bestimmt, daß drei Punkte a, b, c und die zugehörigen Werte $\sqrt{F(a)}$, $\sqrt{F(b)}$, $\sqrt{F(c)}$ gegeben sind, wofür der Ausdruck $\Phi(z)$ verschwindet. Wir haben dann neben der einen nicht homogenen Gleichung, in der D_0 vorkommt, drei homogene quadratische Gleichungen zwischen den sechs Größen q:

$$\sum F_\alpha^2(a) = 0\,,\quad \sum F_\alpha^2(b) = 0\,,\quad \sum F_\alpha^2(c) = 0\,.$$

Diese vier Gleichungen sind aufzulösen; es sind die sechs Größen q_{12}, $q_{23} \cdots q_{34}$ als algebraische Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen x, y,

die komplex sein dürfen, darzustellen. Das ist durchaus nicht ganz einfach; wir brauchen dazu eine längere Vorbereitung, in der wir die sechs Größen q nicht als durch die vier Gleichungen miteinander verbunden, sondern als ganz unabhängige Größen betrachten. Außerdem fassen wir die Größen $\sqrt{z_{12}} \cdots \sqrt{z_{34}}$ als elliptische Funktionen einer Variabeln u auf und ihre Werte für $z = a, b, c$ als die Werte dieser Größen für drei Werte von u, die wir mit A, B, C bezeichnen. Wir wollen aber diese elliptischen Funktionen genau und so einfach wie möglich definieren.

Bildet man, für zwei Punkte x, y der z-Ebene, den Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{x_{14} y_{23}} + \sqrt{y_{14} x_{23}}}{x - y} = S_1$$

und ebenso die durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 hieraus entstehenden: S_2, S_3, so ist

$$2\sqrt{F(y)}\,\frac{\partial S_1}{\partial y}$$

darstellbar als ein Quotient mit dem Nenner $(x-y)^2$.

Der Zähler läßt sich in zwei Faktoren zerlegen. Diese Faktoren sind die Zähler von S_2 und S_3; es ist also:

$$2\sqrt{F(y)}\,\frac{\partial S_1}{\partial y} = S_2 S_3.$$

Da S_1, S_2, S_3 alternierend sind in bezug auf x und y, so ist zugleich:

$$2\sqrt{F(x)}\,\frac{\partial S_1}{\partial x} = -S_2 S_3.$$

Daraus folgt:

$$2\sqrt{F(x)}\,\frac{\partial S_1}{\partial x} + 2\sqrt{F(y)}\,\frac{\partial S_1}{\partial y} = 0.$$

Derselben partiellen Differentialgleichung genügt das Integral

$$w = \int_y^x \frac{dx}{2\sqrt{F(x)}};$$

es ist daher:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial S_1}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial S_1}{\partial x} = 0,$$

und daraus geht hervor, daß S_1 eine Funktion von w ist:

$$S_1 = f_1(w).$$

Ebenso ergibt sich: $S_2 = f_2(w)$, $S_3 = f_3(w)$. Dies sind ungerade Funktionen von w. Denn wenn man x mit y vertauscht, geht w in $-w$ und S_1 in $-S_1$ über. Sie werden ferner unendlich für $w = 0$, und zwar so, daß

ihre Produkte mit w für $w = 0$ den Wert 1 annehmen. Denn für $w = 0$ wird $x = y$ und der Zähler von S_1 gleich $2\sqrt{F(y)}$, $\frac{x-y}{w}$ aber bekommt ebenfalls den Wert $2\sqrt{F(y)}$. Aus der Gleichung $2\sqrt{F(x)}\frac{\partial S_1}{\partial x} = -S_2 S_3$ folgt außerdem:

$$\frac{df_1(w)}{\partial w} = -f_2(w)f_3(w).$$

Ebenso ist $\frac{df_2}{\partial w} = -f_3 f_1$, $\frac{df_3}{\partial w} = -f_1 f_2$.

Man kann die obere Grenze des Integrals w mit a_4 zusammenfallen lassen, also mit einem der vier Grundpunkte, und ebenso die untere. Setzt man:

$$u = \int_{a_4}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{F(x)}}, \quad v = \int_{a_4}^{y} \frac{dx}{2\sqrt{F(x)}},$$

so ist $w = u - v$ und daher:

$$\frac{\sqrt{x_{14} y_{23}} + \sqrt{y_{14} x_{23}}}{x-y} = f_1(u-v).$$

Für $v = 0$, wo $y = a_4$ ist, hat man:

$$f_1^2(u) = \frac{x-a_1}{x-a_4}(a_2-a_4)(a_3-a_4).$$

Da $f_1(u)$ ungerade ist, so ist die Funktion $x = \phi(u)$, die der Gleichung genügt:

$$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{F(x)}$$

eine gerade. — Der Punkt a_4 ist, da er die untere Grenze des Integrals u bildet, vor den drei anderen Grundpunkten ausgezeichnet. Wir wollen ihn mit s bezeichnen:

$$a_4 = s,$$

so daß

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-s)$$

ist, und

$$f_1^2(u) = \frac{x-a_1}{x-s}\,\frac{F'(s)}{s-a_1}.$$

Die Entwicklung von $x = \phi(u)$ nach aufsteigenden Potenzen von u fängt an mit $s + F'(s)w^2$. Es geht außerdem aus der letzten Gleichung hervor, daß $\sqrt{x_{14}} = \sqrt{(x-a_1)(x-s)}$ ebenso wie $f_1(u)$ eine ungerade Funktion von u ist. $\sqrt{x_{23}}$ aber ist gerade. Aus dem Subtraktionstheorem geht daher, indem man v durch $-v$ ersetzt, das Additionstheorem hervor:

$$f_1(u+v) = \frac{\sqrt{x_{14} y_{23}} - \sqrt{y_{14} x_{23}}}{x-y}.$$

$f_1^2(v)$ ist dieselbe lineare Funktion von y, wie $f_1^2(u)$ von x. Daraus ergibt sich:

$$f_1^2(v) - f_1^2(u) = \frac{(x-y)F'(s)}{(x-s)(y-s)}.$$

Das Subtraktionstheorem läßt sich, wenn man diese Formel benutzt, auf die üblichere Gestalt bringen:

$$f_1(u-v) = \frac{f_1(u)f_2(v)f_3(v) + f_1(v)f_2(u)f_3(u)}{f_1^2(v) - f_1^2(u)}.$$

Schließlich wollen wir noch den Ausdruck für $f_1(u)f_2(u)f_3(u)$ durch die Veränderliche x geben. Da für $u = v$, $x = y$:

$$\frac{x-y}{u-v} = 2\sqrt{F(y)}$$

wird, so wird auch $(x-y)f_1(u-v) = 2\sqrt{F(x)}$, wenn x mit y zusammenfällt. Der letzte Ausdruck für $f_1(u-v)$ liefert daher:

$$f_1(u)f_2(u)f_3(u) = \frac{\sqrt{F(x)}\,F'(s)}{(x-s)^2}.$$

Es ist ohne weiteres klar, daß alle hier aufgestellten Gleichungen richtig bleiben, wenn man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauscht.

§ 2. Den drei willkürlichen, also auch unabhängigen Werten A, B, C der Veränderlichen u, für die $z = a, b, c$ wird, fügen wir einen vierten D hinzu, der von ihnen durch die Gleichung

$$A + B + C + D = 0$$

abhängt; für diesen Wert D möge $z = d$, $\sqrt{F(z)} = \sqrt{F(d)}$ und $F_1(z) = F_1(d)$ werden, so daß

$$F_1(d) = \sqrt{d_{14}}\,q_{23} + \sqrt{d_{23}}\,q_{14}$$

ist, während $F_1(a) = \sqrt{a_{14}}\,q_{23} + \sqrt{a_{23}}\,q_{14}$ ist, usf.

Zwischen den vier Linearformen $F_1(a)$, $F_1(b)$, $F_1(c)$, $F_1(d)$ bestehen dann zwei Gleichungen; zwischen den drei ersten die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} F_1(a) & F_1(b) & F_1(c), \\ \sqrt{a_{14}} & \sqrt{b_{14}} & \sqrt{c_{14}} \\ \sqrt{a_{23}} & \sqrt{b_{23}} & \sqrt{c_{23}} \end{vmatrix} = 0,$$

die sofort auf die Form gebracht werden kann:

$$(b-c)f_1(B+C)F_1(a) + (c-a)f_1(C+A)F_1(b) + (a-b)f_1(A+B)F_1(c) = 0.$$

Ganz ebenso ist:

$$(b-d)f_1(B+D)F_1(a) + (d-a)f_1(D+A)F_1(b) + (a-b)f_1(A+B)F_1(d) = 0.$$

Statt der drei Größen A, B, C führen wir die Summen je zweier von ihnen ein:

$$B+C=u, \quad C+A=v, \quad A+B=w.$$

Da $A+B+C+D=0$ ist, so ist $B+D=-v$, $D+A=-u$; da außerdem f_1 eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich:

$$(b-c)f_1(u)F_1(a)-(a-c)f_1(v)F_1(b)+(a-b)f_1(w)F_1(c)=0,$$
$$-(b-d)f_1(v)F_1(a)+(a-d)f_1(u)F_1(b)+(a-b)f_1(w)F_1(d)=0.$$

An Stelle der Differenzen $a-b$, $a-c$ usf. und von $f_1(u)$, $f_1(v)$, $f_1(w)$ führen wir ganz andere Größen ein, und auch die Linearformen ändern wir um konstante Faktoren. Zunächst seien drei Größen k, l, m so definiert, daß

$$\frac{k}{lm}=(b-c)(a-d), \quad \frac{l}{km}=(a-c)(b-d), \quad \frac{m}{kl}=(a-b)(c-d)$$

ist; es ist dann

$$k^2-l^2+m^2=0.$$

Wir bilden ferner die Funktion

$$\psi(z)=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$$

und definieren $\sqrt{\psi'(a)}$, $\sqrt{-\psi'(b)}$, $\sqrt{\psi'(c)}$, $\sqrt{-\psi'(d)}$ so, daß

$$k=\frac{a-d}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(d)}}, \quad l=\frac{b-d}{\sqrt{-\psi'(b)}\sqrt{-\psi'(d)}}, \quad m=\frac{c-d}{\sqrt{\psi'(c)}\sqrt{-\psi'(d)}}$$

ist; was den drei andern Gleichungen nicht widerspricht. Daraus folgt von selbst:

$$k=\frac{b-c}{\sqrt{-\psi'(b)}\sqrt{\psi'(c)}}, \quad l=\frac{a-c}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{\psi'(c)}}, \quad m=\frac{a-b}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}}.$$

Drittens setzen wir:

$$\frac{F_1(a)}{\sqrt{\psi'(a)}}=X_1, \quad \frac{F_1(b)}{\sqrt{-\psi'(b)}}=Y_1, \quad \frac{F_1(c)}{\sqrt{\psi'(c)}}=Z_1, \quad \frac{F_1(d)}{\sqrt{-\psi'(d)}}=T_1,$$

und schließlich:

$$kf_1(u)=k_1, \quad lf_1(v)=l_1, \quad mf_1(w)=m_1.$$

Dadurch gehen die beiden Gleichungen zwischen den vier Linearformen über in:

$$k_1X_1-l_1Y_1+m_1Z_1=0,$$
$$-l_1X_1+k_1Y_1+m_1T_1=0.$$

Daraus folgt die Gleichung zwischen quadratischen Formen:

$$(k_1^2-l_1^2)(X_1^2-Y_1^2)=m_1^2(Z_1^2-T_1^2).$$

Addiert man auf beiden Seiten $m_1^2(X_1^2-Y_1^2)$, so ergibt sich:

$$(k_1^2-l_1^2+m_1^2)(X_1^2-Y_1^2)=m_1^2S_1,$$

wo

$$S_1 = \frac{F_1^2(a)}{\psi'(a)} + \frac{F_1^2(b)}{\psi'(b)} + \frac{F_1^2(c)}{\psi'(c)} + \frac{F_1^2(d)}{\psi'(d)}$$

ist. Dies S_1 bleibt ungeändert, wenn man A, B, C untereinander vertauscht. Vertauscht man aber A mit C, so geht X_1^2 in Z_1^2, und wenn man B mit C vertauscht, Y_1^2 in $-Z_1^2$ über. Y_1^2 bleibt im ersten, X_1^2 im zweiten Falle ungeändert.

Es wären deshalb, wenn S_1 nicht identisch o wäre, sowohl $X_1^2 - Y_1^2$ wie $Z_1^2 - Y_1^2$ und $X_1^2 + Z_1^2$ bis auf konstante Faktoren mit S_1 identisch. Dann wären aber X_1, Y_1, Z_1 selbst voneinander nur durch konstante Faktoren unterschieden, was unmöglich ist. Folglich ist S_1 gleich o, und damit auch $k_1^2 - l_1^2 + m_1^2 = 0$.

Da die Gleichung $S_1 = 0$ identisch besteht, so müssen die Größen, die in den einzelnen Gliedern mit $q_{14} q_{23}$ multipliziert sind, die Summe o haben. Dies gibt den Satz:

Ist $A + B + C + D = 0$, so ist auch die Summe der Größen

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{F(a)}}{\psi'(a)}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{F(b)}}{\psi'(b)}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\sqrt{F(c)}}{\psi'(c)}, \quad \mathfrak{D} = \frac{\sqrt{F(d)}}{\psi'(d)}$$

gleich o, also:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 0.$$

Daraus folgt, daß auch

$$\frac{\Phi(a)}{\psi'(a)} + \cdots + \frac{\Phi(d)}{\psi'(d)} = 0$$

ist; und da $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ und $\Phi(c) = 0$ sind, so muß $\Phi(d) = 0$ sein. Es ist also $d, \sqrt{F(d)}$ der vierte Punkt, in dem die Funktion $\Phi(z)$ verschwindet — was nicht grade überraschen kann.

Hinzu tritt die Gleichung $k_1^2 - l_1^2 + m_1^2 = 0$, oder:

$$k^2 f_1^2(u) - l^2 f_1^2(v) + m^2 f_1^2(w) = 0.$$

Da auch $k^2 - l^2 + m^2 = 0$ ist, so kann man ihr die Form geben:

$$k^2 (f_1^2(u) - f_1^2(w)) = l^2 (f_1^2(v) - f_1^2(w)).$$

Dadurch erhält man, wenn man die Werte der Funktion ϕ für die Variabeln $u = B + C$, $v = C + A$, $w = A + B$ einführt:

$$p = \phi(u), \quad q = \phi(v), \quad r = \phi(w):$$

$$k^2 \frac{p - r}{p - s} = l^2 \frac{q - r}{q - s}.$$

Die Größen k^2, l^2, m^2 verhalten sich demnach zueinander wie $(q-r)(p-s)$ $:(p-r)(q-s):(p-q)(r-s)$. Anderseits verhalten sie sich, der gegebenen Definition nach, wie $(b-c)(a-d):(a-c)(b-d):(a-b)(c-d)$. Die Funktion

ϕ kann die allgemeinste gerade elliptische Funktion zweiten Grades vertreten. Für jede solche Funktion gilt also der Satz:

Ist $A+B+C+D=0$, so ist das Doppelverhältnis der Werte $\phi(A)$, $\phi(B)$, $\phi(C)$, $\phi(D)$ gleich dem der vier andern: $\phi(B+C)$, $\phi(C+A)$, $\phi(A+B)$ und $\phi(0)$, was sich natürlich auch ohne die Linearformen beweisen läßt.

Zur Aufstellung eines dritten Satzes ist eine Vorbemerkung nötig. Den gemeinsamen Wert der drei Quotienten

$$\begin{aligned}(q-r)(p-s) &: (b-c)(a-d)\\ (p-r)(q-s) &: (a-c)(b-d)\\ (p-q)(r-s) &: (a-b)(c-d)\end{aligned}$$

bezeichnen wir mit τ, so daß

$$(q-r)(p-s) = \tau(b-c)(a-d)$$

ist, usf. Es ist dann auch:

$$\frac{k}{lm} = \frac{(q-r)(p-s)}{\tau},$$

und daraus folgt, daß $\left(\frac{k}{\tau}\right)^2$, $\left(\frac{l}{\tau}\right)^2$, $\left(\frac{m}{\tau}\right)^2$ dieselben Funktionen von p, q, r, s sind, wie k^2, l^2, m^2 von a, b, c, d. Stellt man nun neben die Funktion $\psi(z)$ die andere:

$$\omega(z) = (z-p)(z-q)(z-r)(z-s),$$

so muß, entsprechend den Ausdrücken von k^2, l^2, m^2 durch a, b, c:

$$\frac{k^2}{\tau^2} = -\frac{(p-s)^2}{\omega'(p)\,\omega'(s)}, \quad \frac{l^2}{\tau^2} = \frac{(q-s)^2}{\omega'(q)\,\omega'(s)}$$
$$\frac{m^2}{\tau^2} = -\frac{(r-s)^2}{\omega'(r)\,\omega'(s)}$$

sein. Wir führen nun ein, entsprechend den Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ des ersten Satzes:

$$\frac{\tau\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} = \mathfrak{U}, \quad \frac{\tau\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)} = \mathfrak{V}, \quad \frac{\tau\sqrt{F(r)}}{\omega'(r)} = \mathfrak{W},$$

wo $\sqrt{F(p)} = \frac{1}{2}\phi'(u)$ ist, usf. Dann gilt die Erweiterung des ersten Satzes:

Zwischen den sieben Funktionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ bestehen dieselben linearen Beziehungen wie zwischen A, B, C, D, u, v, w. — Es ist also nicht nur $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=0$, sondern auch $\mathfrak{U}=\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$, usf.

Zum Beweise betrachten wir zunächst den Ausdruck $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$, sehen aber in ihm A, B, C, D als vier unabhängige Größen an. Er ist dann eine Funktion, die verschwindet, wenn man $A+B+C+D=0$ werden läßt. Nehmen wir nun $D=0$ an und somit $d=s$, so verschwindet das Glied $\mathfrak{D}$, und die Summe der drei übrigen Glieder ist eine Funktion von A, B, C, die für $A+B+C=0$ verschwindet.

Wir ziehen daraus den Schluß: die Funktion

$$S = \frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} + \frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(q)} + \frac{\sqrt{F(r)}}{\omega'(r)}$$

verschwindet für $u+v+w = 0$; und daraus den weiteren:

$$T = -\frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} + \frac{\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)} + \frac{\sqrt{F(r)}}{\omega'(r)}$$

verschwindet für $-u+v+w = 0$;

$$T' = \frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} - \frac{\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)} + \frac{\sqrt{F(r)}}{\omega'(r)}$$

für $u-v+w = 0$;

$$T'' = \frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} + \frac{\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)} - \frac{\sqrt{F(r)}}{\omega'(r)}$$

für $u+v-w = 0$. — Denn T geht aus S hervor, indem man u durch $-u$, ebenso T' aus S, indem man v durch $-v$, und T'', indem man w durch $-w$ ersetzt.

Nehmen wir nur w als veränderlich an, u und v als Konstanten. Das Produkt

$$TT' = \frac{F(r)}{(\omega'(r))^2} - \left(\frac{\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)} - \frac{\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)}\right)^2$$

ist offenbar eine rationale Funktion von r, die nur für $r = p$, $r = q$, $r = s$ unendlich wird, und nicht von höherer als der zweiten Ordnung. Für $r = \infty$ wird sie unendlich klein, von derselben Ordnung wie $\frac{1}{r^2}$. Wird sie als Quotient dargestellt, so ist der Grad des Zählers um zwei Einheiten niedriger als der des Nenners.

Es wird aber diese rationale Funktion TT' an den drei singulären Stellen nur von der ersten Ordnung unendlich. Für die Stelle $r = s$ ist dies offenbar, da $F(r)$ mit $\omega'(r)$ den Faktor $r-s$ gemeinsam hat. Für $w = u$ wird der Faktor T unendlich, aber nur von derselben Ordnung wie $\frac{1}{r-p}$, T' aber wird für $w = u$ nicht unendlich groß. Denn es ist

$$T' = \frac{1}{r-p}\left\{\frac{\sqrt{F(r)}}{(r-q)(r-s)} - \frac{\sqrt{F(p)}}{(p-q)(p-s)}\right\} - \frac{\sqrt{F(q)}}{\omega'(q)}.$$

Folglich wird TT' für $r = p$ nur von der ersten Ordnung unendlich; dasselbe gilt für $r = q$. Demnach ist TT' eine rationale Funktion von r, deren Nenner $(r-p)(r-q)(r-s)$ und deren Zähler in r linear ist. Es verschwindet außerdem T, also auch TT', für $w = u-v$.

Wir ziehen hieraus den Schluß, daß sich TT' darstellen läßt in der Form:

$$TT' = C\,\frac{f_1^2(w) - f_1^2(u-v)}{(r-p)(r-q)},$$

wo C einen von u und v, aber nicht von w abhängigen Faktor bedeutet. — Dieser Faktor ist

$$C = \frac{1}{(p-s)(q-s)}.$$

Denn setzt man diesen Wert ein, so fängt die Entwicklung des Ausdrucks auf der rechten Seite nach aufsteigenden Potenzen von w an mit

$$\frac{1}{(s-p)^2(s-q)^2}\quad\frac{1}{w^2}.$$

Dies ist zugleich das Anfangsglied in der Entwicklung von $\frac{F(r)}{(\omega'(r))^2}$, und der Rest in dem Ausdruck für TT' wird für $w = 0$ nicht unendlich.

In der Gleichung, die wir so erhalten:

$$TT' = \frac{f_1^2(w) - f_1^2(u-v)}{(p-r)(q-s)(q-r)(p-s)}$$

kann der Nenner durch $\tau^2(a-c)(b-d)(b-c)(a-d)$, also durch

$$-\frac{\tau^2\psi'(a)\psi'(b)}{(a-b)^2}$$

ersetzt werden. Der Zähler ist identisch mit

$$f_1^2(A+B) - f_1^2(A-B) = -\frac{4\sqrt{F(a)}\sqrt{F(b)}}{(a-b)^2}.$$

Daher ist:

$$\tau^2\,TT' = 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Ebenso ist

$$\tau^2\,TT'' = 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{C},\quad \tau^2\,T'T'' = 4\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Aus allen drei Gleichungen folgt:

$$\tau T = 2\,\delta\,\mathfrak{A},$$

wo $\delta = \pm 1$ ist. Aber δ muß $+1$ sein. Denn läßt man $D = 0$ werden, so wird $S = 0$ und $T = -\frac{2\sqrt{F(p)}}{\omega'(p)}$, da dann $u + v + w = 0$ wird. Zugleich wird $A = -u$, $B = -v$, $C = -w$, also $a = p$, $b = q$, $c = r$, aber $\sqrt{F(a)} = -\sqrt{F(p)}$; die Funktion ω wird mit ψ identisch, der Faktor τ gleich 1. Daraus folgt: $\delta = 1$.

Aus den drei Gleichungen:

$$\tau T = 2\mathfrak{A}, \quad \tau T' = 2\mathfrak{B}, \quad \tau T'' = 2\mathfrak{C}$$

folgt jetzt, da $\tau T = -\mathfrak{U}+\mathfrak{V}+\mathfrak{W}$, $\tau T' = \mathfrak{U}-\mathfrak{V}+\mathfrak{W}$, $\tau T'' = \mathfrak{U}+\mathfrak{V}-\mathfrak{W}$ ist:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B}+\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{C}+\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}.$$

Der ausgesprochene Satz ist damit bewiesen.

§ 3. Was für k_1, l_1, m_1 gilt — daß $k_1^2 - l_1^2 + m_1^2 = 0$ ist —, gilt für alle drei Wertsysteme:

$$k_\alpha = k f_\alpha(u), \quad l_\alpha = l f_\alpha(v), \quad m_\alpha = m f_\alpha(w); \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

es ist, für $\alpha = 1, 2, 3$:

$$k_\alpha^2 - l_\alpha^2 + m_\alpha^2 = 0.$$

Wir erweitern die Reihe der zu betrachtenden Größen noch um drei, indem wir einführen:

$$m'_\alpha = m f_\alpha(u - v). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Die Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ und die sechs: m_α und m'_α, sind hier definiert, teils als eindeutige, teils als mehrdeutige elliptische Funktionen von A, B, C. Wir gehen dazu über, sie aufzufassen als algebraische Funktionen von vier unabhängigen Größen. Für diese unabhängigen Größen wählen wir zunächst die Quotienten:

$$\frac{k^2}{m^2} = \rho, \quad \text{und,} \quad \text{für } \alpha = 1, 2, 3: \frac{k_\alpha^2}{m_\alpha^2} = \rho_\alpha.$$

Es ist dann zugleich:

$$\frac{l^2}{m^2} = \rho + 1, \quad \frac{l_\alpha^2}{m_\alpha^2} = \rho_\alpha + 1.$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, m_1, m'_1$ usf., die wir aufstellen wollen, enthalten einen gemeinsamen Faktor, der sich nicht durch die Größen $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ ausdrücken läßt. Dieser Faktor h darf als willkürlich und auch als unwesentlich betrachtet werden.

Wir gehen aus von den Gleichungen, die Formeln der elliptischen Theorie sind:

$$f_\alpha^2(v) - f_\alpha^2(u) = \frac{(p-q)\,F'(s)}{(p-s)(q-s)},$$

$$f_1(u) f_2(u) f_3(u) = \frac{\sqrt{F(p)}\,F'(s)}{(p-s)^2},$$

$$f_1(u-v) = \frac{f_1(u) f_2(v) f_3(v) + f_1(v) f_2(u) f_3(u)}{f_1^2(v) - f_1^2(u)}.$$

Die erste kann, da $f_\alpha(u) = \frac{k_\alpha}{k}$, $f_\alpha(v) = \frac{l_\alpha}{l}$ ist, sofort übergeführt werden in:

$$k^2 l_\alpha^2 - l^2 k_\alpha^2 = J, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

wo J den Ausdruck bedeutet:

$$J = \frac{(p-q)\,F'(s)}{(p-s)\,(q-s)}\,k^2 l^2.$$

Da

$$\frac{kl}{m} = \frac{1}{(a-b)\,(c-d)} = \frac{\tau}{(p-q)\,(r-s)}$$

ist, so läßt sich J auf die mehr symmetrische Form bringen:

$$J = -\frac{klm\tau\,F'(s)}{\omega'(s)}.$$

Aus der Gleichung $k^2 l_\alpha^2 - l^2 k_\alpha^2 = J$ folgt, da man l^2 durch $k^2 + m^2$, l_α^2 durch $k_\alpha^2 + m_\alpha^2$ ersetzen kann:

$$k^2 m_\alpha^2 - m^2 k_\alpha^2 = J,$$

und hieraus:

$$m^2 m_\alpha^2 (\rho - \rho_\alpha) = J.$$

Die zweite der drei elliptischen Gleichungen geht, wenn wir auch in dieser $f_\alpha(u)$ durch $\frac{k_\alpha}{k}$ ersetzen, über in:

$$k_1 k_2 k_3 = \frac{k^3 \sqrt{F(p)}\,F'(s)}{(p-s)^2}.$$

Da $\tau\sqrt{F(p)} = \omega'(p)\cdot\mathfrak{U}$ ist, so ergibt sich:

$$k_1 k_2 k_3 = \frac{k^3\,\omega'(p)\,F'(s)}{\tau\,(p-s)^2}\,\mathfrak{U}.$$

Ganz ebenso ist:

$$l_1 l_2 l_3 = \frac{l^3\,\omega'(q)\,F'(s)}{\tau\,(q-s)^2}\,\mathfrak{V},$$

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{m^3\,\omega'(r)\,F'(s)}{\tau\,(r-s)^2}\,\mathfrak{W}.$$

Es ist aber:

$$k^2 = -\tau^2 \frac{(p-s)^2}{\omega'(p)\,\omega'(s)},$$

$$l^2 = +\tau^2 \frac{(q-s)^2}{\omega'(q)\,\omega'(s)},$$

$$m^2 = -\tau^2 \frac{(r-s)^2}{\omega'(r)\,\omega'(s)}.$$

Demnach läßt sich die Gleichung für $k_1 k_2 k_3$ überführen in:

$$lmk_1 k_2 k_3 = -\frac{klm\tau F'(s)}{\omega'(s)}\mathfrak{U}.$$

Ebenso die für $l_1 l_2 l_3$ und für $m_1 m_2 m_3$ in:

$$kml_1 l_2 l_3 = +\frac{klm\tau F'(s)}{\omega'(s)}\mathfrak{V},$$

$$klm_1 m_2 m_3 = -\frac{klm\tau F'(s)}{\omega'(s)}\mathfrak{W}.$$

Daher ist:

$$J\mathfrak{U} = lmk_1 k_2 k_3,$$
$$-J\mathfrak{V} = kml_1 l_2 l_3,$$
$$J\mathfrak{W} = klm_1 m_2 m_3.$$

In der dritten elliptischen Formel ist der Nenner des Ausdrucks, der $f_1(u-v)$ darstellt:

$$f_1^2(v) - f_1^2(u) = \frac{J}{k^2 l^2}.$$

Der Zähler ist

$$\frac{k_1 l_2 l_3}{kl^2} + \frac{l_1 k_2 k_3}{lk^2}.$$

Folglich ist

$$Jf_1(u-v) = kk_1 l_2 l_3 + ll_1 k_2 k_3.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit m. Dann steht links: Jm_1'. Auf der rechten Seite ersetzen wir

$$lml_1 k_2 k_3 \text{ durch } \frac{l_1}{k_1} J\mathfrak{U}, \quad kmk_1 l_2 l_3 \text{ durch } -\frac{k_1}{l_1} J\mathfrak{V}.$$

Dadurch entsteht

$$m_1' = \frac{l_1}{k_1}\mathfrak{U} - \frac{k_1}{l_1}\mathfrak{V},$$

und da man die Zahlen 1, 2, 3 unbedenklich miteinander vertauschen kann:

$$m_\alpha' = \frac{l_\alpha}{k_\alpha}\mathfrak{U} - \frac{k_\alpha}{l_\alpha}\mathfrak{V}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Statt J führen wir einen andern Faktor h ein, indem wir setzen:

$$\mathfrak{W} = h\frac{kl}{m^2}.$$

Er ist offenbar mit J verbunden durch die Gleichung:

$$Jh = m^2 m_1 m_2 m_3.$$

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ aber werden jetzt:

$$\mathfrak{U} = h\frac{lk_1k_2k_3}{mm_1m_2m_3},$$

$$\mathfrak{V} = -h\frac{kl_1l_2l_3}{mm_1m_2m_3}.$$

Damit sind $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, abgesehen vom Faktor h, als algebraische Funktionen von $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ allein dargestellt. Denn es ist $\frac{k^2}{m^2} = \rho$, $\frac{l^2}{m^2} = \rho + 1$, und ebenso $\frac{k_\alpha^2}{m_\alpha^2} = \rho_\alpha$, usf. Von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ gilt dasselbe, weil $\mathfrak{U} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{C} + \mathfrak{A}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 0$ ist. Es gilt auch von m'_α, da $\frac{l_\alpha}{k_\alpha}$ durch $\sqrt{\frac{\rho_\alpha + 1}{\rho_\alpha}}$ ersetzt werden kann. Endlich auch von m_α. Aus den Gleichungen:

$$m^2 m_\alpha^2 (\rho - \rho_\alpha) = J, \quad Jh = m^2 m_1 m_2 m_3$$

folgt:

$$m_\beta m_\gamma = h m_\alpha (\rho - \rho_\alpha),$$

wo β, γ die beiden von α verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, 3$ sind. Das sind drei Gleichungen. Aus allen dreien folgt, daß man setzen kann:

$$m_\alpha = h\sqrt{\rho - \rho_\beta}\sqrt{\rho - \rho_\gamma}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Von den drei so definierten Wurzelgrößen $\sqrt{\rho - \rho_1}$, $\sqrt{\rho - \rho_2}$, $\sqrt{\rho - \rho_3}$ darf eine mit willkürlichen Vorzeichen genommen werden. Die Vorzeichen der beiden andern sind dann durch die aufgestellte Gleichung bestimmt.

Die vier Größen ρ_1, ρ_2, ρ_3 und ρ haben dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Grundpunkte a_1, a_2, a_3 und s. Denn $\rho = \frac{k^2}{m^2}$ ist durch den Quotienten gegeben:

$$\rho = \frac{(q-r)(p-s)}{(p-q)(r-s)}.$$

Es ist also ρ der Wert $\chi(s)$, den die lineare Funktion

$$\chi(z) = \frac{(q-r)(p-z)}{(p-q)(r-z)}$$

für $z = s$ annimmt. ρ_α ist:

$$\frac{k_\alpha^2}{m_\alpha^2} = \frac{f_\alpha^2(u)}{f_\alpha^2(w)} \cdot \frac{k^2}{m^2},$$

also das Produkt von:

$$\frac{f_\alpha^2(u)}{f_\alpha^2(w)} = \frac{p - a_\alpha}{p - s} \cdot \frac{r - s}{r - a_\alpha} \quad \text{mit} \quad \frac{k^2}{m^2} = \frac{(q-r)(p-s)}{(p-q)(r-s)}.$$

Somit ist:

$$\rho_\alpha = \frac{q-r}{p-q}\,\frac{p-a_\alpha}{r-a_\alpha};$$

das heißt: gleich dem Werte von $\chi(z)$ für $z = a_\alpha$. Es sind demnach $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho$ die Werte einer linearen Funktion $\chi(z)$ für $z = a_1, a_2, a_3, s$.

Es ist, da $A+B = w$, $A-B = -(u-v)$ ist:

$$f_1(w) = f_1(A+B), \quad f_1(u-v) = -f_1(A-B).$$

Da nun $mf_1(w) = m_1$, $mf_1(u-v) = m_1'$ ist, so hat man

$$m_1 = m\frac{\sqrt{a_{14}b_{23}}-\sqrt{b_{14}a_{23}}}{a-b}$$

$$-m_1' = m\frac{\sqrt{a_{14}b_{23}}+\sqrt{b_{14}a_{23}}}{a-b}$$

und da

$$m = \frac{a-b}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}} \text{ ist:}$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{a_{14}b_{23}}-\sqrt{b_{14}a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}},$$

$$-m_1' = \frac{\sqrt{a_{14}b_{23}}+\sqrt{b_{14}a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}}.$$

Wir lösen die beiden Gleichungen

$$\frac{\sqrt{a_{14}}\,q_{23}+\sqrt{a_{23}}\,q_{14}}{\sqrt{\psi'(a)}} = X_1,$$

$$\frac{\sqrt{b_{14}}\,q_{23}+\sqrt{b_{23}}\,q_{14}}{\sqrt{-\psi'(b)}} = Y_1$$

nach q_{23} und q_{14} auf. Um sie auf denselben Nenner zu bringen, dividieren wir die erste durch $\sqrt{-\psi'(b)}$, die zweite durch $\sqrt{\psi'(a)}$. Dann ergibt sich:

$$m_1 q_{23} = \frac{\sqrt{b_{23}}}{\sqrt{-\psi'(b)}}X_1 - \frac{\sqrt{a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}}Y_1,$$

$$m_1 q_{14} = -\frac{\sqrt{b_{14}}}{\sqrt{-\psi'(b)}}X_1 + \frac{\sqrt{a_{14}}}{\sqrt{\psi'(a)}}Y_1,$$

und durch Multiplikation beider:

$$m_1^2 q_{14} q_{23} = \mathfrak{B}X_1^2 - \mathfrak{A}Y_1^2 - m_1' X_1 Y_1.$$

Ersetzt man in dem rechts stehenden Ausdruck die Zahl 1 durch 2 oder 3, so erhält man: $m_2^2 q_{24} q_{31}$, $m_3^2 q_{34} q_{12}$.

Bleiben wir bei der ursprünglichen Gleichung stehen. Wir multiplizieren sie mit $2(\rho-\rho_1)$. Da $hm_1(\rho-\rho_1) = m_2 m_3$ ist, so ist $hm_1^2(\rho-\rho_1) = m_1 m_2 m_3$, und wenn wir, abkürzend:

$$2 m_1 m_2 m_3 = h\Delta$$

setzen, so ist

$$2(\rho-\rho_1) m_1^2 = \Delta.$$

Demnach haben wir die Gleichung:

$$\Delta q_{14} q_{23} = 2(\rho-\rho_1)(\mathfrak{B} X_1^2 - \mathfrak{A} S_1^2) - 2(\rho-\rho_1) m_1' X_1 S_1.$$

In dieser ist hauptsächlich das letzte Glied des Ausdrucks auf der rechten Seite umzuformen. Es ist $\rho-\rho_1 = \frac{k^2}{m^2} - \frac{k_1^2}{m_1^2}$, aber ebenso gut:

$$\rho-\rho_1 = \frac{l^2}{m_1^2} - \frac{l_1^2}{m_1^2}.$$

Daher ist:

$$(\rho-\rho_1) m_1' = \left(\frac{k^2}{m^2} - \frac{k_1^2}{m_1^2}\right)\frac{l_1 \mathfrak{U}}{k_1} - \left(\frac{l^2}{m^2} - \frac{l_1^2}{m_1^2}\right)\frac{k_1 \mathfrak{B}}{l_1}.$$

Dies gibt, wenn man den Ausdruck

$$\frac{k^2}{m^2}\,\frac{l_1}{k_1}\,\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}} - \frac{l^2}{m^2}\,\frac{k_1}{l_1}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}} = \omega_1$$

einführt:

$$(\rho-\rho_1) m_1' = \omega_1 \mathfrak{W} - \frac{k_1 l_1}{m_1^2}(\mathfrak{U}-\mathfrak{B}).$$

Es ist daher:

$$2(\rho-\rho_1) m_1' X_1 Y_1 = 2\mathfrak{W}\omega_1 X_1 Y_1 - \frac{2 k_1 l_1 X_1 Y_1}{m_1^2}(\mathfrak{U}-\mathfrak{B}).$$

X_1 und Y_1 sind mit Z_1 durch die Gleichung verbunden: $k_1 X_1 - l_1 Y_1 + m_1 Z_1 = 0$; folglich ist:

$$\frac{2 k_1 l_1 X_1 Y_1}{m_1^2} = \frac{k_1^2 X_1^2 + l_1^2 Y_1^2 - m_1^2 Z_1^2}{m_1^2} = \rho_1 X_1^2 + (\rho_1 + 1) Y_1^2 - Z_1^2.$$

Außerdem ist $-(\mathfrak{U}-\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}-\mathfrak{B}$. Der Ausdruck für $\Delta q_{14} q_{23}$ kann daher durch folgenden ersetzt werden:

$$2(\rho-\rho_1)(\mathfrak{B} X_1^2 - \mathfrak{A} Y_1^2) - 2\mathfrak{W}\omega_1 X_1 Y_1 - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})(\rho_1 X_1^2 + (\rho_1+1) Y_1^2 - Z_1^2).$$

Wir können in ihm drei Teile unterscheiden. Der eine, $-2\mathfrak{W}\omega_1 X_1 Y_1$, enthält den Faktor ω_1; ein zweiter

$$2\rho_1(\mathfrak{A} Y_1^2 - \mathfrak{B} X_1^2) - \rho_1(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})(X_1^2 + Y_1^2)$$

hat den Faktor ρ_1; der dritte ist:

$$2\rho(\mathfrak{B} X_1^2 - \mathfrak{A} Y_1^2) - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})(Y_1^2 - Z_1^2).$$

Der zweite Teil ist offenbar:

$$\rho_1(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(Y_1^2-X_1^2) = \rho_1\mathfrak{W}(Y_1^2-X_1^2).$$

Der dritte Teil möge mit S_1 bezeichnet werden. Dann besteht die Gleichung:

$$\Delta q_{14}q_{23} = \mathfrak{W}\{\rho_1(Y_1^2-X_1^2) - 2\,\omega_1 X_1 Y_1\} + S_1.$$

$\Delta q_{24}q_{31}$ entsteht hieraus, indem man überall 1 durch 2, und $\Delta q_{34}q_{12}$, indem man 1 durch 3 ersetzt.

Jetzt hören wir auf, die Größen q als unabhängige zu betrachten; wir nehmen sie an als untereinander verknüpft durch die Gleichungen

$$\sum_1^3 X_\alpha^2 = 0, \quad \sum_1^3 Y_\alpha^2 = 0, \quad \sum_1^3 Z_\alpha^2 = 0$$

und die nicht homogene:

$$q_{14}q_{23}+q_{24}q_{31}+q_{34}q_{12} = D_0.$$

Dann ist, den drei homogenen zufolge, auch $\sum_1^3 S_\alpha$ gleich 0; die nicht homogene nimmt daher, als Gleichung zwischen den sechs Größen X_α, Y_α, die Form an:

$$\sum_1^3 \left(\rho_\alpha(X_\alpha^2-Y_\alpha^2)+2\,\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha\right) = \text{Konst.}$$

Da $\sum X_\alpha^2 = 0$, $\sum Y_\alpha^2 = 0$ ist, dürfen wir ρ_α durch $\rho_\alpha+\frac{1}{2}$ ersetzen und die nicht homogene Gleichung so schreiben:

$$\sum_1^3 \left((2\rho_\alpha+1)(X_\alpha^2-Y_\alpha^2)+4\,\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha\right) = \text{Konst.}$$

ω_α ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\omega_\alpha = \frac{k^2}{m^2}\frac{l_\alpha}{k_\alpha}\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}} - \frac{l^2}{m^2}\frac{k_\alpha}{l_\alpha}\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}}\cdot(\alpha = 1, 2, 3).$$

Wir bilden die Summe zweier dieser drei Größen ω. Dabei ergibt sich:

$$\omega_\alpha+\omega_\beta = (k_\alpha l_\beta + k_\beta l_\alpha)\left(\frac{k^2\mathfrak{U}}{m^2 k_\alpha k_\beta \mathfrak{W}} - \frac{l^2\mathfrak{B}}{m^2 l_\alpha l_\beta \mathfrak{W}}\right),$$

und da

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}} = \frac{m k_1 k_2 k_3}{k m_1 m_2 m_3}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}} = -\frac{m l_1 l_2 l_3}{l m_1 m_2 m_3}$$

ist, so folgt:

$$\omega_\alpha+\omega_\beta = \frac{k_\alpha l_\beta + k_\beta l_\alpha}{m_\alpha m_\beta}\cdot\frac{k k_\gamma + l l_\gamma}{m m_\gamma},$$

wo γ die von α, β verschiedene Zahl der Reihe 1, 2, 3 ist. Der Ausdruck zerfällt also in zwei Faktoren, deren einer von ρ_α und ρ_β, der andere von ρ und ρ_γ abhängt.

§ 4. Die Gleichungen zwischen den Komponenten q sind ersetzt worden durch die, die zwischen den sechs Größen X_α, Y_α bestehen. Zwei davon sind sehr einfach: $\sum_1^3 X_\alpha^2 = 0$ und $\sum_1^3 Y_\alpha^2 = 0$. Die dritte homogene ist weniger einfach; sie lautet: $\sum_1^3 Z_\alpha^2 = 0$, aber Z_α bedeutet den linearen Ausdruck $\frac{l_\alpha}{m_\alpha} Y_\alpha - \frac{k_\alpha}{m_\alpha} X_\alpha$, oder: $\sqrt{\rho_\alpha + 1}\, Y_\alpha - \sqrt{\rho_\alpha}\, X_\alpha$. In den homogenen Gleichungen kommen daher von den vier wesentlichen Parametern $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho$ nur die drei ersten vor; der letzte, ρ, tritt nur in der nicht homogenen auf. Es ist leichter, eine Auflösung aller vier Gleichungen in der richtigen Form zu finden, wenn man statt der Größen X_α, Y_α ihre Summen und Differenzen einführt:

$$X_\alpha + Y_\alpha = S_\alpha, \quad X_\alpha - Y_\alpha = D_\alpha\,[1].$$

Dann ist

$$2X_\alpha = S_\alpha + D_\alpha,$$
$$2Y_\alpha = S_\alpha - D_\alpha,$$
$$2Z_\alpha = \frac{l_\alpha - k_\alpha}{m_\alpha} S_\alpha - \frac{l_\alpha + k_\alpha}{m_\alpha} D_\alpha.$$

Wir führen nun statt der Parameter $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho$ vier andere Größen c_1, c_2, c_3 und ξ ein, indem wir setzen:

$$\frac{l - k}{m} = \sqrt{\xi},$$

und, für $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\frac{l_\alpha - k_\alpha}{m_\alpha} = \sqrt{c_\alpha}.$$

Es ist dann zugleich, wegen der Gleichungen $l^2 - k^2 = m^2$, $l_\alpha^2 - k_\alpha^2 = m_\alpha^2$:

$$\frac{l + k}{m} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad \frac{l_\alpha + k_\alpha}{m_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}},$$

und:

$$\frac{l}{m} = \frac{1 + \xi}{2\sqrt{\xi}}, \quad \frac{k}{m} = \frac{1 - \xi}{2\sqrt{\xi}};$$
$$\frac{l_\alpha}{m_\alpha} = \frac{1 + c_\alpha}{2\sqrt{c_\alpha}}, \quad \frac{k_\alpha}{m_\alpha} = \frac{1 - c_\alpha}{2\sqrt{c_\alpha}}.$$

---

[1] Vgl. F. Kötter, Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. J. f. Math. Bd. 109, S. 66.

ρ und ρ_α sind $\left(\frac{k}{m}\right)^2$ und $\left(\frac{k_\alpha}{m_\alpha}\right)^2$. Es ist also:

$$4\rho = \xi + \frac{1}{\xi} - 2, \quad 4\rho_\alpha = c_\alpha + \frac{1}{c_\alpha} - 2,$$

$$4(\rho - \rho_\alpha) = \frac{(\xi - c_\alpha)(c_\alpha \xi - 1)}{c_\alpha \xi}.$$

$2Z_\alpha$ ist jetzt:

$$\sqrt{c_\alpha}\, S_\alpha - \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} D_\alpha.$$

Wir fügen den drei unabhängigen Größen c_1, c_2, c_3 eine von ihnen abhängige vierte hinzu, indem wir setzen:

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}\sqrt{c_3} = \sqrt{c_4}.$$

Dann ist:

$$2\, Z_\alpha \sqrt{c_\delta} = \sqrt{c_\alpha c_\delta}\, S_\alpha - \sqrt{c_\beta c_\gamma}\, D_\alpha,$$

wo nun wieder δ die Zahl 4 bedeutet und α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3 sind.

Die Gleichungen $\sum X_\alpha^2 = 0$, $\sum Y_\alpha^2 = 0$, $\sum Z_\alpha^2 = 0$ gehen dadurch über in:

$$\sum (S_\alpha + D_\alpha)^2 = 0, \quad \sum (S_\alpha - D_\alpha)^2 = 0, \quad \sum (\sqrt{c_\alpha c_\delta}\, S_\alpha - \sqrt{c_\beta c_\gamma}\, D_\alpha)^2 = 0;$$

sie können ersetzt werden durch die drei andern:

$$\sum (S_\alpha^2 + D_\alpha^2) = 0, \quad \sum S_\alpha D_\alpha = 0, \quad \sum (c_\alpha c_\delta S_\alpha^2 + c_\beta c_\gamma D_\alpha^2) = 0.$$

Die erste und die dritte wollen wir zusammenfassen, indem wir eine willkürliche Größe z einführen und schreiben:

$$\sum (z_{\alpha\delta} S_\alpha^2 + z_{\beta\gamma} D_\alpha^2) = z F^2,$$

wo jetzt $z_{\alpha\delta}$ und $z_{\beta\gamma}$ die Bedeutung haben:

$$z_{\alpha\delta} = (z - c_\alpha)(z - c_\delta), \quad z_{\beta\gamma} = (z - c_\beta)(z - c_\gamma),$$

und wo F^2 von z unabhängig ist.

Das Produkt der vier Linienfaktoren $z - c_\alpha$ werde mit $G(z)$ bezeichnet:

$$G(z) = \prod_{\alpha=1}^{4} (z - c_\alpha).$$

Das Problem, die drei Gleichungen aufzulösen und die Verhältnisse der Größen S_α, D_α zu F als algebraische Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen x, y auszudrücken, ist seit ROSENHAIN oft behandelt worden; wir wollen hier die Lösung nehmen, die auf einer Interpolationsformel beruht. Von der unsymmetrischen Gleichung $c_4 = c_1 c_2 c_3$ sehen wir dabei ab; c_1, c_2, c_3, c_4 können vier willkürliche Werte sein.

Die ganze symmetrische Funktion $s(x, z)$, die in x und in z nur vom zweiten Grade ist, hat sechs Koeffizienten, und sie läßt sich linear aus den sechs speziellen Funktionen

$$(x-c_\alpha)(z-c_\alpha)(x-c_\beta)(z-c_\beta) = x_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}$$

zusammensetzen; wobei c_α, c_β je zwei der vier Punkte c_1, c_2, c_3, c_4 bedeuten. Ein Glied dieser Summe ist also: $C_{34} x_{34} z_{34}$. Der Faktor C_{34} bestimmt sich, indem man $x = c_1$, $z = c_2$ setzt. Dann verschwinden alle Glieder mit Ausnahme des hingeschriebenen; es ist also:

$$s(c_1, c_2) = C_{34}(c_1-c_3)(c_1-c_4)(c_2-c_3)(c_2-c_4).$$

Wir setzen:

$$(c_1-c_3)(c_1-c_4)(c_2-c_3)(c_2-c_4) = \frac{1}{k_{12}}$$

und lassen dies gelten bei jeder Vertauschung der vier Zahlen. Es ist dann $k_{12} = k_{34}$, $k_{13} = k_{24}$, $k_{23} = k_{14}$ und:

$$s(x, z) = \sum k_{12}\, s(c_1, c_2)\, x_{34} z_{34}.$$

Der Ausdruck ist ganz symmetrisch; die fünf andern Glieder gehen aus dem hingeschriebenen hervor durch Vertauschung der Punkte c_1, c_2, c_3, c_4.

Für $s(x, z)$ kann man die Funktion $(x-y)(z-y)$ nehmen, obwohl diese nur linear ist in bezug auf x und z. So kommt man zu der identischen Gleichung:

$$(x-y)(z-y) = \sum k_{12}\, y_{12}\, x_{34} z_{34}$$

und durch Vertauschung von x mit y zu der andern:

$$(y-x)(z-x) = \sum k_{12}\, x_{12}\, y_{34} z_{34}.$$

Wir addieren beide und erhalten so:

$$(x-y)^2 = \sum k_{12}(x_{12} y_{34} + y_{12} x_{34}) z_{34}.$$

Wenn man aber die erste mit x, die zweite mit y multipliziert und dann beide addiert, so ergibt sich:

$$(x-y)^2 z = \sum k_{12}(x_{12}\, y y_{34} + y_{12}\, x x_{34}) z_{34}.$$

Für $x = y$ liefert die eine Gleichung ebenso wie die andere:

$$0 = \sum k_{12} z_{34}.$$

Jetzt definieren wir

$$\frac{\sqrt{x_{12}\, y y_{34}} + \sqrt{y_{12}\, x x_{34}}}{x-y} = H_{12}$$

und lassen dies gelten bei jeder Vertauschung der vier Zahlen. Dann folgt aus dem Ausdruck für $(x-y)^2 z$ und der Gleichung $\sum k_{12} z_{34} = 0$:

$$z = \sum k_{12} z_{34} H_{12}^2 .$$

Ferner folgt, da

$$H_{12} H_{34} = \frac{(x+y)\sqrt{G(x)}\sqrt{G(y)} + \sqrt{xy}(x_{12} y_{34} + y_{12} x_{34})}{(x-y)^2}$$

ist, aus der Gleichung für $(x-y)^2$ und der zugehörigen $\sum k_{12} z_{34} = 0$:

$$\sqrt{xy} = \sum k_{12} z_{34} H_{12} H_{34} .$$

Beide Summen, sowohl die, die z, als auch die andre, die $\sqrt{xy}$ darstellt, sind sechsgliedrig. Wir machen sie zu dreigliedrigen, indem wir die Glieder, die mit demselben Koeffizienten k behaftet sind, zusammenfassen. Dadurch entsteht:

$$z = \sum k_{34} (z_{34} H_{12}^2 + z_{12} H_{34}^2) ,$$

$$\sqrt{xy} = \sum k_{34} (z_{34} + z_{12}) H_{12} H_{34} .$$

Der zweite dieser Ausdrücke ist von z unabhängig. Also muß der Teil von ihr, der mit z^2 multipliziert ist, gleich 0 sein. Dies gibt:

$$\sum k_{34} H_{12} H_{34} = 0 .$$

Die Gleichung muß auch für $z = 0$ gelten. Daher ist:

$$\sqrt{xy} = \sum k_{34} (c_1 c_2 + c_3 c_4) H_{12} H_{34} .$$

Wir können den Gleichungen, die hier abgeleitet sind, die Form geben:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} k_{\alpha\delta} (z_{\alpha\delta} H_{\beta\gamma}^2 + z_{\beta\gamma} H_{\alpha\delta}^2) = z ,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} k_{\alpha\delta} H_{\alpha\delta} H_{\beta\gamma} = 0 .$$

Vergleicht man damit die früheren:

$$\sum (z_{\alpha\delta} S_\alpha^2 + z_{\beta\gamma} D_\alpha^2) = z F^2 ,$$

$$\sum S_\alpha D_\alpha = 0 ,$$

so sieht man, daß diese erfüllt sind, wenn

$$S_\alpha = \sqrt{k_{\alpha\delta}} H_{\beta\gamma} F ,$$

$$D_\alpha = \sqrt{k_{\alpha\delta}} H_{\alpha\delta} F$$

gesetzt wird; die drei Wurzelgrößen $\sqrt{k_{14}}, \sqrt{k_{24}}, \sqrt{k_{34}}$ können beliebige Vorzeichen haben.

Es besteht aber auch die Gleichung:

$$\sum_{1}^{3} k_{\alpha\delta}(c_\alpha c_\delta + c_\beta c_\gamma) H_{\alpha\delta} H_{\beta\gamma} = \sqrt{xy}\,.$$

Folglich ist:

$$\sum_{1}^{3} (c_\alpha c_\delta + c_\beta c_\gamma) S_\alpha D_\alpha = F^2 \sqrt{xy}\,.$$

$S_\alpha D_\alpha$ ist $X_\alpha^2 - Y_\alpha^2$. $c_\alpha c_\delta + c_\beta c_\gamma$ ist, wenn wir jetzt die Gleichung $c_\delta = c_\alpha c_\beta c_\gamma$ benutzen, gleich $c_\delta\left(c_\alpha + \frac{1}{c_\alpha}\right)$, also gleich $2c_\delta(2\rho_\alpha + 1)$. Demnach ist:

$$2c_\delta \sum_{1}^{3} (2\rho_\alpha + 1)(X_\alpha^2 - Y_\alpha^2) = F^2 \sqrt{xy}\,.$$

Es bleibt noch übrig, den Wert von $\sum 4\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha$ in ähnlicher Weise auszudrücken. $4X_\alpha Y_\alpha$ ist $S_\alpha^2 - D_\alpha^2$, und dies ist: $F^2 k_{\alpha\delta}(H_{\beta\gamma}^2 - H_{\alpha\delta}^2)$. Da

$$H_{\beta\gamma} = \frac{\sqrt{x_{\beta\gamma}\, y\, y_{\alpha\delta}} + \sqrt{y_{\beta\gamma}\, x\, x_{\alpha\delta}}}{x-y}\,,$$

$$H_{\alpha\delta} = \frac{\sqrt{x_{\alpha\delta}\, y\, y_{\beta\gamma}} + \sqrt{y_{\alpha\delta}\, x\, x_{\beta\gamma}}}{x-y}$$

ist, so ist:

$$H_{\beta\gamma}^2 - H_{\alpha\delta}^2 = \frac{x_{\alpha\delta}\, y_{\beta\gamma} - y_{\alpha\delta}\, x_{\beta\gamma}}{x-y}\,.$$

Somit ist:

$$\sum_{1}^{3} 4\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha = F^2 L(x, y)\,,$$

wo $L(x, y)$ die Funktion bedeutet:

$$L(x, y) = \sum_{1}^{3} \left(k_{\alpha\delta}\, \omega_\alpha \frac{x_{\alpha\delta}\, y_{\beta\gamma} - y_{\alpha\delta}\, x_{\beta\gamma}}{x-y} \right).$$

Dies ist offenbar eine ganze symmetrische Funktion, die in x und in y nur vom ersten Grade ist; sie hat die Form $A + B(x+y) + Cxy$. Die drei Glieder der Summe sind

$$k_{14}\,\omega_1 \frac{x_{14}\, y_{23} - y_{14}\, x_{23}}{x-y}\,,$$

$$k_{24}\,\omega_2 \frac{x_{24}\, y_{13} - y_{24}\, x_{13}}{x-y}\,,$$

$$k_{34}\,\omega_3 \frac{x_{34}\, y_{12} - y_{34}\, x_{12}}{x-y}\,.$$

Setzt man $x = c_1$, $y = c_2$, so wird das erste Glied:

$$k_{14}\,\omega_1 (c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)\,.$$

Es ist aber:

$$k_{14} = \frac{1}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)(c_3 - c_4)} .$$

Folglich wird das erste Glied:

$$\frac{\omega_1}{c_3 - c_4} .$$

Ebenso wird das zweite:

$$\frac{\omega_2}{c_2 - c_4} .$$

Das dritte wird offenbar 0. Daher ist

$$L(c_1, c_2) = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{c_3 - c_4} ,$$

$\omega_1 + \omega_2$ besteht aus den beiden Faktoren:

$$\frac{k_1 l_2 + k_2 l_1}{m_1 m_2} \text{ und } \frac{k k_3 + l l_3}{m m_3} .$$

Wenn man die Größen c_1, c_2, c_3 und ξ einführt, so wird der erste Faktor:

$$\frac{(1 - c_1)(1 + c_2) + (1 - c_2)(1 + c_1)}{4 \sqrt{c_1} \sqrt{c_2}} ,$$

der zweite:

$$\frac{(1 - \xi)(1 - c_3) + (1 + \xi)(1 + c_3)}{4 \sqrt{\xi} \sqrt{c_3}} .$$

Die konstante Größe

$$\sqrt{\xi} \sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \sqrt{c_3}$$

werde mit $\varkappa$ bezeichnet. Dann ist offenbar:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{(1 - c_1 c_2)(1 + c_3 \xi)}{4 \varkappa} .$$

Dies läßt sich umformen, da $c_1 c_2 c_3 = c_4$ ist, in:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{(c_3 - c_4)(c_4 \xi + c_1 c_2)}{4 \varkappa c_4} .$$

Demnach ist:

$$L(c_1, c_2) = \frac{\varkappa^2 + c_1 c_2}{4 \varkappa c_4}$$

Die Funktion $L(x, y)$ stimmt also für $x = c_1, y = c_2$ mit

$$\frac{\varkappa^2 + x y}{4 \varkappa c_4}$$

überein, und da man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauschen kann, so ist $L(x, y)$ einfach diese Funktion. Es ist daher:

$$\sum 4\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha = F^2 \cdot \frac{\varkappa^2 + xy}{4\varkappa c_4}.$$

Außerdem ist:

$$\sum (2\rho_\alpha + 1)(X_\alpha^2 - Y_\alpha^2) = \frac{F^2\sqrt{xy}}{2c_4},$$

folglich:

$$\sum \left((2\rho_\alpha + 1)(X_\alpha^2 - Y_\alpha^2) + 4\omega_\alpha X_\alpha Y_\alpha\right) = \frac{F^2(\sqrt{xy} + \varkappa)^2}{4\varkappa c_4}.$$

Dieser Summenausdruck ist aber nach der vierten, der nicht homogenen Gleichung zwischen den Größen X_α, Y_α, konstant. Es unterscheidet sich daher F von dem reziproken Werte der Funktion $\sqrt{xy} + \varkappa$ nur um einen konstanten Faktor. Dieser Faktor ist ganz unwesentlich; wir setzen ihn gleich 1, so daß

$$F = \frac{1}{\sqrt{xy} + \varkappa}$$

und:

$$S_\alpha = \frac{\sqrt{k_{\alpha\delta}}\, H_{\beta\gamma}}{\sqrt{xy} + \varkappa}$$

$$D_\alpha = \frac{\sqrt{k_{\alpha\delta}}\, H_{\alpha\delta}}{\sqrt{xy} + \varkappa}$$

ist. Statt der sechs Ausdrücke H führen wir jetzt die Quotienten ein:

$$\frac{H_{\beta\gamma}}{\sqrt{xy} + \varkappa} = E_{\beta\gamma}, \quad \frac{H_{\alpha\delta}}{\sqrt{xy} + \varkappa} = E_{\alpha\delta},$$

so daß

$$E_{12} = \frac{\sqrt{x_{12}\, y\, y_{34}} + \sqrt{y_{12}\, x\, x_{34}}}{(x-y)(\sqrt{xy} + \varkappa)}$$

ist, während die fünf übrigen Funktionen $E_{13} \cdots E_{34}$ hieraus durch Vertauschung der vier Zahlen hervorgehen. S_α und D_α sind:

$$S_\alpha = \sqrt{k_{\alpha\delta}}\, E_{\beta\gamma}, \quad D_\alpha = \sqrt{k_{\alpha\delta}}\, E_{\alpha\delta},$$

sie unterscheiden sich also nur wenig von den Größen E.

Jetzt wollen wir die Komponenten q durch die sechs E-Funktionen ausdrücken und, soweit es angeht, durch die vier wesentlichen Parameter ξ_1, c_1, c_2, c_3, die Moduln des Problems.

Im vorigen § hatten wir die Gleichungen aufgestellt:

$$m_1 = \frac{\sqrt{a_{14} b_{23}} - \sqrt{b_{14} a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}},$$

$$-m_1' = \frac{\sqrt{a_{14} b_{23}} + \sqrt{b_{14} a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}},$$

$$m_1 q_{23} = \frac{\sqrt{b_{23}}}{\sqrt{-\psi'(b)}} X_1 - \frac{\sqrt{a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}} Y_1,$$

$$m_1 q_{14} = -\frac{\sqrt{b_{14}}}{\sqrt{-\psi'(b)}} X_1 + \frac{\sqrt{a_{14}}}{\sqrt{\psi'(a)}} Y_1.$$

Wir schließen daraus:

$$m_1 - m_1' = \frac{2\sqrt{a_{14} b_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}},$$

$$-(m_1 + m_1') = \frac{2\sqrt{b_{14} a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}\sqrt{-\psi'(b)}},$$

$$2 m_1 q_{23} \frac{\sqrt{a_{14}}}{\sqrt{\psi'(a)}} = (m_1 - m_1') X_1 - 2\mathfrak{A} Y_1,$$

$$2 m_1 q_{14} \frac{\sqrt{a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}} = (m_1 + m_1') X_1 + 2\mathfrak{A} Y_1.$$

Statt X_1 und Y_1 führen wir S_1 und D_1 ein. Es ist $2X_1 = S_1 + D$ $2Y_1 = S_1 - D_1$. Also ist:

$$4 m_1 q_{23} \frac{\sqrt{a_{14}}}{\sqrt{\psi'(a)}} = (m_1 - m_1' - 2\mathfrak{A}) S_1 + (m_1 - m_1' + 2\mathfrak{A}) D_1$$

$$4 m_1 q_{14} \frac{\sqrt{a_{23}}}{\sqrt{\psi'(a)}} = (m_1 + m_1' + 2\mathfrak{A}) S_1 + (m_1 + m_1' - 2\mathfrak{A}) D_1.$$

S_1 ist $\sqrt{k_{14}}\, E_{23}$ und D_1 gleich $\sqrt{k_{14}}\, E_{14}$. Daraus folgt, daß, bis auf konstante Faktoren,

q_{14} mit $E_{14} + p_1 E_{23}$,

q_{23} mit $E_{14} + p_1' E_{23}$

übereinstimmt, wobei p_1, p_1' durch die Quotienten gegeben sind:

$$p_1 = \frac{m_1' + 2\mathfrak{A} + m_1}{m_1' - 2\mathfrak{A} + m_1},$$

$$p_1' = \frac{m_1' + 2\mathfrak{A} - m_1}{m_1' - 2\mathfrak{A} - m_1}.$$

Die beiden Ausdrücke lassen sich, verschiedentlich, durch andre ersetzen. Wir wollen hier nur eine Umformung angeben. Aus den beiden Ausdrücken für $m_1 - m_1'$ und $-(m_1 + m_1')$ folgt durch Multiplikation:

$$m_1^2 - (m_1')^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Daraus folgt, wenn man Zähler und Nenner von p_1 mit $m_1 + 2\mathfrak{A} - m_1'$ multipliziert:

$$p_1 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + m_1}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A} + m_1'}$$

und da $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{W}$, $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{U} - \mathfrak{V}$ ist:

$$p_1 = \frac{\mathfrak{W} + m_1}{\mathfrak{U} - \mathfrak{V} + m_1'}.$$

p_1' aber entsteht aus p_1 durch Vertauschung von m_1 mit $-m_1$; es ist:

$$p_1' = \frac{\mathfrak{W} - m_1}{\mathfrak{U} - \mathfrak{V} + m_1'}.$$

Wir führen ein:

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{V} + m_1' = r_1,$$
$$\mathfrak{U} - \mathfrak{V} - m_1' = s_1$$

und die entsprechenden Größen: r_2, s_2; r_3, s_3. Da $m_1^2 - (m_1')^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $4\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aber $= \mathfrak{W}^2 - (\mathfrak{U} - \mathfrak{V})^2$ ist, so ist $\mathfrak{W}^2 - m_1^2 = (\mathfrak{U} - \mathfrak{V})^2 - (m_1')^2$, also:

$$\mathfrak{W}^2 - m_1^2 = r_1 s_1.$$

Daher ist:

$$p_1 = \frac{\mathfrak{W} + m_1}{r_1}, \quad p_1' = \frac{\mathfrak{W} - m_1}{r_1},$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{\mathfrak{W} - m_1}{s_1}, \quad \frac{1}{p_1'} = \frac{\mathfrak{W} + m_1}{s_1}.$$

Um die Größen r_α und s_α durch die vier Moduln auszudrücken, gehen wir davon aus, daß

$$m_1' = \frac{l_1}{k_1}\mathfrak{U} - \frac{k_1}{l_1}\mathfrak{V}$$

ist. Daraus folgt:

$$r_1 = (l_1 + k_1)\left(\frac{\mathfrak{U}}{k_1} - \frac{\mathfrak{V}}{l_1}\right),$$

$$s_1 = (l_1 - k_1)\left(-\frac{\mathfrak{U}}{k_1} - \frac{\mathfrak{V}}{l_1}\right).$$

Es ist aber:

$$\mathfrak{U} = \quad h\frac{l k_1 k_2 k_3}{m m_1 m_2 m_3},$$

$$\mathfrak{V} = -h\frac{k l_1 l_2 l_3}{m m_1 m_2 m_3};$$

ferner:

$$\frac{l_1+k_1}{m_1} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad \frac{l_1-k_1}{m_1} = \sqrt{c_1}.$$

Dadurch geht r_1 und s_1 zunächst über in:

$$r_1 = \frac{h}{\sqrt{c_1}} \frac{l k_2 k_3 + k l_2 l_3}{m m_2 m_3}$$

$$s_1 = h\sqrt{c_1} \frac{-l k_2 k_3 + k l_2 l_3}{m m_2 m_3}.$$

Es ist aber:

$$\frac{l k_2 k_3}{m m_2 m_3} = \frac{(1+\xi)(1-c_2)(1-c_3)}{8\sqrt{\xi}\sqrt{c_2}\sqrt{c_3}},$$

$$\frac{k l_2 l_3}{m m_2 m_3} = \frac{(1-\xi)(1+c_2)(1+c_3)}{8\sqrt{\xi}\sqrt{c_2}\sqrt{c_3}},$$

und so bekommt man schließlich, indem man die Größe $\varkappa = \sqrt{\xi}\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}\sqrt{c_3}$ einführt:

$$4\varkappa r_1 = h\big(1 + c_2 c_3 - \xi(c_2+c_3)\big),$$

$$4\varkappa s_1 = h c_1\big(c_2 + c_3 - \xi(1+c_2 c_3)\big).$$

Die Größe $\mathfrak{W}$ ist $h\dfrac{kl}{m^2}$, also:

$$4\mathfrak{W} = h\frac{1-\xi^2}{\xi}.$$

m_1 ist $h\sqrt{\rho-\rho_2}\sqrt{\rho-\rho_3}$. Der Faktor h fällt also bei den Quotienten p_α, p'_α weg.

Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen.

Von Prof. Dr. G. Szegö
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 3. Juni 1926 [s. oben S. 169].)

Zahlreiche spezielle Polynomklassen lassen sich durch geeignete Orthogonalisierungsprozesse definieren. Dies gilt insbesondere für die von Stieltjes in seinen Untersuchungen über Kettenbrüche eingeführten Polynome, für die sog. Kettenbruchnenner. Sie bilden *auf der reellen Achse* $-\infty < x < \infty$ ein belegt orthogonales System, wobei als Belegungsfunktion eine beliebige positive Funktion (mit gewissen Integrabilitätseigenschaften) verwendet werden kann[1].

Vor einiger Zeit habe ich versucht, gewisse Analoga zu den Stieltjesschen Polynomen zu definieren, welche *auf dem Einheitskreise* $z = e^{i\vartheta}$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$, belegt orthogonal sind[2]. Wenn $f(\vartheta)$ eine vorgegebene Belegungsfunktion, d. h. eine positive, etwa im Riemannschen Sinne integrable Funktion ist, so wird nach einem System von Polynomen

$$\phi_0(z), \quad \phi_1(z), \quad \phi_2(z), \cdots, \quad \phi_n(z), \cdots$$

gefragt, wobei $\phi_n(z)$ genau vom n-ten Grade ist, das die Bedingungen

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,\phi_m(z)\,\overline{\phi_n(z)}\,d\vartheta = 0 \qquad (z = e^{i\vartheta};\ m \gtrless n;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

erfüllt. Bekanntlich sind die Polynome $\phi_n(z)$ durch diese Bedingungen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Die Festlegung dieser Konstante geschieht am besten durch die Normierung

$$(1') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,|\,\phi_n(z)\,|^2\,d\vartheta = 1 \qquad (z = e^{i\vartheta};\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

ferner durch die Forderung, daß der Koeffizient von z^n in $\phi_n(z)$ reell und positiv sei.

---

[1] Vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1913. S. 379. — In der Stieltjesschen Theorie betrachtet man zweckmäßigerweise sog. Stieltjessche Integrale.

[2] G. Szegö, Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, I, II. Mathematische Zeitschrift, Bd. 6 (1920), S. 167—202; Bd. 9 (1921), S. 167—190. Vgl. insbesondere den II. Teil, der im folgenden mit T. zitiert wird.

Die auf diese Weise $f(\theta)$ eindeutig zugeordneten Polynome $\phi_n(z)$ besitzen verschiedene interessante Eigenschaften, die ich a. a. O. eingehend untersucht habe. Eine nähere Charakterisierung derselben ist mir jedoch seinerzeit nur in den folgenden einfachen Fällen gelungen[1]:

1. $f(\theta)$ ist ein positives trigonometrisches Polynom erster Ordnung;
2. $f(\theta)$ ist der reziproke Wert eines positiven trigonometrischen Polynoms k-ter Ordnung[2].

In der vorliegenden Note soll eine weitere, bedeutend interessantere Belegungsfunktion erledigt werden, nämlich

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \cos n\theta, \tag{2}$$

wobei q eine Konstante, $0 < q < 1$, ist. Es handelt sich also um eine elliptische Thetafunktion. Es ergibt sich das Resultat, daß die zugehörigen Polynome $\phi_n(z)$ in einfachster Beziehung zu den Polynomen

$$G_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} \xi^\nu \tag{3}$$

stehen, wo die Koeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ die sogenannten Gaussschen Ausdrücke sind[3]:

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-\nu+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)} \qquad (\nu > 0), \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1. \tag{5}$$

Wir erhalten somit einen neuen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den Gaussschen Ausdrücken und den elliptischen Thetafunktionen. Die allgemeine Theorie der orthogonalen Polynome $\phi_n(z)$ liefert in diesem Spezialfalle einige Sätze über die Ausdrücke $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$, bzw. über die Polynome $G_n(\xi)$, die vielleicht nicht ohne Interesse sind.

Die Polynome $G_n(\xi)$ hängen offensichtlich mit den Ausdrücken

$$A_n(\cos\theta) = 2\cos n\theta + 2\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\cos(n-2)\theta + 2\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}\cos(n-4)\theta + \cdots$$[4]

---

[1] Vgl. T., S. 186—188.

[2] In diesem Falle allerdings nur für $n \geq k$.

[3] Gauss, Summatio quarundam serierum singularium, Werke, Bd. 2, S. 16. Vgl. ferner Werke, Bd. 3, S. 461—469. — Bei Gauss findet sich für den Wert von $G_n(\xi)$ an der Stelle $\xi = q^{\frac{1}{2}}$ die Darstellung

$$G_n\left(q^{\frac{1}{2}}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + q^{\frac{\nu}{2}}\right).$$

[4] Bei geradem n ist das letzte Glied mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu versehen.

zusammen, die in den formalen Untersuchungen von L. J. ROGERS mehrmals eine Rolle spielen[1]. Seinen Ausgangspunkt bildet dabei eine leicht beweisbare Formel, welche auf die $G_n(\xi)$ umgeschrieben folgendermaßen lautet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\xi)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} x^n$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n x)(1-q^n \xi x)},^{2}$$

ferner eine andere[3], die eine Verallgemeinerung unserer Formel (25) ist. Dagegen scheinen die »endlichen« Identitäten unseres § 2 bei ROGERS nicht vorzukommen.

In § 1 berechne ich die zu der Funktion (2) gehörigen Polynome $\phi_n(z)$. Es ergibt sich

$$(6)\quad \phi_0(z) = 1\,; \quad \phi_n(z) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}} G_n\left(-q^{-\frac{1}{2}}z\right)$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots).^{4}$$

§ 2 enthält gewisse Eigenschaften von $G_n(\xi)$, welche man durch Anwendung der in T. dargelegten Theorie der orthogonalen Polynome $\phi_n(z)$ unmittelbar gewinnen kann.

---

[1] On a three-fold symmetry in the elements of Heine's series, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 24 (1893), S. 171—179; On the expansion of some infinite products, ebenda Bd. 24 (1893), S. 337—352; Second memoir on the expansion of certain infinite products, ebenda Bd. 25 (1894), S. 318—343; Third memoir on the expansion of certain infinite products, ebenda Bd. 26 (1895), S. 15—32. — Die in der zweiten Abhandlung auf S. 344 erwähnte Rekursionsformel der trigonometrischen Polynome $A_n(\cos\vartheta)$ liefert für die Polynone $G_n(\xi)$ die folgende, auch direkt leicht beweisbare Beziehung:

$$G_{n+1}(\xi) = (1+\xi)\,G_n(\xi) - (1-q^n)\,\xi\,G_{n-1}(\xi).$$

Die von den $A_n(\cos\vartheta)$ nur wenig verschiedenen trigonometrischen Polynome

$$B_n(\cos\vartheta) = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} + \sum_{\nu=1}^{n} \begin{bmatrix} 2n \\ n+\nu \end{bmatrix} \left(q^{\frac{\nu}{2}} + q^{\frac{\nu}{2}}\right) \cos\nu\vartheta$$

können übrigens ebenfalls durch eine Orthogonalitätsbedingung gekennzeichnet werden. Die Polynome $B_n(x)$ sind nämlich im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ belegt orthogonal mit der Belegungsfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\left(1-2q^{n-\frac{1}{2}}x + q^{2n-1}\right) = \frac{f(\vartheta+\pi)}{|\sin\vartheta|} = |\sin\vartheta|^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \cos n\vartheta$$
$$(x = \cos\vartheta).$$

[2] Hier und im folgenden soll $(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ für $n = 0$ durch 1 ersetzt werden.

[3] Vgl. die erste, oben angeführte Arbeit, S. 176, Identität (1).

[4] Die Quadratwurzel wird hier wie auch im folgenden stets positiv genommen.

Es ist lehrreich, den Polynomen $G_n(\xi)$ die folgenden beiden gegenüberzustellen:

$$H_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \xi^\nu, \tag{7}$$

$$K_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\nu(\nu+1)} \xi^\nu. \tag{8}$$

Die Polynome $H_n(\xi)$ hat bereits Gauss[1] genau betrachtet; die Zerlegung

$$H_n(\xi) = (1 + q\xi)(1 + q^2\xi)\cdots(1 + q^n\xi) \tag{9}$$

spielt in seinen Untersuchungen eine grundlegende Rolle. In diesem Zusammenhange dürfte vielleicht die Bemerkung von Interesse sein, daß die Polynome $K_n(\xi)$, ähnlich wie die $G_n(\xi)$, sich ebenfalls durch eine Orthogonalitätseigenschaft charakterisieren lassen, eine Bemerkung, welche lediglich eine andere Formulierung eines neuerdings von Hrn. Wigert[2] veröffentlichten Satzes ist. Verschiedene Anwendungen derselben, die von Hrn. Wigert nicht weiter verfolgt worden sind, werden in § 3 kurz angedeutet.

§ 1.

Berechnung der Polynome $\phi_n(z)$ für die Thetafunktion (2) als Belegungsfunktion.

1. Wir betrachten bei festem q, $0 < q < 1$, die Funktion

$$f(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{in\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \cos n\vartheta \tag{10}$$

$$= 1 + 2\left(q^{\frac{1^2}{2}} \cos\vartheta + q^{\frac{2^2}{2}} \cos 2\vartheta + q^{\frac{3^2}{2}} \cos 3\vartheta + \cdots\right).$$

Es ist offenbar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta = q^{\frac{n^2}{2}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{11}$$

Aus der bekannten Formel

$$f(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{in\vartheta} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \left| 1 + q^{n-\frac{1}{2}} e^{i\vartheta} \right|^2 \tag{12}$$

schließt man ferner, daß

$$D(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - q^n}\,(1 + q^{n-\frac{1}{2}} z) \tag{13}$$

gesetzt,

$$f(\vartheta) = |D(e^{i\vartheta})|^2 \tag{14}$$

---

[1] Vgl. die zweite, auf S. 243 zitierte Stelle, S. 462.

[2] Sur les polynomes orthogonaux et l'approximation des fonctions continues, Arkiv för Mat., Astron. och Fysik, Bd. 27 (1923), Nr. 18 (vgl. insbesondere S. 7).

gilt. $D(z)$ stellt offenbar eine ganze Funktion dar, die im Kreise $|z| < q^{-\frac{1}{2}}$ von o verschieden ist.

2. Um die Polynome $\phi_n(z)$ zu berechnen, gehen wir von der Beziehung (9) aus, nach der für $\mu = 0, 1, \cdots, n-1$

$$H_n(-q^{-\mu-1}) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} (-q^{-\mu-1})^\nu = 0,$$

d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\frac{\nu^2}{2} - \nu(\mu + \frac{1}{2})} = 0 \tag{15}$$

gilt. Wir setzen nun $\phi_n(z)$ in der Form

$$\phi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

an und bestimmen die Koeffizienten a_ν derart, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \phi_n(z) \bar{z}^\mu \, d\theta = 0 \qquad (z = e^{i\theta};\ \mu = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{16}$$

sei. Wegen (11) besagen diese Gleichungen, daß

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu q^{\frac{(\nu-\mu)^2}{2}} = 0,$$

d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu q^{\frac{\nu^2}{2} - \nu\mu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Es muß somit im Hinblick auf (15)

$$a_\nu = a(-1)^\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{-\frac{\nu}{2}}$$

sein, so daß

$$\phi_n(z) = a \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{-\frac{\nu}{2}} z^\nu.$$

Zur Bestimmung von a berechnen wir das Integral (16) für $\mu = n$. Es ist

$$= a \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{-\frac{\nu}{2}} q^{\frac{(n-\nu)^2}{2}} = a q^{\frac{n^2}{2}} H_n(-q^{-n-1})$$

$$= a q^{\frac{n^2}{2}} (1 - q^{-n})(1 - q^{-n+1}) \cdots (1 - q^{-1})$$

$$= a(-1)^n q^{-\frac{n}{2}} (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n).$$

Folglich gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,|\phi_n(z)|^2\,d\vartheta = \bar{a}(-1)^n q^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\phi_n(z)\bar{z}^n\,d\theta$$

$$= |a|^2 q^{-n}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n) = 1 \qquad (z = e^{i\vartheta}),$$

d. h.

$$a = \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}}.$$

Wir erhalten somit für $n \geqq 1$

$$(17)\qquad \phi_n(z) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{-\frac{\nu}{2}} z^\nu$$

und $\phi_0(z) = 1$, was mit (6) übereinstimmt.

Man könnte dasselbe Resultat auch auf Grund einer allgemeinen Determinantendarstellung der Polynome $\phi_n(z)$ gewinnen[1].

§ 2.

Über die Polynome $G_n(\xi)$.

1. Nullstellensätze. Aus T., S. 174, Satz XXIX folgt:

Sämtliche Nullstellen der Polynome

$$G_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} \xi^\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

liegen im Kreisringe

$$(18)\qquad q^{\frac{1}{2}} < |\xi| < q^{-\frac{1}{2}}.$$ [2]

Aus T., S. 172, Satz XXVIII folgt ferner:

Sämtliche Nullstellen des Polynoms

$$(19)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^\nu}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)} G_\nu(\xi_1)\, G_\nu(\xi)$$

liegen bzw. im Bereiche

$$(20)\qquad |\xi| < q^{-\frac{1}{2}},\quad |\xi| = q^{-\frac{1}{2}},\quad |\xi| > q^{-\frac{1}{2}},$$

je nachdem

$$(21)\qquad |\xi_1| > q^{-\frac{1}{2}},\quad |\xi_1| = q^{-\frac{1}{2}},\quad |\xi_1| < q^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.

---

[1] Vgl. T., S. 169.

[2] Während der Korrektur bemerke ich, daß die Nullstellen von $G_n(\xi)$ sogar auf dem Einheitskreise $|\xi| = 1$ liegen und sämtlich voneinander verschieden sind. Dies beruht auf der leicht beweisbaren Tatsache (vgl. S. 244, Anm. [1]), daß die in der Einleitung erwähnten Polynome $A_n(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ eine Sturmsche Kette bilden.

2. Identitäten. Aus T., S. 171, Satz XXVII erhalten wir:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\nu})} G_{\nu}\left(-q^{-\frac{1}{2}} z_1\right) G_{\nu}\left(-q^{-\frac{1}{2}} z\right)$$

$$= (z_1 z)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\nu})} G_{\nu}\left(-q^{-\frac{1}{2}} z_1^{-1}\right) G_{\nu}\left(-q^{-\frac{1}{2}} z^{-1}\right).$$

Setzt man hier $-q^{-\frac{1}{2}} z_1 = \xi_1$, $-q^{-\frac{1}{2}} z = \xi$ und beachtet, daß $G_n(\xi)$ ein reziprokes Polynom ist, so folgt

$$(22)\quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\nu})} G_{\nu}(\xi_1)\, G_{\nu}(\xi)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(q\,\xi_1\,\xi)^{n-\nu}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\nu})} G_{\nu}(q\,\xi_1)\, G_{\nu}(q\,\xi).$$

Man hat z. B. für $\xi_1 = 0$

$$(23)\quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\nu})} G_{\nu}(\xi) = \frac{G_n(q\,\xi)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n})}.$$

Hieraus schließt man

$$(24)\quad G_n(q\,\xi) - (1-q^n)\, G_{n-1}(q\,\xi) = q^n\, G_n(\xi).$$

Die Identitäten (22)—(24) lassen sich übrigens auch direkt leicht beweisen. Aus dem Satz XXXI in T., S. 176, folgt schließlich mit Beachtung von (14):

Für $|\xi_1| < q^{-\frac{1}{2}}$, $|\xi| < q^{-\frac{1}{2}}$ *gilt*

$$(25)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n})} G_n(\xi_1)\, G_n(\xi)$$

$$= \frac{1}{1-q\,\xi_1\,\xi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)(1-q^n\,\xi_1)(1-q^n\,\xi)}.$^{[1]}$$

3. Entwicklungssatz. *Jede im Kreise* $|\xi| \leqq q^{-\frac{1}{2}}$ *reguläre Funktion* $\Phi(\xi)$ *kann in eine nach den Polynomen* $G_n(\xi)$ *fortschreitende Reihe*

$$(26)\quad \Phi(\xi) = A_0\, G_0(\xi) + A_1\, G_1(\xi) + \cdots + A_n\, G_n(\xi) + \cdots$$

entwickelt werden. Es ist

$$(27)\quad A_n = \frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = q^{-\frac{1}{2}}} D\left(-q^{\frac{1}{2}}\,\xi\right) D\left(-\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}\,\xi}\right) \Phi(\xi)\, G_n\left(\frac{1}{q\,\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

[1] Vgl. die auf S. 244 unter [3] angeführte Stelle.

wobei $D(z)$ die Bedeutung (13) *hat. Die Entwicklung konvergiert im größten Kreise* $|\xi|<\rho$, $\rho>q^{-\frac{1}{2}}$, *in dem* $\Phi(\xi)$ *regulär ist. Man hat*

(28) $$\limsup_{n\to\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho}.$$

In der Tat kann $\Phi\left(-q^{-\frac{1}{2}}z\right)$ wegen Satz XXXVI in T., S. 184, nach den Polynomen $\phi_n(z)$ entwickelt werden:

$$\Phi\left(-q^{-\frac{1}{2}}z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \phi_n(z),$$

wobei

$$h_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} D(z)\, D\left(\frac{1}{z}\right)\Phi\left(-q^{-\frac{1}{2}}z\right)\phi_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

Setzt man hier $-q^{-\frac{1}{2}}z=\xi$ und beachtet (17), so folgt die Behauptung.

§ 3.

Über die Polynome $K_n(\xi)$.

1. Es sei $k \gtrless 0$ und

(29) $$q = e^{-\frac{1}{2k^2}}$$

gesetzt. Hr. Wigert hat (vgl. S. 245,[2]) die Polynome $Q_n(x)$ berechnet, welche mit

(30) $$p(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \log^2 x} = \frac{k}{\sqrt{\pi}} x^{-k^2 \log x}$$

als Belegungsfunktion im einseitig unendlichen Intervall $x \geqq 0$ orthogonal sind. Es gilt also

(31) $$\int_0^{\infty} p(x)\, Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n, \\ 1 \text{ für } m = n \end{cases} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots).$$[1]

Zur Ermittelung dieser Polynome benutzt Hr. Wigert die aus der Stieltjesschen Kettenbruchtheorie wohlbekannte Determinantendarstellung derselben. Man kann aber mit Beachtung von

(32) $$\int_0^{\infty} p(x)\, x^n\, dx = q^{-\frac{(n+1)^2}{2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

auch durch einen ähnlichen Ansatz wie in § 1 zu demselben Ziele gelangen. Das Resultat kann ferner folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es ist, wenn $K_n(\xi)$ die Bedeutung (8) *besitzt,*

(33) $$Q_0(x) = q^{\frac{1}{4}};\quad Q_n(x) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}}{\sqrt{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}} K_n\left(-q^{-\frac{1}{2}}x\right).$$

[1] Hierzu kommt noch die Bedingung, daß der Koeffizient von x^n in $Q_n(x)$ positiv sei. Dann ist $Q_n(x)$ eindeutig bestimmt.

2. Aus der allgemeinen Theorie der Stieltjesschen Kettenbruchnenner können nun ohne besondere Schwierigkeit folgende Eigenschaften von $K_n(\xi)$ abgeleitet werden:

I. *Es gilt die Rekursionsformel*

$$K_n(\xi) = (1+q-q^n+q^{2n}\xi)\,K_{n-1}(\xi) - (q-q^n)\,K_{n-2}(\xi) \tag{34}$$
$$(n = 2, 3, 4, \cdots).$$

II. *Es gilt die folgende Determinantendarstellung:*

$$K_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\nu(\nu+1)}\xi^\nu \tag{35}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+q^2\xi, & q-q^2, & 0, & 0, & \cdots\cdots \\ 1, & 1+q-q^2+q^4\xi, & q-q^3, & 0, & \cdots\cdots \\ 0, & 1, & 1+q-q^3+q^6\xi, & q-q^4, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots & 1, & 1+q-q^n+q^{2n}\xi \end{vmatrix}.$$

III. *Sämtliche Nullstellen der Polynome*

$$K_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\nu(\nu+1)}\xi^\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

sind einfach, reell und negativ[1].

IV. *Es gelten die Identitäten*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^\nu}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)} K_\nu(\xi_1)\,K_\nu(\xi) \tag{36}$$

$$= \frac{q^{-n-2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \frac{K_{n+1}(\xi_1)\,K_n(\xi) - K_{n+1}(\xi)\,K_n(\xi_1)}{\xi_1-\xi}$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \frac{\xi_1 K_n(q\xi_1)\,K_n(\xi) - \xi K_n(q\xi)\,K_n(\xi_1)}{\xi_1-\xi}.$$

Für $\xi_1 = 0$ hat man z. B.

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^\nu}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)} K_\nu(\xi) \tag{37}$$

$$= \frac{q^{-n-2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \frac{K_{n+1}(\xi) - K_n(\xi)}{\xi}$$

$$= \frac{K_n(q\xi)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)},$$

[1] Dieser Satz kann (abgesehen von der Einfachheit der Nullstellen) auch aus der entsprechenden Eigenschaft der Polynome $H_n(\xi)$ geschlossen werden (letztere ist wegen (9) trivial), und zwar unter Heranziehung eines Satzes von Laguerre. Dieser lautet: Wenn ein Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu$ lauter reelle Nullstellen hat, so gilt dasselbe für das Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} q^{\nu^2} a_\nu \xi^\nu$, wobei $0 < q < 1$. (Werke, Bd. 1, S. 176.)

so daß

$$(38)\qquad K_n(q\xi)-(1-q^n)\,K_{n-1}(q\xi)=q^n K_n(\xi).^{1}$$

3. Hr. Wigert betrachtet auch die offenbar vorhandene Grenzfunktion der Polynome $K_n(\xi)$ für $n\to\infty$, nämlich die ganze Funktion von ξ

$$(39)\qquad K(\xi)=\lim_{n\to\infty} K_n(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{\nu(\nu+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)}\,\xi^\nu .$$

Aus II folgt:

$$(40)\quad K(\xi)=\begin{vmatrix} 1+q^2\xi, & q-q^2, & 0, & 0, & \cdots\cdots \\ 1, & 1+q-q^2+q^4\xi, & q-q^3, & 0, & \cdots\cdots \\ 0, & 1, & 1+q-q^3+q^6\xi, & q-q^4, & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Die Funktion $K(q^{-2}\xi)$ stimmt wegen (39) offensichtlich mit der von Hrn. I. Schur gelegentlich[2] betrachteten Funktion

$$D(\xi,\, q\xi,\, q^2\xi,\, \cdots)$$

überein, wobei

$$(41)\qquad D(x_1, x_2, x_3, \cdots)=\begin{vmatrix} 1, & x_1, & 0, & 0, & \cdots \\ -1, & 1, & x_2, & 0, & \cdots \\ 0, & -1, & 1, & x_3, & \cdots \\ 0, & 0, & -1, & 1, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ist. Im Hinblick auf (40) erhalten wir folglich die Identität der folgenden beiden, übrigens für alle ξ konvergenten, unendlichen Determinanten:

$$(42)\quad \begin{vmatrix} 1+\xi, & q-q^2, & 0, & 0, & \cdots \\ 1, & 1+q-q^2+q^2\xi, & q-q^3, & 0, & \cdots \\ 0, & 1, & 1+q-q^3+q^4\xi, & q-q^4, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & \xi, & 0, & 0, & \cdots \\ -1, & 1, & q\xi, & 0, & \cdots \\ 0, & -1, & 1, & q^2\xi, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

---

[1] Vgl. die Formel (24). Diese Beziehung wird übrigens von einem beliebigen System von Polynomen von der Form $\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} a_\nu z^\nu$ erfüllt, wobei a_ν von n unabhängig ist.

[2] Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche: diese Sitzungsberichte 1917, S. 302—321, vgl. S. 303, 306, 307.

Es ergibt sich ferner aus III:

Sämtliche Nullstellen der ganzen Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu(\nu+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^\nu)}\xi^\nu$$

sind einfach, reell und negativ.

Schließlich folgt aus IV:

$$(43)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} K_n(\xi_1) K_n(\xi)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \frac{\xi_1 K(q\xi_1) K(\xi) - \xi K(q\xi) K(\xi_1)}{\xi_1 - \xi}.$$

Insbesondere gilt für $\xi_1 = 0$

$$(44)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} K_n(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} K(q\xi).$$

Ausgegeben am 22. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XX. Gesamtsitzung. 24. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Marcks sprach über Deutschland und Österreich, hauptsächlich im Zeitalter der Restauration.

Er erinnerte an die Verschiebungen, die in Deutschland das historische Interesse, die historische Fragestellung und das historische Urteil Deutschösterreich gegenüber in den letzten Jahrzehnten, zumal im letzten Jahrzehnt erfahren haben; an die Wandlungen in der Auffassung auch Metternichs. Er betonte die Berechtigung und Notwendigkeit dieser Veränderungen und warnte vor ihrer Übertreibung, insbesondere vor einer unhistorisch gewaltsamen Kritik der kleindeutschen Entwickelung. Er vollzog, Metternich wie Österreich gegenüber, eine Auseinandersetzung mit diesem Umschwunge des Wissens und der Anschauungen, indem er aus einem in der Entstehung begriffenen, darstellenden Buche über die deutsche Geschichte des letzten Jahrhunderts die betreffenden Abschnitte, mit kurzen Überleitungen, vorlegte.

2. Hr. Haber legte »Untersuchungen über die anomale Dispersion angeregter Gase« von HH. Prof. Dr. R. Ladenburg, Dr. H. Kopfermann und Frl. Dr. Agathe Carst (aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie Berlin-Dahlem) vor. (Ersch. später.)

Nach der Methode der horizontalen Interferenzstreifen wird an vielen Linien des He, Ne, Hg und H bei Anregung dieser Gase durch Gleichstrom anomale Dispersion nachgewiesen und zum Teil quantitativ gemessen. Auf Grund der quantentheoretischen Dispersionsformel von Ladenburg und Kramers und des f-Summensatzes von Reiche-Thomas wird aus diesen Messungen die Übergangswahrscheinlichkeit der verschiedenen Quantenübergänge sowie die Zahl der Atome in den angeregten Zuständen und ihre Änderung mit Stromstärke, Druck und Temperatur des Gases bestimmt.

So ergibt sich, daß bei schwachem Strom die metastabilen Zustände in überwiegender Zahl vorherrschen; mit wachsendem Strom wächst aber die Zahl der nicht metastabilen, spontan zerfallenden Zustände rascher als die der metastabilen, und schließlich bildet sich z. B. zwischen den energetisch benachbarten s-Zuständen des Neons, die zu einem Triplet gehören, ein statistischer Gleichgewichtszustand aus, bei dem sich die Zahl der Atome in den verschiedenen Zuständen mit wachsendem Strom nicht mehr ändert und die Verhältnisse der Atomzahlen — unabhängig von dem metastabilen oder labilen Charakter des Atomzustandes — wesentlich durch die ihrer Quantengewichte bestimmt sind, wie man es nach den Gesetzen der Quantenstatistik erwarten sollte.

3. Hr. Kehr legte den Bericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica 1925 vor.

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Lohmann übersandte seine Arbeit über »Die Appendicularien der deutschen Südpolar-Expedition 1901—1903 (Sonderabdr. 1926).

5. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte die Schrift von Prof. Dr. Friedrich Frhr. Hiller von Gaertringen »Historische griechische Epigramme« (Bonn 1926).

6. Vorgelegt wurde endlich »Gottfried Wilhelm Leibniz' sämtliche Schriften und Briefe« 2. Reihe, philosophischer Briefwechsel, 1. Band (Darmstadt 1926).

7. Die Firma Julius Blüthner in Berlin hat der Akademie für Demonstrationen bei musikwissenschaftlichen Vorträgen einen Flügel zur Verfügung gestellt.

Untersuchungen über die anomale Dispersion angeregter Gase.

Von Prof. Dr. R. Ladenburg, Dr. H. Kopfermann und Dr. Agathe Carst.

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem. Vorgelegt von Hrn. Haber.)

Hierzu Taf. II.

1. Einleitung.

Nach der klassischen Dispersionstheorie ist jede Eigenfrequenzstelle einer Substanz Ursache einer in ihrer Umgebung stattfindenden abnorm raschen Änderung des Brechungsquotienten. Diese »anomale Dispersion« sollte also in der Nachbarschaft jeder Spektrallinie eines leuchtenden Gases auftreten, sie ist aber bei den meist benutzten relativ kleinen Stromdichten wegen ihres geringen Betrages nicht beobachtbar, die »Zahl der Dispersionselektronen« — in der Sprache der klassischen Elektronentheorie — ist dann zu gering; in der Sprache der Quantentheorie muß man sagen, daß die Dichte der angeregten Atome meist zu klein ist (vgl. Ziffer 2).

Bei genügend starker Anregung ist andererseits verschiedentlich, vor allem an vielen Spektrallinien des Lichtbogens, anomale Dispersion nachgewiesen worden[1]. Ferner hatten ältere Versuche an Wasserstoff bei Anregung mit starken Kondensatorentladungen an H_α und H_β Erfolg und erlaubten auch einigermaßen quantitative Messungen[2].

Neuerdings haben derartige Untersuchungen durch die quantentheoretische Deutung der Dispersionserscheinungen[3], von denen in Ziffer 2 ausführlicher die Rede sein wird, erhöhtes Interesse gewonnen. Wir haben uns daher die Aufgabe gestellt, exakte Dispersionsmessungen in der Umgebung von Serienlinien einfacher Gase unter gut kontrollierbaren Anregungsbedingungen auszuführen. Die bekannten Absorptionsversuche von Paschen[4] an

[1] Vgl. O. Lummer und E. Pringsheim, Phys. Z. 4, 430 (1903). H. Ebert, Phys. Z. 4, 473 (1903). H. Geisler, Diss. Bonn 1909, P. P. Koch u. W. Friedrich, Phys. Z. **12**, 1193 (1911).

[2] R. Ladenburg und St. Loria, Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 858 (1908), R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **38**, 249 (1913).

[3] Vgl. R. Ladenburg, Z. f. Phys. **4**, 451 (1921), H. A. Kramers, Nature **113**, 673 (1924). Diese Arbeiten werden im folgenden zitiert als »a. a. O.«.

[4] F. Paschen, Ann. d. Phys. **45**, 625 (1914). Vgl. ferner neue Absorptionsversuche an sichtbaren Heliumlinien von W. Mc Curdey, Nature **117**, 122 (1926).

leuchtendem Helium und neuere Versuche von Meissner[1] an Neon, beide mit Gleichstromerregung bei geringer Stromdichte ausgeführt, veranlaßten uns zunächst, die Dispersion dieser Gase unter den gleichen Erregungsbedingungen zu untersuchen. Wir benutzten die bekannte schöne Methode der »horizontalen Interferenzstreifen«[2], die bei den genannten Versuchen an Wasserstoff zum Ziele geführt hatte und die auch von Roschdestwensky bei seinen bekannten Dispersionsversuchen an Alkalidämpfen benutzt worden ist[3], und erhielten sogleich an vielen Linien des He und Ne, später bei geeigneter elektrischer Erregung (vgl. Ziffer 3) auch bei Hg und H gut brauchbare und quantitativ ausmeßbare Effekte. Allerdings sind auch die größten nur $^1/_{100}$ bis $^1/_{1000}$ so groß wie die an den Absorptionslinien der Alkalidämpfe, so daß eine möglichst empfindliche Meßanordnung erforderlich war.

2. Theoretische Betrachtungen.

Die Abhängigkeit des Brechungsquotienten n von der Schwingungszahl $\nu = \frac{c}{\lambda}$ wird für Gase außerhalb der eigentlichen Absorptionsgebiete durch die Formel der klassischen Elektronentheorie

$$n^2 - 1 = \frac{e^2}{\pi m} \sum_s \frac{\mathfrak{N}_s}{\nu_s^2 - \nu^2} \tag{1}$$

dargestellt, in der e Ladung, m Masse und ν_s Eigenfreqenz der Elektronen vorstellt. $\mathfrak{N}_s$ bedeutet die Zahl dieser als räumliche Oszillatoren aufgefaßten. quasi elastisch gebundenen »Dispersionselektronen« in der Volumeneinheit, von der man aus der Elektronentheorie nur weiß, daß sie der Atomzahl N der Volumeneinheit proportional ist

$$\mathfrak{N}_s = N \cdot f_s,$$

während der Proportionalitätsfaktor f_s unbekannt bleibt und für verschiedene Linien sehr verschiedene Werte annehmen kann.

In der unmittelbaren Umgebung einer isolierten Spektrallinie (»Eigenfrequenzstelle«) kann man für ein verdünntes Gas in genügender Annäherung, indem man zugleich Frequenzen auf Wellenlängen umrechnet, statt der Gleichung (1) die Gleichung

$$n - 1 = \frac{e^2}{4\pi c^2 m} \mathfrak{N}_s \frac{\lambda_s^3}{\lambda - \lambda_s} = \frac{\rho_s}{16\pi^2 c^2} \frac{\lambda_s^3}{\lambda - \lambda_s} \tag{2}$$

schreiben, wobei mit Voigt

$$\frac{4\pi e^2}{m} \mathfrak{N} = \rho \tag{2a}$$

---

[1] W. Meissner, Ann. d. Phys. **76**, 124 (1925).

[2] L. Puccianti, Il Nuovo Cimento **2**, 257 (1901).

[3] D. Roschdestwensky, Ann. d. Phys. **39**, 307 (1912); Trans. of the Optic. Inst. Petrograd II Nr. 13 (1921).

gesetzt ist[1]. Die Gleichung (2) zeigt, daß der um 1 verminderte Brechungsquotient in der Umgebung der Absorptionslinie λ_s den bekannten hyperbelartigen Verlauf nimmt, den man meist als »anomale Dispersion« bezeichnet. Als Maß für die Größe dieser »anomalen Dispersion« sehen wir auf Grund der Gleichung (2) den durch (2a) definierten Wert von ρ bzw. die Zahl $\mathfrak{N}$ an.

Die ursprüngliche Quantentheorie sagt über die Reaktion eines Atoms auf beliebige Frequenzen nichts aus, sie kennt nur »vollständige Quantenübergänge« zwischen verschiedenen Energieniveaus und daher nur die Beeinflussung des Atoms durch Frequenzen ν_{kj}, die das Atom unter Absorption dieser Frequenz aus dem betrachteten Zustand j in einen höheren Zustand k überführen und mit der Energiedifferenz dieser Zustände durch die Einstein-Bohrsche Frequenzbedingung

$$\nu_{kj} = \frac{1}{h}(E_k - E_j)$$

verknüpft sind.

Durch die Annahme, daß die Atome in ihrer Wirkung auf beliebige Frequenzen und in ihrer Fähigkeit Licht zu zerstreuen, zu dispergieren und zu absorbieren durch Oszillatoren ersetzt werden können, deren Eigenfrequenzen ν_s mit den bei den möglichen Übergängen des Atoms im Zustande j absorbierten und emittierten Frequenzen ν_{kj} übereinstimmen, findet man unter Verwendung der Einsteinschen Koeffizienten für die Häufigkeit der Quantenübergänge durch Berechnung der klassisch und quantenmäßig absorbierten Energie die Beziehung[2]

$$(3) \qquad f_s \equiv f_{jk} = \frac{\mathfrak{N}_{jk}}{N_j} = B_{jk} h \nu_{jk} \frac{m}{\pi e^2} = A_{kj} \frac{g_k}{g_j} \frac{mc^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{kj}^2} = A_{kj} \frac{g_k}{g_j} \frac{\tau_{kj}}{3}.$$

Dabei bedeutet N_j die Zahl der Atome im Zustande j, B_{jk} bzw. A_{kj} den Einsteinschen Wahrscheinlichkeitskoeffizienten des durch einfallende Strahlung erzwungenen Überganges $j-k$, bzw. des spontanen Überganges $k-j$, g_k und g_j die »statistischen Gewichte« der Quantenzustände k und j, und die Größe

$$(4) \qquad \tau = \frac{3mc^3}{8\pi^2 e^2 \nu^2}$$

hat die Bedeutung der klassischen »Abklingungszeit«, in der die Energie des »Ersatzoszillators« auf den e-Teil sinkt. Man bezeichnet f, bisweilen auch $f^* = 3f\frac{g_j}{g_k} = A_{kj}\tau_{kj}$ als die Stärke des »Ersatzoszillators«.

Durch korrespondenzmäßige Überlegungen hat H. A. Kramers[3] — ohne auf den Vorgang der Absorption selbst eingehen zu brauchen — die Gleichung (3) bestätigt und ihr dadurch allgemeinere Anerkennung verschafft.

---

[1] Die Vernachlässigung des Dämpfungsgliedes ist praktisch unter den vorliegenden Versuchsbedingungen unbedenklich, wie man bei näherer Betrachtung leicht sieht.

[2] R. Ladenburg a.a.O., siehe auch R. Ladenburg und F. Reiche, Naturwiss. **11**, 596 (1923).

[3] H. A. Kramers a. a. O., s. auch H. A. Kramers und W. Heisenberg, Z. f. Phys. **31**, 681 (1925).

Zugleich hat er gezeigt, daß sie streng nur für Atome im Normalzustande (und für metastabile Atomzustände) gilt; für Atome in angeregten Zuständen ist sie i. a. durch ein, der »negativen Einstrahlung« der PLANCK-EINSTEINschen Strahlungstheorie entsprechendes negatives Dispersionsglied zu ergänzen, das auch die vom Zustand j nach niedrigeren Energiestufen i möglichen Quantenübergänge berücksichtigt. Die vollständige quantentheoretische Dispersionsformel lautet daher:

$$n^2 - 1 = \sum_j \frac{e^2 N_j}{\pi m} \left[\sum_k A_{kj} \frac{g_k}{g_j} \frac{\tau_{kj}}{3} \frac{1}{\nu_{kj}^2 - \nu^2} - \sum_i A_{ji} \frac{\tau_{ji}}{3} \frac{1}{\nu_{ji}^2 - \nu^2} \right]. \tag{5}$$

Daß das negative Dispersionsglied die Quantengewichte nicht enthält, ergibt sich ohne weiteres bei Berechnung der quantenmäßig absorbierten Energie[1], da der dem Übergang $j - i$ entsprechende Wahrscheinlichkeitskoeffizient B_{ji} der »negativen Einstrahlung« mit dem Koeffizienten des spontanen Übergangs A_{ji} nach EINSTEIN[2] durch die Gleichung

$$B_{ji} = A_{ji} \frac{c^3}{8\pi h \nu_{ji}^3}$$

verknüpft ist, während für die positive Einstrahlung

$$B_{jk} = A_{kj} \frac{g_k}{g_j} \frac{c^3}{8\pi h \nu_{kj}^3}$$

ist. Das negative Dispersionsglied ist theoretisch von grundlegender Bedeutung[3]; um seinen Einfluß auf die praktischen Dispersionsmessungen zu beurteilen, fassen wir die Glieder mit gleichem Nenner $\nu_s^2 - \nu^2$ zusammen, da nur für sehr kleine Abstände $\nu_s - \nu$ eine Beeinflussung des Brechungsquotienten überhaupt nachweisbar ist, und erhalten, indem wir die Glieder der ersten Summe einzeln hinschreiben:

$$(n^2 - 1)\frac{\pi m}{e^2} = \sum_j \frac{A_{ji}\tau_{ji}}{3(\nu_{ji}^2 - \nu^2)} \left[\frac{g_j}{g_i} N_i - N_j\right] + \sum_k \frac{A_{kj}\tau_{kj}}{3(\nu_{kj}^2 - \nu^2)} \left[\frac{g_k}{g_j} N_j - N_k\right] + \cdots.$$

Auch bei starker Anregung ist N_j nur ein winziger Bruchteil von N_i (bei den vorliegenden Messungen am Neon z. B. entspricht j den angeregten s-Zuständen, i dem Normalzustand, und es ergibt sich für das Verhältnis $N_j : N_i$ im günstigsten Falle etwa 1 : 50000, vgl. Ziffer 4c), so daß hier das negative Glied praktisch ganz fortfällt. Ferner ist N_k wieder sehr viel kleiner als N_j, da die Atome im Zustand k wesentlich erst aus den Atomen im Zustand j durch weitere Anregung entstehen. Wir werden uns deshalb im folgenden praktisch auf die Berücksichtigung der positiven Dispersionsglieder beschränken[4].

Das, was experimentell aus Messungen der »anomalen Dispersion« unmittelbar zu entnehmen ist, ist die Größe $\mathfrak{N}$ bzw. ρ, und da die Quanten-

[1] Vgl. auch F. REICHE und W. THOMAS, Z. f. Phys. **34**, 510 (1925).
[2] A. EINSTEIN, Verh. d. d. Phys. Ges. **18**, 318 (1916); Phys. Zs. **18**, 121 (1917).
[3] Vgl. die Entwicklung der Quantenmechanik durch BORN und HEISENBERG.
[4] Ob unter besonderen Umständen (sehr starker Erregung) ein Einfluß der negativen Dispersionsglieder praktisch festzustellen ist, soll näher untersucht werden.

gewichte bei eingeordneten Serienlinien durch SOMMERFELDS innere Quantenzahl gegeben sind und τ aus Gleichung (4) berechnet werden kann, liefern die Dispersionsmessungen auf Grund der Gleichung 3 das Produkt

$$N_j \cdot A_{kj} .$$

Durch Hilfsannahmen bzw. durch Benutzung des THOMAS-KUHNschen f-Summensatzes wird es möglich sein, auch die — theoretisch interessanten — Einzelwerte N_j und A_{kj} abzuschätzen (vgl. Ziffer 4c). In dieser Beziehung ist die Untersuchung der »anomalen Dispersion« der an und für sich empfindlicheren, aber theoretisch weniger durchsichtigen Methode der Messung der Linienabsorption überlegen.

3. Versuchsanordnung.

Die benutzte Versuchsanordnung geht aus Abb. 1 hervor; sie ist im wesentlichen dieselbe wie bei den früheren Dispersionsversuchen an Wasserstoff, so daß hier eine kurze Beschreibung genügt. Die von der Lichtquelle Q (z. B. vom positiven Krater einer Bogenlampe) an den Platten $P_1 P_2$ eines JAMINschen Interferenzialrefraktors erzeugten Interferenzen niedriger Ordnungszahl werden auf dem Spalt Sp eines stigmatischen Spektrographen abgebildet, so daß das kontinuierliche Spektrum der Lichtquelle von horizontalen Interferenzstreifen durchzogen wird. Die beiden an der ersten Platte erzeugten Strahlenbündel durchsetzen 2 gleich lange, mit planparallelen Platten verschlossene Röhren[1], die mit dem Pumpsystem und den Gasvorräten verblasen sind. Da beide Röhren mit gleichem Gas gefüllt sind und nur eine von ihnen elektrisch erregt wird, wird der Unterschied des Brechungsquotienten des angeregten gegen das unangeregte Gas gemessen. Zur Anregung wurden eine Gleichstrommaschine von 1000 Volt bzw. 2 Gleichstrommaschinen von je 5000 Volt benutzt, die jede bis 1 Amp. Strom lieferte. Dabei konnten alle elektrischen Bedingungen konstant gehalten und genau gemessen werden.

Als Spektrograph diente im Sichtbaren ein großes WANSCHAFF-Spektrometer mit Plangitter und einer Holzkamera von 1.7 m Länge[2]. Ohne Telesystem beträgt die Dispersion in der 3. Ordnung des Gitters im Gelb etwa 3 Å pro Millimeter.

Für Messungen im Ultraviolett verwendeten wir einen Interferentialrefraktor mit Quarzplatten und einen für den vorliegenden Zweck gebauten größeren Quarzspektrographen von SCHMIDT und HAENSCH mit 2 Quarzprismen von je 90 mm Basislänge. Die Dispersion beträgt bei 3500 Å etwa 12 Å pro Millimeter, bei 2500 Å 2 Å pro Millimeter. Durch ein Telesystem kann die Dispersion verdoppelt werden. Erregt man eine der z. B. mit reinem Ne oder He gefüllten Röhren mit einigen Milliampère, so werden die das Spektrum der Lichtquelle durchziehenden obengenannten Interferenzstreifen zu beiden Seiten vieler Linien des Neons bzw. Heliums hyperbelartig mehr oder weniger abgebogen — aber nur innerhalb eines Bereichs von einigen Zehntel

[1] Benutzt wurden Rohrlängen von 40 bzw. 75 cm.
[2] Nähere Beschreibung s. H. SENFTLEBEN, Ann. d. Phys. **47**, 966 (1915).

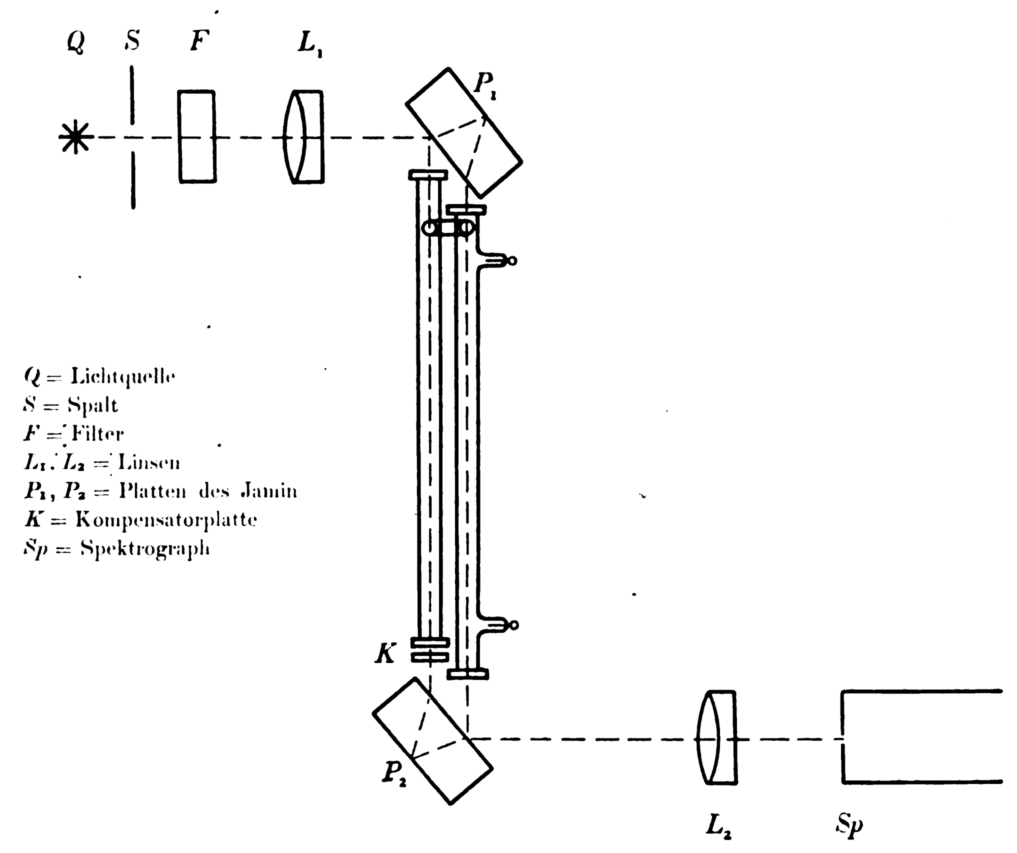


Abb. 1. Versuchsanordnung.

bis etwa 2 Å — und zeigen durch ihren Verlauf in bekannter Weise unmittelbar den Gang der anomalen Dispersion[1] (vgl. Abb. 2 auf beiliegender Tafel II). Für quantitative Ausmessung geeigneter als der beschriebene Effekt selbst ist die »Hakenmethode«, die zuerst von ROSCHDESTWENSKY[2] angegeben und quantitativ ausgearbeitet wurde: durch Einführen einer dünnen planparallelen Platte in den Strahl, der das unerregte Gas durchsetzt, entstehen schräg das Spektrum durchziehende Interferenzstreifen höherer Ordnung und zu beiden Seiten der untersuchten Linie mehr oder weniger scharfe »Haken« (vgl. Abb. 3 der Tafel II); aus ihrem Wellenlängenabstand kann man unmittelbar den Wert von ρ bestimmen[2] und bei genügender Auflösung der Apparatur noch relativ sehr kleine ρ-Werte messen; wir sind bisher bis $\rho \sim 1.10^{20}$ gekommen[3].

---

[1] Die ersten Untersuchungen dieser Erscheinung wurden auf dem Physikertag in Danzig mitgeteilt (vgl. Phys. Zs. **26**, 688, 1925), ein Teil der hier beschriebenen Erscheinungen auf der Sitzung des Gauvereins Niedersachsen der D. Phys. Ges. in Braunschweig am 14. Febr. 1926 vorgetragen (Verh. d. D. Phys. Ges. (3) **7**, 13, 1926). Nach einer etwas anderen Methode haben kürzlich W. H. MC CURDEY und A. BRAMLEY Dispersionsversuche an He ausgeführt und berichten über eine sehr geringe Änderung des Brechungsquotienten in der Nähe einiger He-Linien. (Phys. Rev. **27**, 314. 1926.)

[2] Vgl. D. ROSCHDESTWENSKY (a. a. O.).

[3] Die kleinsten von Ro. gemessenen ρ-Werte sind etwa 5.10^{22}, und mittels der Methode der Magnetorotation ist man bisher, soweit uns bekannt, nicht unter 2.10^{21} gekommen (vgl. H. SENFTLEBEN a. a. O.).

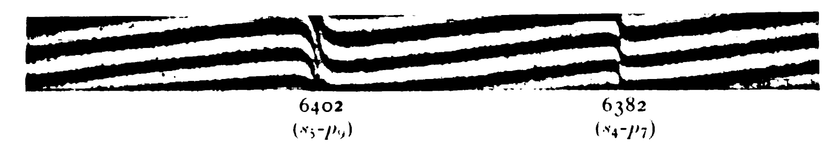


Abb. 2. Anomale Dispersion an Neon.
Schwach geneigte Interferenzstreifen (6fach vergrößert).

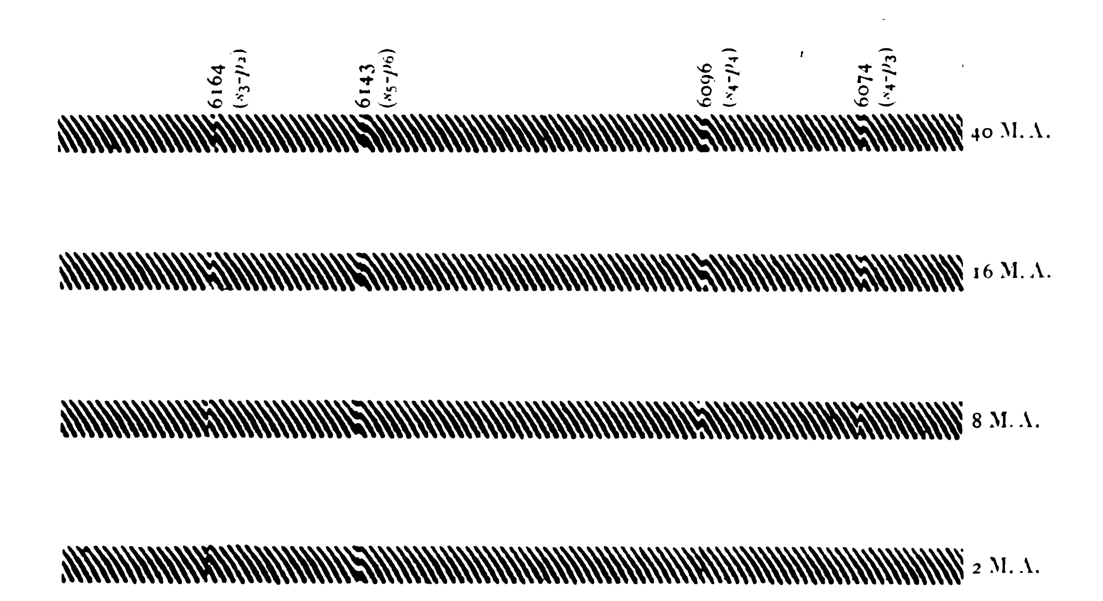


Abb. 3. (3fache Vergrößerung.)
Anwachsen der anomalen Dispersion an Neon mit steigendem Strom: an s_4-Linien stark, an s_5- und s_3-Linien schwach erkennbar.

R. Ladenburg, H. Kopfermann und A. Carst: Untersuchungen über die anomale Dispersion angeregter Gase.

Bei den Dispersionsversuchen an He und Ne ist ebenso wie bei den Absorptionsversuchen von PASCHEN und MEISSNER außerordentliche Reinheit der Gase erforderlich, um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten. Geringe Verunreinigungen durch Wasserstoff, die im Taschenspektroskop kaum erkennbar sind, verringern die Effekte erheblich oder vernichten sie evtl. vollständig. Elektroden und Rohr müssen vor den Versuchen gründlich ausgeheizt werden[1]. Die Gase wurden uns von der Fa. Linde kostenlos zur Verfügung gestellt, wofür wir auch hier unseren Dank aussprechen möchten; He enthielt nach den Angaben der Firma weniger als $^1/_2$ Prozent Ne und Ne weniger als $^1/_2$ Prozent He, so daß auch bestimmte Zusätze von He zu Ne untersucht werden konnten.

Hg wurde bisher nur qualitativ in einer Ne-Atmosphäre untersucht, indem einige Tropfen Hg in die Röhre gebracht und durch den Strom selbst erhitzt wurden[1]. Dann verschwindet das rote Ne-Licht in bekannter Weise und macht dem grüngelben Leuchten des Hg Platz.

Bei H muß man die von WOOD[2] und BONHOEFFER[3] angegebenen Bedingungen zur Erzeugung von atomarem Wasserstoff und beträchtliche Stromdichten verwenden, um mit Gleichstrom den gesuchten Effekt zu erhalten[4], also strömenden Wasserstoff mit Zusatz von Wasserdampf oder Sauerstoff usw.[5]. Um mehr als 1 Amp. pro qcm Stromdichte verwenden zu können, muß man Rohre aus Jenaer Glas oder Quarz verwenden, die mit ungefetteten Schliffen an die übrige Apparatur aus Thüringer Glas angesetzt werden.

Die planparallelen Verschlußplatten wurden im allgemeinen mit weißem Siegellack so aufgekittet, daß der Kitt sich nur außen befand; außerdem waren die Rohrenden mit angeblasenen Kühlmänteln versehen, durch die kaltes Wasser strömte. Die Quarzröhren erhielten als Abschluß angeblasene optisch planparallele Quarzplatten.

4. Ergebnisse.

a. Abhängigkeit von Stromstärke, Druck und Temperatur.

Die Abhängigkeit der anomalen Dispersion (im folgenden abgekürzt als »a. D.« bezeichnet) in der Umgebung einer Spektrallinie von den äußeren Bedingungen wie Stromdichte, Druck und Temperatur gibt Aufschluß über deren Einwirkung auf die Erzeugung und Vernichtung angeregter Atomzustände.

Von dem experimentell bestimmbaren Produkt $N_j \cdot A_{kj}$ (s. Ziff. 2) ändert sich mit den äußeren Bedingungen in erster Annäherung nur N_j, d. i. die

---

[1] Vgl. auch H. B. DORGELO, Physica **5**, 90 und 429 (1925).

[2] R. W. WOOD, Proc. Roy. Soc. **97**, 455 (1921); 102, 1 (1922).

[3] K. F. BONHOEFFER, Zt. f. phys. Chem. **113**, 199 (1924), **116**, 391 (1925).

[4] Die älteren in der Einleitung zitierten Versuche an H wurden mit hochfrequentem Wechselstrom ausgeführt und erforderten deshalb eine von gleichem Strom getriebene Wasserstoffkapillare als Lichtquelle, während wir jetzt einfach eine Bogenlampe verwenden konnten.

[5] Im Taschenspektroskop sieht man bei starkem Strom H_δ, und in Längsdurchsicht, wo das Rohr wegen der stärkeren Selbstabsorption von H_α gegenüber H_β bläulichgrün erscheint, sogar H_ϵ (3970 A).



Zahl der Atome im angeregten Zustande j, von dem der zur betrachteten Linie gehörige Absorptionsübergang nach dem höheren Zustande k ausgeht; dagegen kann der andere Faktor, die Übergangswahrscheinlichkeit, zunächst praktisch als konstant angesehen werden. In der Tat ergeben die Beobachtungen, daß sich die a. D. an Linien des gleichen unteren Niveaus stets in gleicher Weise ändert.

Bei Wasserstoff, dessen Spektrum nur eine Reihe von Termen enthält, liegen die Verhältnisse naturgemäß am einfachsten. Praktisch kommen vorläufig nur die Linien der Balmer-Serie in Betracht. Der untersuchte Effekt wird hier erst bei Strömen über 100 Milliamp.[1] beobachtbar, und zwar zunächst nur am 1. Seriengliede H_α, das den weitaus größten Effekt zeigt. Mit wachsendem Strom steigt die a. D. an H_α — d. h. also die Zahl der Atome im Zustande $n = 2$ — soweit die bisherigen okularen Beobachtungen erkennen lassen, bis über 1 A dauernd an[2]. Der Effekt hängt merklich vom Druck ab und besitzt etwa bei $^1/_2$ mm ein Maximum. Dies ist nach den vorliegenden Erfahrungen zugleich der günstigste Druck zur Erzeugung von atomarem Wasserstoff — bei höherem Druck wird offenbar die direkte oder indirekte Erzeugung angeregter H-Atome durch ihre Vernichtung bei Zusammenstößen mit Molekülen übertroffen.

Anders und wesentlich verwickelter liegen die Verhältnisse bei He, Ne und Hg mit ihren vielen und zusammengesetzten Termsystemen. Hier treten meßbare Werte der a. D. bereits bei Bruchteilen eines Milliamp. auf, aber an verschiedenen Linien je nach ihrem Ausgangsniveau j in sehr verschiedener Stärke, und erreichen bei Stromsteigerung mehr oder weniger rasch einen »Sättigungswert« der a. D., der bei weiterem Stromanstieg nicht mehr wächst (vgl. Abb. 5, deren nähere Erörterung unten folgt). Diese Erscheinungen haben wir an vielen im Gelb-Rot liegenden s-p-Linien des Ne und an den bisher untersuchten Linien 5876 Å, 6678 Å, des He und 5461 Å des Hg beobachtet. Sie ist im Anschluß an Meissners Deutung seiner Absorptionsversuche im Neon[3] dadurch zu erklären, daß die genannten Gase eine Reihe energetisch relativ nahe beieinander liegender angeregter Terme des Singlet- und Tripletsystems[4] besitzen, von denen einige im Franck-Reicheschen Sinne »metastabil« sind, d. h. von selber nicht in den Normalzustand übergehen. Die angeregten Atome entstehen nämlich in erster Linie durch den Zusammenstoß der Normalatome

---

[1] Die im folgenden angegebenen Ströme bedeuten Stromstärke geteilt durch Rohrquerschnitt. Ob der Querschnitt der meist etwa 10 mm weiten Rohre vollständig und gleichmäßig mit Strom erfüllt ist, ob also die Stromangaben wahre Stromdichte bedeuten, bleibe vorläufig unerörtert.

[2] Damit wird das früher bei Erregung des H durch schnelle elektrische Schwingungen gefundene Ergebnis bestätigt, daß die a. D. mit der Stromamplitude gleichmäßig wächst. (R. Ladenburg, a. a. O. 1913.) Allerdings ist nach den unten folgenden Darlegungen bei immer weiterer Stromsteigerung schließlich ein Konstantwerden der a. D. zu erwarten, nämlich dann, wenn innerhalb der Lebensdauer der H-Atome im Zustand $n = 2$ genügend häufige vernichtende Zusammenstöße mit Elektronen stattfinden.

[3] Vgl. auch die Versuche von H. B. Dorgelo, Physica **5**, 429, 1925; Zs. f. Phys. **34**, 766, 1926, über die Absorption und Lebensdauer angeregter Neon- und Quecksilberatome.

[4] Auch das He- und das Ne-Spektrum sind ja nach den neuen Erfahrungen als Tripletspektren anzusehen.

mit genügend schnellen Elektronen, und dieser Prozeß wächst proportional der Stromstärke. Können diese angeregten Atome nicht — oder nur selten — spontan zerfallen, so reichern sie sich bereits bei kleinen Stromstärken genügend an, um meßbare Effekte der a. D. zu geben[1]. Andererseits werden die angeregten metastabilen Atome häufig mit Elektronen zusammenstoßen, und dabei evtl. unmittelbar oder mittelbar durch einen Übergang in einen benachbarten nicht metastabilen Zustand vernichtet, und zwar muß dieser Prozeß rascher mit dem Strom steigen als die Anregung. Die beobachtete Sättigung zeigt den Strom an, bei dem ebensoviel Atome durch Elektronenstoß entstehen wie zerstört werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Elektronenstoß ein angeregtes Atom in andere Zustände übergeht, ist bei He, Ne und Hg, wo diese Zustände nahe beieinanderliegen, relativ groß. Speziell bei Ne, das bisher am genauesten untersucht wurde, sind von den nahe beieinanderliegenden vier s-Zuständen (vgl. Abb. 4) s_5, s_4, s_3 und s_2 (in neuer Bezeichnung ${}^3P_2$, ${}^3P_1$, ${}^3P_0$, ${}^1P_1$) der energieärmste s_5 und der mittlere s_3 metastabil, während s_4 und s_2 mit dem Normalzustand p_0 (${}^1S_0$) unter Emission der kürzlich von HERTZ und von LYMANN entdeckten, im äußersten Ultraviolett liegenden Linien 744 Å und 736 Å kombinieren[2]. Jedoch ist s_4 von s_2 dadurch unterschieden, daß der Übergang nach p_0 als Übergang von einem Triplet- zu einem Singletterm relativ selten ist[3], so daß die Lebensdauer von s_4, wenn auch wesentlich kleiner als die von s_5 und s_3, doch vermutlich viel größer als die von s_2 ist. Vielleicht könnte man den s_4-Zustand als »quasimetastabil« bezeichnen; tatsächlich sind die verschiedenen Zustände nur quantitativ voneinander unterschieden. Dies ist für das Verständnis der hier beschriebenen Erscheinungen wesentlich.

Für das statistische Gleichgewicht zwischen der Bildung und dem Zerfall der angeregten Atome sind ferner neben den spontanen mit Strahlung verbundenen Übergängen aus höheren Energiezuständen und den vernichtenden Wandstößen die Zusammenstöße mit Normalatomen von Bedeutung, die die angeregten Atome in andere, energetisch naheliegende Zustände überführen können, und zwar kommen nicht nur Übergänge in energieärmere, sondern

---

[1] Vgl. die analogen Überlegungen MEISSNERS (a. a. O. sowie Phys. Zs. **19**, 686, 1925), der aus der wesentlich verschiedenen Größe der Absorption der von verschiedenen s-Zuständen des Ne ausgehenden Linien die metastabilen von den andern unterschied. Wir werden hier ein weiteres Kriterium für die metastabilen Atome kennenlernen. Auch beim H mag die Metastabilität des 2_{11}-Zustandes (in der neuen Bezeichnung) die Ursache sein, daß wenigstens bei 100 Milliamp. die zum Nachweis der a. D. erforderliche Zahl von Atomen im Zustande $n = 2$ vorhanden ist — diese Überlegung ermutigte uns übrigens dazu, bei Gleichstromerregung an H nach a. D. zu suchen — allerdings stimmt der 2_{11}-Zustand energetisch so genau mit dem nicht metastabilen 2_{21}-Zustand überein, daß eine Unterscheidung dieser Zustände vielleicht keinen Sinn hat.

[2] Die bekannte Analogie der Ne-Niveaus zu denen des Hg äußert sich auch in der Stromabhängigkeit der a. D. bei diesen Gasen, bei Hg sind ebenfalls von den 4 Zuständen p_3, p_2, p_1 und P (${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3P_2$, ${}^1P_1$) der tiefste p_3 und der mittlere p_1 metastabil, während der Übergang $p_2 - S$ die Linie 2537 Å und $P - S$ die Linie 1849 liefert, die also ganz den obengenannten Resonanzlinien des Ne entsprechen.

[3] Nach BOHR (Ann. d. Phys. **71**, 251, 1923) und DE L. KRONIG (Zs. f. Phys. **33**, 261, 1925) ist eine solche »Interkombination« als ein Störungseffekt anzusehen und daher ihre Übergangswahrscheinlichkeit nach dem Korrespondenzprinzip relativ klein.

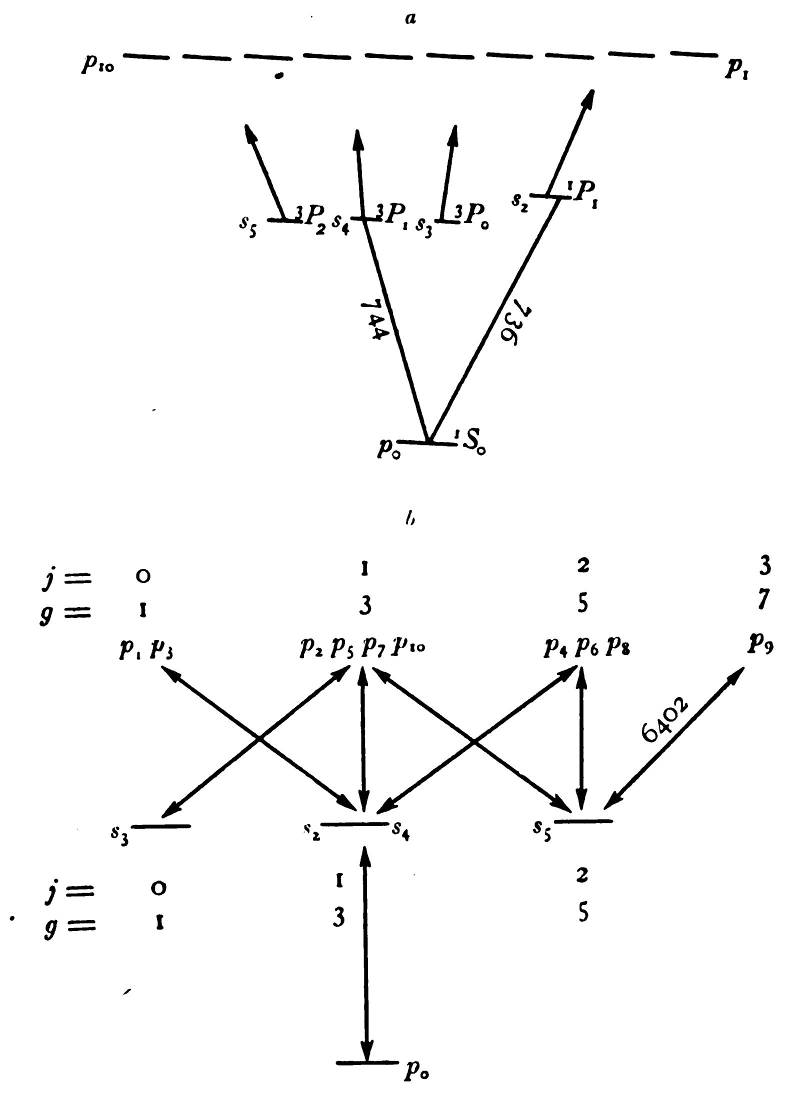


Abb. 4. Niveauschema des Neon.

auch in energiereichere Zustände in Betracht. Den Beweis für die Mitwirkung dieser Prozesse liefert der E i n f l u ß der T e m p e r a t u r. Erhöht man bei konstant gehaltenem Strom die Temperatur des Ne durch äußere Erwärmung des Rohres um nur 100°, so nimmt die Größe der a. D. bei den von s_5, s_4 und s_3 ausgehenden Linien meßbar — beiläufig um etwa 30 Prozent — ab[1]. Diese Temperaturwirkung hängt offenbar mit dem von Dorgelo[2] ge-

[1] Die genauen quantitativen Verhältnisse sollen mit einem Spezialrohr mit aufgeschmolzenen Endplatten untersucht werden. Aber auch bei den bisherigen Versuchen überzeugten wir uns durch geeignete Kontrollmessungen, daß nicht etwa durch die Temperaturerhöhung fremde Gasreste freigemacht werden, von denen ja Spuren genügen, um die a. D. wesentlich zu verringern (vgl. Ziffer 3).

[2] H. B. Dorgelo, Physica **5**, 429, 1925 spez. S. 439.

fundenen beträchtlichen Einfluß der Temperatur auf die Lebensdauer der s-Zustände des Ne zusammen, und mit der von Joffé und Franck gegebenen Erklärung: Die mittlere kinetische Energie der Atome von 400° abs. ist bereits von gleicher Größe (0.052 Volt) wie die Energieunterschiede der verschiedenen s-Zustände des Ne. ($E(s_5) - E(s_4) = 0.044$ V., $E(s_4) - E(s_3) = 0.0515$ V.), so daß nahezu jeder Zusammenstoß eines s_5- oder s_4-Atoms mit Normalatomen bei 400° zur Bildung höherer s-Zustände führen könnte; doch folgt aus der von Meissner und Dorgelo (a. a. O.) gemessenen Lebensdauer der s_5- und s_3-Atome (etwa 10^{-3} Sek.), daß diese eine große Zahl (mindestens 10^4) Zusammenstöße mit andern Neonatomen überleben bzw. dabei nur ihre Energie austauschen.

Bei Berücksichtigung der genannten Bildungs- und Zerfallsmöglichkeiten kann man, wenigstens qualitativ den beobachteten, in Abb. 5 dargestellten Verlauf der ρ-Werte der von verschiedenen s-Zuständen des Ne ausgehenden Linien mit wachsendem Strom verstehen[1]. Bei den stärkeren s_5- und s_3-Linien — d. s. die Linien, die relativ große a. D. unter den von den s_5- und s_3-Zuständen ausgehenden Linien zeigen — tritt der Effekt der a. D. bereits bei Bruchteilen eines M. A. deutlich auf. Die »stärkste« aller untersuchten Linien 6402 ($1s_5 - 2p_9$) liefert bei 0.4 M. A. und 4 mm Druck einen nach der »Hakenmethode« leicht und exakt meßbaren ρ-Wert von 10.10^{20} (der übrigens größer ist als die an anderen Linien bei den größten Stromdichten gefundenen ρ-Werte). Mit wachsendem Strom steigen die ρ-Werte der s_5- und s_3-Linien nicht etwa proportional, sondern wesentlich langsamer an und nähern sich bald einem Maximalwert, der bei den s_5-Linien bei etwa 8 M. A., bei den s_3-Linien bei etwa 16 M. A. erreicht wird und sich bei Steigerung auf 80 M. A. praktisch nicht mehr ändert (vgl. Abb. 5)[2]. Bei der stärksten s_4-Linie dagegen ($\lambda = 6506.5$) — deren »unteres Niveau« s_4 energetisch zwischen s_5 und s_3 liegt und nicht metastabil ist — wird der Effekt erst bei 1 M. A. meßbar (hier ist $\rho \sim 2.5 \cdot 10^{20}$), steigt zunächst rasch mit wachsendem Strom annähernd proportional, dann langsamer, und erreicht erst bei 30 M. A. seinen Sättigungswert ($\rho = 9.8 \cdot 10^{20}$), der nun sogar wesentlich größer als bei der »stärksten« s_3-Linie (6266) ist. Die Zahl der angeregten Atome im s_4-Zustande steigt also viel rascher mit wachsendem Strom als die Zahl der s_5- und s_3-Atome[3] (vgl. auch Abb. 3, in der Aufnahmen bei 4 Stromstärken 2, 8, 16 und 40 M. A. 3fach vergrößert reproduziert sind; während die Effekte an der s_5- und der s_3-Linie, 6143 bzw. 6164, mit wachsendem

---

[1] Bei der theoretischen Deutung dieser Erscheinungen haben uns die HH. I. Franck und R. Becker mit wertvollem Rat unterstützt, wofür wir ihnen auch an dieser Stelle unsern Dank aussprechen möchten. Vgl. zum Folgenden auch J. Franck, Naturw. **14**, 211, 1926.

[2] Der Unterschied zwischen dem Verhalten der s_5- und s_3-Linien beruht offenbar darauf, daß zur Vernichtung des s_5-Zustandes (Übergang nach s_4 oder s_2) Energiezufuhr erforderlich ist, zur Vernichtung des s_3-Zustandes (Überführung nach dem tieferen Niveau s_4) dagegen nicht, so daß die Häufigkeit solcher Stöße, die s_3 vernichten, größer ist und daher die Lebensdauer des s_3-Zustandes kleiner als die des s_5-Zustandes (vgl. Meissner und Dorgelo a. a. O.; vgl. ferner die Stromabhängigkeit der Linie $1S - 2p_1$ des Hg $\lambda = 2270$ und deren Deutung durch Takamine, Zs. f. Phys. **37**, 78, 1926).

[3] Die wahren Verhältnisse $N_5 : N_4 : N_3$ können aus diesen Messungen noch nicht ohne weiteres entnommen werden (vgl. Ziffer 4c).

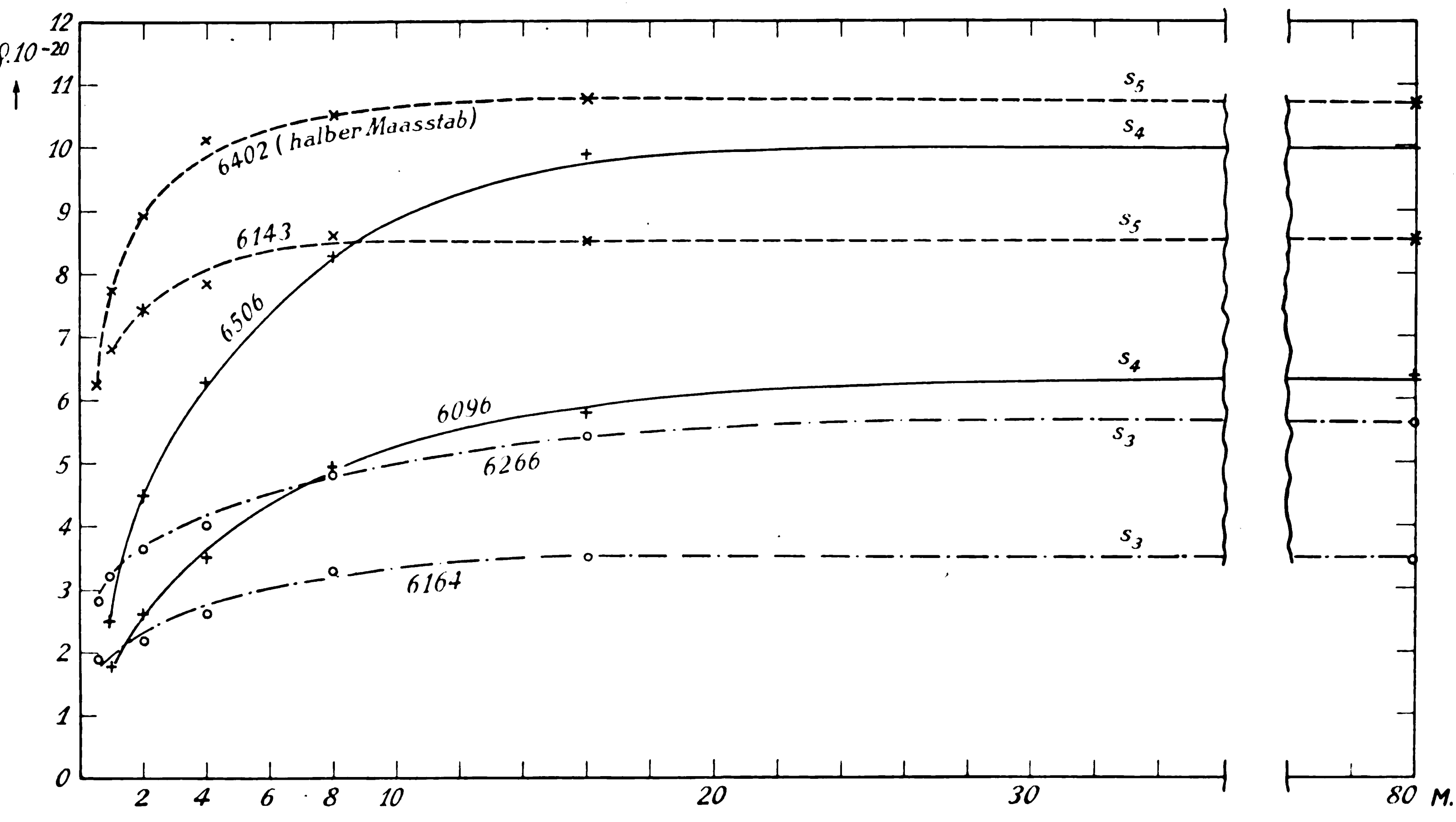


Abb. 5. Anstieg der ϱ-Werte der zu den verschiedenen s-Niveaus gehörigen Linien mit wachsender Stromstärke (in Milli-Ampère gemessen).

Strom nicht oder nur wenig ansteigen, sind sie an den s_4-Linien, 6096 und 6074, bei 2 M. A. kaum erkennbar und haben bei 40 M. A. den Effekt an der Linie 6164 bereits eingeholt bzw. überholt). Bei kleinem Strom zerfallen die s_4-Zustände infolge ihres spontanen Übergangs nach p_0 relativ schneller als die nur durch Stöße 2. Art zerstörten metastabilen s_3- und s_5-Atome[1]. Bei höherem Strom werden zwar mehr s_4-Zustände als bei kleinem Strom erzeugt, zugleich jedoch wird die Wahrscheinlichkeit von Zusammenstößen angeregter Atome mit Elektronen viel größer und wird schließlich von ähnlicher Größe wie die nicht allzu große spontane Zerfallswahrscheinlichkeit des s_4-Zustandes, so daß nun während der natürlichen Lebensdauer der s_4-Zustände vernichtende Zusammenstöße mit Elektronen stattfinden können und die Bedingungen des statistischen Gleichgewichts der (»quasi-metastabilen«) s_4-Zustände nicht wesentlich von denen der metastabilen s_5- und s_3-Zustände verschieden sind[2]. Wie in Ziffer 4c dargelegt wird, ist der bei großen Stromdichten schließlich erreichte Gleichgewichtszustand zwischen den Atomzahlen im s_5-, s_4 und s_3-Zustand wesentlich durch das Verhältnis ihrer statistischen Gewichte bestimmt[3].

Die Effekte an den s_2-Linien (der s_2-Zustand ist der energiereichste der s-Zustände) werden erst bei 40 M. A. einigermaßen meßbar, ihren Anstieg mit weitersteigendem Strom haben wir bisher noch nicht messend verfolgen können.

Weiteren Aufschluß über die Bildung und den Zerfall der angeregten Ne-Atome geben Untersuchungen über den Einfluß des Druckes und des Zusatzes fremder Gase auf die a. D., die z. Z. noch nicht abgeschlossen sind.

Weitere Ergebnisse.

4b. Relativwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Vergleicht man die Werte an den verschiedenen Linien des Ne, die von dem gleichen s-Zustand ausgehen, so erhält man bei bekanntem statistischen Gewicht die Relativwerte der spontanen Übergangswahrscheinlichkeiten A (vgl. Gleichung 3); die so gewonnenen Relativwerte sind tatsächlich unabhängig vom Strom, während die ρ-Werte selbst die eben beschriebene Änderung mit der Stromstärke zeigen. Die bisher erhaltenen Resultate sind folgende: den größten A-Wert unter den von s_5 ausgehenden Linien zeigt die Kombination $1s_5 - 2p_9$ (6402). Dies ist eine wahre »Resonanzlinie«[4], indem aus

[1] Vgl. die Messungen der Lebensdauer der s-Zustände des Neons von K. W. Meissner und H. B. Dorgelo (a. a. O.).

[2] Natürlich sind für das Gleichgewicht auch die durch Elektronenstöße bewirkten Übergänge $s_5 \rightarrow s_4$ und $s_3 \rightarrow s_4$ von Einfluß, die die s_4-Zustände nachliefern und mit wachsendem Strom zahlreicher werden. Die quantitative Durchrechnung des ziemlich komplizierten Gleichgewichtszustandes soll an anderer Stelle erfolgen.

[3] Bei der quantitativen Berechnung dieser Verhältnisse ist noch eine nicht bedeutende, aber merkliche Temperaturkorrektion zu berücksichtigen, da bei höheren Stromdichten eine meßbare Temperaturerhöhung des erregten Gases eintritt. Die thermoelektrisch an der Rohrwand gemessenen Temperaturen ergaben sich bei 10 M. A. zu 34° C, bei 60 M. A. zu 67° C.

[4] Vgl. die Resonanzversuche an leuchtendem Ne von de Groot (Naturw. S. 104, 1926).

p_9 ($^3D_3$) nur der eine spontane Übergang nach s_5 ($^3P_2$) stattfindet. Andererseits besitzt die »Interkombinationslinie« $1s_5 - 2p_5$ ($^3P_2 - {}^1P_1$) ($\lambda = 5975$) den relativ kleinsten A-Wert (~ 0.2 bezogen auf $A_{6402} = 1$). Unter den s_4-Linien hat die Linie 6074 ($1s_4 - 2p_3$, $^3P_1 - {}^3P_0$) weitaus den größten A-Wert — zwar kombiniert p_3($^3P_0$) außer mit s_4 auch mit s_2($^1P_1$)($\lambda = 6652$), doch ist dies eine außerordentlich schwache Interkombinationslinie, so daß 6074 praktisch auch als Resonanzlinie anzusehen ist. Die kleinsten A-Werte der s_4-Linien besitzen wieder die Interkombinationslinien $1s_4 - 2p_1$ ($^3P_1 - {}^1S_0$ $\lambda = 5400$)[1] und $1s_4 - 2p_5$ ($^3P_1 - {}^1P_1$ $\lambda = 6128$); ihre ρ-Werte sind so klein, daß wir vorläufig nur angeben können, daß ihre A-Werte $< 1/3$ bzw. $< 1/10$ des A-Wertes von 6074 sind[2].

Von besonderem Interesse sind die Verhältnisse der A-Werte verschiedener Glieder einer Serie. Wir haben mit der beschriebenen Quarzoptik speziell das 2. Glied der Serie $s_5 p_9$ untersucht ($\lambda = 3473$), deren 1. Glied 6402 ja den größten ρ-Wert der untersuchten Neonlinien besitzt. Es gelang aber nicht einen Effekt an dieser Linie nachzuweisen, so daß wir bisher nur sagen können, ihr ρ-Wert ist $< 1/7$ des ρ-Wertes von 6402. Auch am 2. Glied der $P-D$-Kombination des He ($\lambda = 4472$), dessen 1. Glied die »Resonanzlinie« 5876 einen besonders großen ρ-Wert liefert, konnten wir keine a. D. nachweisen, so daß ρ_{4472}/ρ_{5876} jedenfalls $< 1/5$ ist.

Bei Wasserstoff haben wir außer an H_α auch an H_β deutliche a. D. feststellen, aber noch keine quantitativen Messungen ausführen können. Da hier am ehesten theoretische Berechnungen der A-Werte möglich sind[3], haben wir die genauere Untersuchung der a. D. an den Balmer-Linien in Angriff genommen.

4c. Berechnung der Atomzahlen in den s-Zuständen des Ne und der Absolutwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Um aus der a. D., die ja nur das Produkt $N_j \cdot A_{kj}$ liefert, die Einzelwerte des N und A zu entnehmen, ist eine neue Annahme oder eine anderweitige Messung erforderlich. Der beste Weg scheint die Verwertung des f-Summensatzes von Thomas, Kuhn und Reiche[4], worauf uns Hr. F. Reiche freundlicherweise hinwies. Dieser Satz sagt aus, daß

$$\text{(6a)} \quad \sum f^a - \sum f^e = \frac{l}{3} = \text{Anzahl der Freiheitsgrade geteilt durch } 3.$$

[1] p_1($^1S_0$) kombiniert außer mit s_4 nur noch mit s_2($^1P_1$) und diese Linie ($\lambda = 5852$) ist wieder sehr intensiv: sie entspricht in gewisser Weise der Linie 6074, während 5400 der Linie 6652 entspricht.

[2] Andere »Interkombinations«-Linien wie 6506 ($1s_4 - 2p_8$, $^3P_1 - {}^1D_2$) u. 6266 ($1s_3 - 2p_5$, $^3P_0 - {}^1P_1$) besitzen allerdings relativ große A-Werte, — bekanntlich ist die Zuordnung der p-Terme des Neons zum Singlet- und Tripletsystem nicht streng durchführbar.

[3] Vgl. R. Ladenburg und F. Reiche a. a. O. Wie wir von den HH. Schroedinger und W. Pauli hören, kann man nach der neuen Schroedingerschen Quantentheorie bereits die A-Werte der Wasserstofflinien berechnen, obzwar sie hier nicht die Bedeutung von Übergangswahrscheinlichkeiten besitzen.

[4] W. Thomas, Naturw. **13**, 627, 1925; W. Kuhn, Zs. f. Phys. **33**, 408, 1925; F. Reiche und W. Thomas, Zs. f. Phys. **34**, 510, 1925.



Hier bedeuten die f die in Gleichung (3) definierten Oszillatorenstärken[1], d. h. die Zahl der Dispersionselektronen pro Atom, die Summen $\sum$ sind über alle von dem betrachteten Atomzustand aus möglichen Quantenübergänge zu erstrecken, und zwar bezieht sich der Index a auf Absorptionsübergänge, der Index e auf Emissionsübergänge. Multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{4\pi e^2}{m} N_j$, so erhalten wir links nach Gleichung (2a) und (3) die Summen der ρ-Werte, also

$$\sum_k \rho_{jk} - \sum_i \rho_{ji} = l N_j 4\pi e^2/3m. \tag{6b}$$

Wenn also sämtliche ρ-Werte der von einem Zustande j ausgehenden Absorptionslinien ν_{kj} und der Emissionslinien ν_{ji} bekannt sind, kann man N_j, d. h. die Atomzahl im betrachteten Zustande j absolut berechnen.

Diese Berechnung ist bei Ne bisher streng nicht durchführbar, weil nur die ρ-Werte für die Linien $s_i - 2p_k$ vorliegen, während die Kombinationen der s_i-Terme mit höheren p-Termen so kleine ρ-Werte liefern, daß sie nicht gemessen werden konnten (vgl. Ziffer 4b). Wir wissen nur, daß bereits für die $1s_5 - 3p_9$-Linie der ρ-Wert klein gegen das 1. Glied $1s_5 - 2p_9$ ist, für die folgenden daher sicherlich noch kleiner. Wir wollen deshalb zunächst nur die Verhältnisse der N-Werte für die verschiedenen s-Terme des Neons berechnen und dafür einfach alle höheren Kombinationen weglassen und die Verhältnisse der Summen $\sum_{k=1}^{10} \rho(s_i - 2p_k)$ für die drei Zustände s_5, s_4 und s_3 bilden; der Fehler, den wir dabei begehen, ist sehr gering, falls die Summe der ρ-Werte der höheren Serienglieder (und des anschließenden kontinuierlichen Spektrums, von dem wir zur Zeit freilich fast nichts wissen[2]) für die verschiedenen s_i-Terme annähernd den gleichen Bruchteil des jeweils ersten Gliedes bildet. Der auf der rechten Seite der Gleichung (6b) stehende Faktor $l 4\pi e^2/3m$ ist natürlich für die drei s-Zustände des Neons identisch[3]. Das negative »Emissionsglied« auf der linken Seite ist für die metastabilen s_5- und s_3-Zustände praktisch 0, von seinem Werte für den s_4-Zustand wird gleich näher zu sprechen sein.

Die Messungen ergaben in reinem Ne bei 4 mm Druck als Sättigungswerte (Strom > 10 M. A.) für den s_5-Term:

$$\sum_{k=1}^{10} \rho(1s_5 - 2p_k) = 53 \cdot 10^{20}$$

---

[1] Nämlich $f^a = A_{kj} \frac{g_k}{g_j} \frac{\tau_{kj}}{3}$, $f^e = A_{ji} \frac{\tau_{ji}}{3}$.

[2] H. A. Kramers hat die Wirkung des kontinuierlichen Spektrums durch einen Oszillator ersetzt und dessen »Stärke« f bei He zu mehreren Einheiten abgeschätzt (s. H. A. Kramers und W. Heisenberg, a. a. O., spez. S. 694, Anm. 1).

[3] Wir benutzen mithin zur Berechnung der Verhältnisse der N-Werte die Behauptung, daß die Summe $\sum_k \rho(s_i - 2p_k)$ proportional der Atomzahl $N(s_i)$ ist. Diese Behauptung ist, wie man leicht nachrechnen kann, mit der 2. von Dorgelo an den Neonlinien gefundenen Summenregel (vgl. Physica 5, 98, 1925) identisch, falls die Atomzahlen der oberen Zustände ($N(p_k)$) im Verhältnis der Quantengewichte dieser Zustände stehen.

bei 0.3 M. A. etwa 30.10^{20}. Ferner ergab sich als Sättigungswert für s_3:

$$\sum_1^{10}{}_k \rho(1s_3 - 2p_k) = 14.10^{20},$$

bei 0.3 M. A.: 6.10^{20}.

Für den s_4-Term entsteht eine gewisse Unsicherheit durch den möglichen Emissionsübergang $s_4 - p_0$ ($\lambda = 744$ Å), dessen ρ-Wert natürlich unbekannt ist. Da diese Linie, wie oben dargelegt, der Linie 2537 des Hg entspricht und ihre Übergangswahrscheinlichkeit relativ klein ist, kann angenommen werden, daß ihr $\mathfrak{N}$-Wert kleiner als etwa $^1/_{20} N(s_4)$ ist, und daher für unsere Rechnung keine Rolle spielt[1]. Die Messungen ergaben als Sättigungswert (bei mehr als 30 M. A.)[2]:

$$\sum_1^{10}{}_k \rho(1s_4 - 2p_k) = 35.10^{20}.$$

Bei 0.3 M. A. ist die Summe höchstens $^1/_{10}$ so groß, also noch kleiner als für s_3. Bei sehr kleinem Strom sind mithin die s_4-Zustände sicherlich wesentlich weniger zahlreich vorhanden als die metastabilen s_3- und s_5-Zustände. Dies gilt a fortiori für die s_2-Zustände. Erst bei 40 M. A. wurden die ρ-Werte der stärksten zu s_2 gehörigen Linien eben meßbar[3]; daher ist die zugehörige Summe:

$$\sum_1^{10}{}_k \rho(s_2 - 2p_k) - \rho(s_2 - p_0)$$

und deshalb die ihr annähernd proportionale Zahl der Atome im s_2-Zustand bei schwachem Strom zweifellos noch wesentlich kleiner als die Atomzahl im s_4-Zustande, zumal das negative Glied, das zur Hauptresonanzlinie $s_2 - p_0$ ($\lambda = 736$ Å) gehört, wegen der großen Übergangswahrscheinlichkeit vermutlich wesentlich größer als für $s_4 - p_0$ ist. Entsprechend klein ist die Lebensdauer dieses s_2-Zustandes, und daher ist bei schwachem Strom die Wahrscheinlichkeit eines vernichtenden Zusammenstoßes eines angeregten s_2-Atoms mit Elektronen sehr gering. so daß die Zahl der s_2-Atome mit wachsendem Strom rasch ansteigt. Die s_4-Atome werden mit ihrer größeren Lebensdauer bereits häufigere Zusammenstöße mit Elektronen erleiden, wie dies in Ziffer 4a näher ausgeführt wurde, und ihre Zahl steigt deshalb mit wachsendem Strom langsamer an als die Zahl der s_2-, aber noch wesentlich rascher als die der metastabilen s_3- und s_5-Atome, und bei Strömen über 30 M. A. haben die s_4-Atome die s_3-Atome an Zahl längst überholt! Für diesen Sättigungszustand

[1] Für die Hg-Linie 2537 ist $\mathfrak{N}/N$ etwa $^1/_{40}$, für die entsprechende Cd-Linie etwa $^1/_{500}$ (vgl. W. Kuhn, Naturw. **14**, 48, 1926). Aus obigem Wert würde für die Lebensdauer des s_4-Zustandes mehr als 10^{-8} Sek. folgen: allerdings ist vermutlich der Wert viel größer, da die Stromabhängigkeit der ρ-Werte der s_4-Linien lehrt (vgl. Ziffer 4a), daß bereits bei 10 M. A. innerhalb der Lebensdauer vernichtende Elektronenstöße stattfinden.

[2] Setzt man oben das Verhältnis $\mathfrak{N}(744)/N(s_4) = {}^1/_5$ statt $< {}^1/_{20}$, so würde die Berücksichtigung des negativen Gliedes für die Linie 744 die Summe doch erst auf 28.10^{20} erniedrigen.

[3] Ebenso ist die Absorption der s_2-Linien auch bei mäßigem Strom noch sehr klein, während die Absorption der s_4-Linien bereits beträchtliche Werte angenommen hat (vgl. Meissner und Dorgelo a. a. O.).

finden wir nun aus den Verhältnissen der Summen der gemessenen ρ-Werte für die s_5-, s_4- und s_3-Zustände die Werte $N(s_5) : N(s_4) : N(s_3) \backsim 100 : 66 : 26$, also annähernd die Verhältnisse der statistischen Gewichte $5 : 3 : 1$.

Eine wichtige Bestätigung dieses — infolge der noch erforderlichen Annahmen etwas unsicheren — Schlusses erhält man, indem man die Intensitätsverhältnisse der Neonlinien, die Dorgelo an einer Ne-Säule bei großer Stromdichte bestimmt hat[1], mit den hier gefundenen ρ-Werten kombiniert. Für die Intensität einer Linie $k \rightarrow j$ gilt der bekannte Ausdruck $J_{kj} = N_k A_{kj} h\nu_{kj}$. Vergleicht man also 2 Linien mit gleichem oberen Niveau k und verschiedenem unteren Niveau j_1 und j_2 und kombiniert die zugehörigen ρ- und J-Werte, so folgt auf Grund unserer Formel (3), indem sich die A-Werte herausheben,

$$(7) \qquad \frac{N_{j_1}}{N_{j_2}} = \frac{\rho_{kj_1}}{\rho_{kj_2}} \cdot \frac{g_{j_1}}{g_{j_2}} \cdot \frac{J_{kj_2}}{J_{kj_1}} \left(\frac{\lambda_{kj_2}}{\lambda_{kj_1}}\right)^3.$$

Die Intensitätsverhältnisse $\frac{J_{kj_2}}{J_{kj_1}}$ sollten theoretisch unabhängig von der Anregung sein; und in der Tat haben dies kürzlich Dorgelo und de Groot[2] bestätigt, indem sie annähernd die gleichen Werte für diese Intensitätsverhältnisse wie in der Säule bei Anregung des Ne im Glimmlicht bzw. durch Elektronenstöße oder durch Einstrahlung (Fluoreszenz) fanden.

Allerdings werden die gemessenen Werte etwas durch die verschieden starke Selbstabsorption der Linien gestört sein[3]. Auch leiden die zur Berechnung verwendeten Verhältnisse der ρ-Werte unter der Ungenauigkeit der Einzelwerte. Immerhin zeigen die vorliegenden Ergebnisse, daß die Quotienten der ρ-Werte der vom gleichen oberen Niveau ausgehenden Linien den Intensitätsverhältnissen der gleichen Linien annähernd proportional sind, wie es nach Gleichung (7) sein sollte, wenn die Wellenlängen der betrachteten Linien nahe gleich und die Atomzahlen N der verschiedenen j-Niveaus sich wie ihre Quantengewichte verhalten. Im Mittel der allerdings stark schwankenden Werte ergab sich

$$N_{s_5} : N_{s_4} : N_{s_3} = 100 : 66 : 19,$$

praktisch also mit den Verhältnissen der Quantengewichte $100 : 60 : 20$ übereinstimmend.

Dies Resultat scheint uns sehr bemerkenswert; denn bei schwachem Strom sind nach unseren ρ-Messungen (s. Ziffer 4a) die Verhältnisse gänzlich andere, die s_4-Zustände z. B. sind relativ zu den metastabilen s_5-Zuständen äußerst selten, die Zahl der verschiedenen Atomzustände ist hier wesentlich durch ihre Lebensdauer bestimmt. Mit wachsendem Strom jedoch nehmen die nicht metastabilen Zustände viel rascher an Zahl zu als die metastabilen,

---

[1] H. B. Dorgelo, Physica 5, 90, 1925; s. auch Phys. Zs. 26, 786, 1925. Es ist bemerkenswert, daß nach de L. Kronig (Zs. f. Phys. 33, 262, 1925) die Proportionalität von Atomzahl und statistischem Gewicht Voraussetzung für die korrespondenzmäßige Ableitung der Summenregeln ist, die D. hier gefunden hat (vgl. auch H. B. Dorgelo und W. de Groot, Zs. f. Phys. 36, 897, 1925).

[2] H. B. Dorgelo und W. de Groot, Zs. f. Phys. 36, 897, 1926.

[3] Diese Frage wird zur Zeit näher untersucht.

die durch den Charakter und die Übergangsmöglichkeiten der verschiedenen Zustände bedingten Unterschiede verschwinden mehr und mehr, und schließlich bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus, wie er den Gesetzen der Statistik entspricht (denn in der Formel für die statistische Verteilung der Atomzustände[1] [vgl. Gleichung 8] ist die Exponentialfunktion wegen der geringen Energieunterschiede der s-Zustände annähernd gleich 1 zu setzen).

Es ist demnach nicht unberechtigt — wie man es früher häufig tat — von einer »spezifischen« Temperatur einer solchen elektrischen Entladung zu sprechen und gewisse Gesetzmäßigkeiten des Temperaturgleichgewichts auf die Strahlungsvorgänge einer leuchtenden elektrischen Entladung zu übertragen[2].

Um auch den Absolutwert der Atomzahlen in den angeregten s-Zuständen abzuschätzen, setzen wir im f-Summensatz (6) für l den Wert 3 und nehmen an, daß die Summe der ρ-Werte für die höheren Glieder $\leq {}^1/_3$ der Summe der ersten Glieder ist[3]. Dann folgt, daß bei Sättigung und 4 mm Druck N_{s_5} zwischen 17 und 22.10^{11} liegt. Da bei gleichem Druck etwa 1.4×10^{17} Normalatome vorhanden sind, würden sich (bei starkem Strom) etwa ${}^1/_{50000}$ davon im s_5-Zustande befinden — entsprechend weniger in den s_4- und s_3-Zuständen. Aus der Formel

$$\frac{N}{N_0} = \frac{g_j}{g_0} e^{-\frac{E_j - E_0}{k\vartheta}} \tag{8}$$

berechnet sich somit im Maximum eine »spezifische Temperatur«[4] $\vartheta \sim 15100°$. Natürlich hat dieser Wert mit der wahren Temperatur des Gases nichts zu tun, wie man schon aus dem in Ziffer 4a beschriebenen Einfluß ersieht, den eine Temperaturerhöhung von nur 100° auf die Dispersion, d. h. auf die Zahl der angeregten Atome ausübt.

Schließlich kann man aus den Absolutwerten der N_{s_i} auch die Absolutwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten A_{kj} abschätzen. So ergibt sich für die Resonanzlinie »6402« ($s_5 - p_9$) mit $\rho = 22 \cdot 10^{20}$ und $N_{s_5} = 22.10^{11}$ der Wert

$$A_{6402} = 0.66/\tau = 4.10^7;$$

der reziproke Wert davon stellt die Lebensdauer der p_9-Zustandes vor, die also hier nahe gleich der Abklingungszeit des Ersatzoszillators ist. Und für die Stärke des Ersatzoszillators pro Atom folgt

$$f_{6402} = \mathfrak{N}_{6402}/N_{s_5} = 0.3 .$$

---

[1] Bei der hier erreichten Stromdichte von 80 M.A. ist dieser Gleichgewichtszustand allerdings nur für die s_5-, s_4- und s_3-Atome erreicht, dagegen noch nicht für die s_2-Atome.

[2] Vgl. z. B. A. Pflüger, Ann. d. Phys. **26**, 789, 1908, ferner E. Pringsheim u. a.

[3] Allerdings entsteht jetzt durch die Unkenntnis des für das kontinuierliche Spektrum an der Seriengrenze gültigen ρ-Wertes eine beträchtliche Unsicherheit, die über 100 Prozent der errechneten N- und A-Werte betragen kann.

[4] Vgl. die Berechnung einer »spezifischen Temperatur« in elektrisch erregtem Helium bei F. Paschen, Ann. d. Phys. **45**, 654, 1914.

Ebenso folgen für die Linie 6074 ($1s_4 - 2p_3$), die praktisch auch als Resonanzlinie anzusehen ist (vgl. o. S. 268), mit

$$\rho = 4.2 \cdot 10^{20}, \quad N_{s4} = 13 \cdot 10^{11}$$

die Werte:

$$A_{6074} = 0.9/\tau = 5.4 \cdot 10^7 \quad \text{und} \quad f_{6074} = \mathfrak{N}_{6074}/N_{s4} = 0.1\,,$$

so daß die Lebensdauer des p_3-Zustandes nahe dieselbe wie die des p_9-Zustandes ist. Frühere Untersuchungen an den Resonanzlinien des Na (der D-Linien) hatten fast vollkommene Übereinstimmung der Lebensdauer des $2p_2$- und $2p_1$-Zustandes des Na-Atoms mit der Abklingungszeit der entsprechenden Oszillatoren ergeben[1].

Einen Teil der hier benutzten Apparate haben uns die Japanstiftung und der Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle unsern ganz besondern Dank aussprechen möchten.

Dahlem im Mai 1926.

[1] Siehe R. Ladenburg und R. Minkowski, Zs. f. Phys. **6**, 164, 1921. Dies Ergebnis wurde kürzlich völlig bestätigt von R. Minkowski, Zs. f. Phys. **36**, 839, 1926.

Ausgegeben am 18. August.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 8. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Guthnick sprach über die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie und legte eine von Hrn. Prager und ihm verfaßte Abhandlung über diesen Gegenstand vor.

In ihrer Arbeit legen die Verfasser ihre Erfahrungen mit kurzbrennweitigen photographischen Objektiven nieder und entwickeln den Plan einer beständigen photographischen Überwachung des Himmels, die auf den drei Sternwarten Berlin-Babelsberg, Bamberg und Sonneberg demnächst aufgenommen werden soll. Zur Illustrierung der Aussichten dieses Planes werden die Ergebnisse der Untersuchung des Lichtwechsels von acht neuen Veränderlichen kurzer Periode mitgeteilt, die von ihnen auf Aufnahmen mit einem Ernostar von 135 mm Öffnung und 240 mm Brennweite gefunden wurden.

2. Hr. Einstein sprach über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes. (Ersch. später.)

Unter der Voraussetzung, daß das von einer ausgedehnten Lichtquelle emittierte Licht Eigenschaften zeigt, die von der Entfernung der Lichtquelle vom Beobachtungsapparat unabhängig sind, wird gezeigt, daß die an Kanalstrahllicht beobachtbaren Interferenzerscheinungen der elektromagnetischen Theorie genau entsprechen müssen. Es kann also nicht erwartet werden, daß sich die Quantennatur der Ausstrahlung bei diesen Erscheinungen äußert. Zwei Beispiele werden genauer betrachtet.



Die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie.

(Acht neue Veränderliche kurzer Periode.)

Von P. Guthnick und R. Prager.

Vor zwei Jahren wurde für die Sternwarte Berlin-Babelsberg ein Tachar der Astro G. m. b. H. erworben, das für kinematographische Zwecke berechnet worden war. Der freie Durchmesser dieses vierteiligen photographischen Objektives beträgt 100 mm, seine Brennweite 250 mm. Diese Erwerbung war der Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von Versuchen mit verschiedenen kurzbrennweitigen Objektiven, deren Verwendbarkeit für astronomische Aufgaben festgestellt werden sollte. Wir prüften ein Zeiß-Tessar von 300 mm Brennweite und einem Öffnungsverhältnis von 1 : 3.5, ein Zeiß-Triotar von 210 mm Brennweite und demselben Öffnungsverhältnis, zwei Ernostare der Firma Ernemann von 160 mm und 240 mm Brennweite und einem Öffnungsverhältnis von 1 : 1.8. Endlich standen uns Aufnahmen zur Verfügung, die Hr. Cuno Hoffmeister auf seiner Sternwarte auf dem 640 m hohen Erbisbühl bei Sonneberg i. Thür. mit einem der Sternwarte Berlin-Babelsberg gehörenden älteren Busch-Objektiv von 80 mm Öffnung und dem Öffnungsverhältnis 1 : 2.5 gemacht hatte. Das Tessar, das Triotar und das kleinere Ernostar waren der Sternwarte Berlin-Babelsberg von den Firmen leihweise überlassen worden. Das Tessar und das größere Ernostar wurden dann für die Sternwarte angekauft.

Unsere erste Absicht war, mit einem möglichst geeigneten Objektiv den photographischen Nachweis der vielumstrittenen Hagenschen dunklen Nebelwolken zu versuchen. Es stellte sich jedoch alsbald heraus, daß in unseren dichtbewohnten Gegenden mit ihrer beträchtlichen künstlichen Beleuchtung, und vollends in den hellen Sommernächten, Objektive mit Öffnungsverhältnissen von mehr als 1 : 3 für photographische Aufnahmen sehr schwacher Nebel keinen Vorteil bieten, indem die von uns für die Versuche benutzten hochempfindlichen Platten (Isodux von Herzog und Co.) schon nach verhältnismäßig kurzer Belichtung sehr stark schleierten. Für das Ernostar mit seinem enormen Öffnungsverhältnis von 1 : 1.8 ist in Babelsberg unter den günstigsten Umständen die längste mögliche Belichtungsdauer wohl nicht viel

mehr als eine Stunde. Für Nebelaufnahmen sollte man daher unseres Erachtens nicht über ein Öffnungsverhältnis von 1 : 3.5 oder allerhöchstens 1 : 3 gehen. Die Erfahrungen auf dem Erbisbühl lassen uns bezweifeln, daß selbst unter den günstigsten Bedingungen ein größeres Öffnungsverhältnis einen wirklichen Vorteil gewähren würde. Ferner fanden wir, daß für die Aufnahmen ausgedehnter Nebel ebenso zwecklos ein sehr großes brauchbares Gesichtsfeld sein würde, da dieses nur auf Kosten der Bildschärfe in der näheren Umgebung der optischen Achse erzielt werden kann. Unzweifelhaft geeigneter ist vielmehr ein Objektiv, das innerhalb eines mäßig großen Bereichs eine möglichst gute Vereinigung der Strahlen gibt, wenn auch darüber hinaus die Bildqualität schnell abnimmt. Infolge des kleinen Maßstabes, den Aufnahmen mit solchen Objektiven haben, werden nämlich die Bilder der auf die Nebel projizierten oder in dieselben eingehüllten helleren Sterne, wenn die Strahlenvereinigung nicht sehr gut ist, übermäßig groß und überdecken beträchtliche Teile der Nebel. Auch für die Wiedergabe der feinen Struktur der Nebel ist die Definition des Objektives in der Umgebung der optischen Achse von größter Bedeutung. In dieser Beziehung fanden wir das auf 80 mm (Öffnungsverhältnis 1 : 3.1) abgeblendete Tachar am geeignetsten. Die von ihm gezeichneten Sternbildchen sind innerhalb eines Kreises von etwa 5° Radius um die optische Achse außerordentlich klein und scharf. Darüber hinaus nimmt die Bildqualität schnell ab. Ähnlich verhält sich das alte Busch-Objektiv, das ebenfalls in der Nähe der optischen Achse ganz ausgezeichnete Bilder liefert, bei dem aber der Abfall der Bildqualität mit zunehmender Entfernung von der optischen Achse nach Überschreitung der Grenze des Gebietes guter Abbildung noch schroffer erfolgt. Triotar, Tessar und Ernostar haben ein größeres brauchbares Gesichtsfeld, aber die Bildqualität in der Mitte desselben ist geringer als beim Tachar und beim Busch-Objektiv.

Mit der Feststellung des unerwartet starken Einflusses der allgemeinen Helligkeit des Himmelsgrundes schien uns die Aussicht zu schwinden, den Nachweis der Hagenschen dunkeln Nebelwolken auf photographischem Wege erbringen zu können. Dafür eröffnete sich aber für diese Objektive ein anderes, größeres Arbeitsfeld: die Möglichkeit einer weitreichenden beständigen Überwachung der isolierten Veränderlichen und überhaupt einer beständigen Kontrolle des ganzen in unseren Breiten zugänglichen Himmels mit einem verhältnismäßig nicht allzu großen Arbeits- und Kostenaufwand. Es ist ja bekannt, daß die beständige Kontrolle der jetzt bereits die Zahl von rund 2700 erreichenden als gesichert geltenden Veränderlichen, zu denen noch über 1000 nicht gesicherte hinzukommen, von den Beobachtern veränderlicher Sterne längst nicht mehr durchgeführt werden kann. Von einem vollen Drittel der in dem V. J. S.-Katalog für 1926 enthaltenen gesicherten Veränderlichen ist sogar nicht mehr als die Tatsache der Veränderlichkeit bekannt. Jedes Jahr kommen Hunderte von Neuentdeckungen hinzu, die zum größten Teil ebenso vernachlässigt werden müssen wie die Mehrzahl der älteren Veränderlichen. Die Zahl der nicht benannten, der anderweitigen Bestätigung noch bedürftigen Veränderlichen wächst beängstigend an. Aus diesem allmählich

unhaltbar werdenden Zustande bietet die Möglichkeit einer beständigen photographischen Überwachung des Himmels einen gangbaren Ausweg. Für ihre praktische Durchführbarkeit und ihre Wirksamkeit sind nun folgende Bedingungen zu erfüllen. Mit einer Belichtungszeit von höchstens einer Stunde muß die Größe 14 oder mindestens 13¹/₂ erreicht werden, damit fast alle bekannten isolierten Veränderlichen wenigstens im Maximum über die untere Helligkeitsgrenze der Aufnahmen treten. Durchschnittlich mindestens einmal im Monat muß der ganze zugängliche Himmel mit Aufnahmen überdeckt werden. Der Maßstab der Aufnahmen muß so klein sein, daß ein Areal von mindestens 30° im Durchmesser noch auf eine Platte handlichen Formats abgebildet werden kann. Das Plattenformat darf keinesfalls das für normale Stereokomparatoren und Blinkvorrichtungen vorgesehene Größtformat überschreiten. Je kleiner das Plattenformat, desto besser, da große Platten im Massenbetrieb zu unhandlich und zu kostspielig sind; außerdem werden bei größeren Platten, wenn sie nicht Spiegelglasplatten sind, die Unebenheiten so groß, daß infolge dieses Umstandes nach unseren Erfahrungen ein sehr häufiges Mißlingen der Aufnahmen zu erwarten ist. Spiegelglasplatten kommen wegen der hohen Kosten und des großen Bedarfs an Platten nicht in Betracht. Die Beschränkung auf ein kleineres Areal würde die Zahl der für eine vollständige Überdeckung des Himmels notwendigen Aufnahmen stark anschwellen lassen. Das ungünstige mitteleuropäische Klima und die Kürze unserer Sommernächte zwingt im Gegenteil zur möglichsten Herabsetzung der Zahl der notwendigen Aufnahmen. Der Maßstab der Platten darf andererseits nicht so klein sein, daß in sternreichen Gegenden die Sterne allzu dicht aufeinanderrücken. Wir fanden eine Brennweite von etwa 250 mm hinreichend.

Die vorgenannten Bedingungen lassen sich gleichzeitig nur erfüllen durch die Wahl eines Objektives von möglichst großem Öffnungsverhältnis und zugleich einem großen ebenen Gesichtsfeld. Wir entschieden uns deshalb schließlich für das Ernostar von 135 mm Öffnung und 240 mm Brennweite. Mit diesem Objektiv erreichen wir bei nur halbstündiger Belichtung unter normalen Verhältnissen die Größe 13¹/₂ in der internationalen Skala, unter günstigsten Umständen vielleicht sogar die Größe 14. Das brauchbare Gesichtsfeld hat einen Durchmesser von rund 40°, ist aber mit dem Abstand von der optischen Achse von ziemlich stark wechselnder Qualität. Wahrscheinlich werden wir dieses Ernostar durch ein uns in Aussicht gestelltes anderes, etwas umgerechnetes, ersetzen können, das ein Feld von etwas mehr als 30° sehr gleichmäßig abbilden soll. Ein Plattenformat von 16×16 cm reicht für unsere Zwecke vollkommen aus. Es ist jährlich mit rund 1000 Aufnahmen für die Überwachung des Himmels zu rechnen. Die Schwierigkeiten, die sich aus den Unebenheiten der gewöhnlichen Platten ergeben, und die auch bei dem gewählten mäßigen Plattenformat bereits ins Gewicht fallen, da das Ernostar schon gegen sehr kleine Fokusabweichungen außerordentlich empfindlich ist, hoffen wir durch eine besondere Konstruktion der Kassetten im wesentlichen beseitigen zu können.

Wie schon bemerkt, sollen die beabsichtigten fortlaufenden Aufnahmen nicht nur der Überwachung der bekannten Veränderlichen dienen, sondern eine beständige Kontrolle des Himmels überhaupt ermöglichen. Es sollen auf ihnen ferner unter dem Blinkmikroskop nach und nach alle noch unbekannten Veränderlichen, die die untere Helligkeitsgrenze der Platten überschreiten, ermittelt werden. Es muß daher der Arbeitsplan von vornherein dementsprechend angelegt werden. Mit Rücksicht auf diese verschiedenen Aufgaben ist nach vielfachen Erwägungen schließlich folgendes Arbeitsprogramm zustande gekommen, das die Mitwirkung noch zweier Beobachter an geeigneten anderen Stellen Deutschlands erfordert. Ihre Mitwirkung haben bereits fest zugesagt Hr. Prof. Dr. Zinner für die Bamberger Sternwarte und Hr. Cuno Hoffmeister für die Sonneberger Sternwarte auf dem Erbisbühl. Letzterer wird wegen der hohen Lage seiner Beobachtungsstation den südlichsten Teil des Himmels, etwa vom Äquator bis $-30°$ oder $-35°$ Deklination übernehmen, während Bamberg die Zone $-20°$ bis $+12°$ und zwei nördliche Zonen, Babelsberg drei nördliche Zonen und den Nordpol selbst zu überwachen haben werden. Die Zentren der Bamberger Platten sollen mit den Ecken der Babelsberger Platten zusammenfallen, so daß möglichst viele Sterne einmal in die Nähe der Mitte der Platten kommen. Der größte Teil des Himmels wird so mit jeder vollständigen Aufnahmereihe, die nach Möglichkeit mindestens einmal im Monat durchgeführt werden soll, praktisch zweimal überdeckt sein. Eine vollständige Aufnahmereihe soll 81 obligatorische Aufnahmen umfassen, die also den Himmel vom Nordpol bis etwa $-35°$ (mehr als $^3/_4$ des ganzen Himmels) überdecken. Wenn möglich, sollen auf dem Erbisbühl über das obligatorische Programm hinaus noch 12 weitere Aufnahmen gemacht werden, deren Zentren bei der gleichen Deklination und in Rektaszension zwischen den Mittelpunkten der obligatorischen Platten liegen werden, um auch für den südlichsten Teil des Himmels Doppelüberdeckung zu erhalten. Die Dauer der Belichtung soll für die Bamberger und Babelsberger Aufnahmen $0^h.5$, für die Sonneberger Aufnahmen 1^h sein, um die für die Südplatten erheblich größere Extinktion zu kompensieren. An allen drei Stationen soll ein Ernostar von 135 mm Öffnung und 240 mm Brennweite und die gleiche Plattensorte benutzt werden, so daß das erhaltene Beobachtungsmaterial sehr homogen sein wird. Die gewonnenen Aufnahmen sollen nach Möglichkeit sofort unter dem Blinkmikroskop auf auffällige Neuerscheinungen oberflächlich abgesucht werden. Die erschöpfende Durchmusterung der Platten kann natürlich nicht gleichen Schritt mit dem Zuwachs halten, da bereits das einfache Durchblinken eines Aufnahmepaares von einer sternarmen Gegend 12 bis 15 Stunden beansprucht, die Zeit ungerechnet, die zur genauen Prüfung und Fixierung verdächtiger Objekte gebraucht wird. Hierzu wäre ein großes, eingeübtes Arbeitspersonal an einer Zentralstelle oder aber das Zusammenwirken einer größeren Zahl von astronomischen Instituten nötig. Es ist deshalb vorgesehen, das gewonnene Plattenmaterial in weitgehendem Maße anderen Sternwarten zugänglich zu machen.

Es ist klar, daß die geplanten Aufnahmen sich nicht zum Studium des Lichtwechsels von Veränderlichen mit schnellem Lichtwechsel eignen. Als

Ergänzung sind daher Serienaufnahmen möglichst vieler Areale des Himmels mit anderen Kameras vorgesehen, die auf die Montierungen der Ernostarkameras mit der Möglichkeit unabhängiger Bewegung in Rektaszension und Deklination aufgesetzt werden sollen.

Der von E. C. Pickering auf der Harvard-Sternwarte und ihrer Filiale in Arequipa organisierte Überwachungsdienst unterscheidet sich nicht unwesentlich von dem vorstehend beschriebenen. Wir können darauf hier nicht näher eingehen und verweisen auf die Angaben in den Harvard-Zirkularen 69 und 71 u. a. a. O. Man wird erkennen, daß sich die beiden Organisationen in wertvoller Weise ergänzen und unterstützen können. Die sehr reiche wissenschaftliche Ausbeute der Harvard-Aufnahmen, die, wie es scheint, im allgemeinen nur die 11. beziehungsweise 12. Größe erreichen, mag als Maßstab dienen für das, was von dem neuen Arbeitsplan erwartet werden darf.

Über diese Ausbeute, soweit sie das Gebiet der Veränderlichen betrifft, können wir außerdem bereits einige konkrete Angaben machen. Hr. Dr. Haas hat eine kleine Reihe von halbstündigen Tessar-Aufnahmen auf 9×12 cm-Platten, die wir im vorigen Jahr gemacht hatten, unter dem Blinkmikroskop durchmustert und dabei 8 neue Veränderliche, meist kurzer Periode, und ungefähr ebenso viele Sterne gefunden, die wahrscheinlich veränderlich sind, aber noch weiterer Bestätigung bedürfen. Bis auf einen sind diese Veränderlichen alle auf Platten gefunden worden, die den Sternhaufen M 15 zum Zentrum haben. Die Durchmusterung der Platten ist bei weitem noch nicht abgeschlossen, so daß die Gesamtzahl der auf ihnen erkennbaren neuen Veränderlichen wahrscheinlich noch erheblich größer ist.

Dann wurden von uns selbst aus einer Serie von etwas mehr als 80 halbstündigen Aufnahmen auf 9×12 cm-Platten mit dem größeren Ernostar drei Plattenpaare ausgewählt und unter dem Blinkmikroskop durchmustert. Das Zentrum dieser Platten ist bei $\alpha = 14^{h}5$, $\delta = +34^{\circ}5$, in einer sternarmen Gegend. Während z. B. auf halbstündigen 9×12 cm-Aufnahmen der Auriga-Wolke die Zahl der Sterne zwischen 100000 und 200000 geschätzt wurde, sind auf diesen Aufnahmen höchstens 20000 Sterne erkennbar. In dem von den Platten bedeckten Areal stehen 26 bekannte Veränderliche. Neu gefunden wurden bisher acht Veränderliche kurzer Periode. Die Aufnahmen, die zu einem bestimmten anderen Zweck gemacht worden waren, drängen sich auf wenige Wochen zusammen, sie sind daher wenig geeignet zur Entdeckung von Veränderlichen mit langsameren oder nur zeitweiligen Helligkeitsschwankungen (Mira-Sterne, U Geminorum-Sterne, Algolsterne, Irreguläre usw.). Aus diesen beiden Stichproben ergibt sich, daß die zu erwartende Zahl von Neuentdeckungen auf den Überwachungsplatten mit 1000 voraussichtlich viel zu niedrig gegriffen ist.

Von den acht von uns gefundenen neuen Veränderlichen ist einer ein Algolstern, der auf den Platten nur an einem Abend im Minimum erscheint, so daß die Elemente seines Lichtwechsels noch nicht ermittelt werden können. Von den sieben anderen sind vier typische Sternhaufenveränderliche (RR Lyrae-Art), der Baileyschen Unterklasse a entsprechend, einer ist ein ζ Geminorum-

Stern sehr kurzer Periode (Baileys Unterklasse *c*), zwei sind β Lyrae-Sterne mit $0^d_.3$ Periode. Die beiden letzten Veränderlichen gehören der seltenen und interessanten W Ursae majoris-Gruppe an. Da wir uns ein Urteil über die Brauchbarkeit der Ernostar-Aufnahmen für ein eingehendes Studium von Veränderlichen bilden wollten, haben wir die Helligkeiten der neuentdeckten Veränderlichen auf sämtlichen Platten durch Stufenvergleichungen mit geeigneten Nachbarsternen bestimmt und aus ihnen die Lichtwechselelemente und die Lichtkurven ermittelt. Das angewandte primitive Verfahren erwies sich als völlig ausreichend für unsere Zwecke.

In der Tabelle I sind die aus den Darstellungen der Einzelbeobachtungen erhaltenen Daten für die acht Veränderlichen zusammengestellt. Die Stufenhelligkeiten sind in Größen des internationalen Systems verwandelt. Die dazu notwendigen Anschlußaufnahmen der Polsequenz hat Hr. Dr. Pavel am 40 cm-Astrographen der Babelsberger Sternwarte besorgt. Der Anschluß an das internationale System ist leider nicht sehr zuverlässig ausgefallen, da der Himmel bei diesen Aufnahmen wenig günstig war. Dies ist jedoch für unsere Zwecke zunächst von nebensächlicher Bedeutung, da es sich höchstens um eine Verfälschung der Helligkeiten um einen für jeden Stern konstanten Betrag handeln kann. Die einzelnen Spalten der Tabelle I sind für sich verständlich.

Die Tabelle II enthält die einzelnen abgeleiteten Helligkeiten der Veränderlichen im internationalen System. Die Zeiten sind bereits heliozentrisch. Die Phasen sind mit den Elementen der Tabelle I gerechnet. Den Stern 25. 1926 haben wir beide unabhängig voneinander durchgeschätzt, um ein Urteil über die Zuverlässigkeit unserer Helligkeitsbestimmungen zu gewinnen. Die Ergebnisse der beiden Beobachter sind in Tabelle II getrennt gegeben. Die übrigen Sterne sind nur von je einem Beobachter durchgeschätzt.

Tabelle III enthält die Zusammenstellung der für die einzelnen Veränderlichen bei unseren Schätzungen benutzten Vergleichsterne. Die Helligkeiten sind wieder in der internationalen Skala ausgedrückt, die Koordinatendifferenzen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ beziehen sich auf den Veränderlichen als Koordinatenanfangspunkt.

Die bildlichen Darstellungen der Lichtkurven für die sieben Veränderlichen, deren Lichtwechselelemente bestimmt werden konnten, geben die Mittelwerte aus den für Phasenintervalle von $0^d_.02$ oder $0^d_.01$ zusammengefaßten Einzelwerten der geschätzten Helligkeiten. Nur die beiden Darstellungen für den Stern 25. 1926 auf Tafel 2 geben die von den beiden Beobachtern erhaltenen Einzelwerte, deren Übereinstimmung so gut ist, als man für ein solches Objekt nur erwarten kann.

Da die Ernostar-Aufnahmen ein genaues Muster der geplanten Überwachungsaufnahmen sind, so ergibt sich aus dieser Probe, daß sie allen an sie zu stellenden Anforderungen in vollem Maße genügen.

Tabelle I.

Provisorische Bezeichnung	α_{1900}	δ_{1900}	Katalogbezeichnung der Veränderlichen
12. 1926 Canum ven.	$13^h 40^m 34^s$	$+33° 9'.4$	Po ph **252**. 10
13. 1926 Canum ven.	13 43 59	+40 24.0	Hels ph **579**. 35
14. 1926 Canum ven.	13 53 5	+30 20.5	BD +30°2469 ($9^m.5$)
15. 1926 Bootis	14 41 15	+41 27.1	Hels ph **618**. 62
24. 1926 Bootis	14 43 5	+32 15.3	—
25. 1926 Bootis	14 56 45	+35 31.4	—
26. 1926 Bootis	14 0 30	+30 30.3	Ox ph +31° 31142
27. 1926 Bootis	15 13 12	+35 28.3	—

Provisorische Bezeichnung	Heliozentrische Elemente M. Z. Grw.	$M-m$	Max.	Min.	Charakter des Lichtwechsels
12. 1926 Canum ven.	Max. = $2424621.488 + 0^d.5672 \cdot E$	$0^d.08$ [1]	$10^m.8$	$12^m.1$	RR Lyrae-Art
13. 1926 Canum ven.	» $611.509 + 0.4780 \cdot E$	0.10 [1]	11.2	12.6	RR Lyrae-Art
14. 1926 Canum ven.	» $609.486 + 0.2475 \cdot E$	0.107	11.5	12.1	ζ Gemin.-Art
15. 1926 Bootis	» $609.404 + 0.5323 \cdot E$	0.06 [1]	10.7	11.9	RR Lyrae-Art
24. 1926 Bootis	—	—	12.5	$\leq$ 13.2	Algol-Art
25. 1926 Bootis	Min. I. = $2424610.365 + 0.31730 \cdot E$	—	11.8 [2]	12.3 [2]	β Lyrae-Art
26. 1926 Bootis	» $609.332 + 0.32440 \cdot E$	—	11.8 [3]	12.5 [3]	β Lyrae-Art
27. 1926 Bootis	Max. = $2424610.465 + 0.4569 \cdot E$	0.06 [1]	11.2	12.7	RR Lyrae-Art

[1] Dauer des Anstiegs der Helligkeit.

[2] Für das dem Min. I folgende Max. I ergab sich $11^m.8$, für das Min. II $12^m.2$, für das Max. II $11^m.8$.

[3] Für das dem Min. I folgende Max. I ergab sich $11^m.9$, für das Min. II $12^m.5$, für das Max. II $11^m.8$.

Tabelle II.

Helioz. M. Z. Grw. 2424000 +	12. 1926 CVn		13. 1926 CVn		14. 1926 CVn		15. 1926 Boo	
	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.
607.404	$0^{d}.096$	$11^{m}.45$:	—	—	—	—	$0^{d}.129$	$11^{m}.27$:
609.344	0.334	12.01	—	—	$0^{d}.106$	$12^{m}.01$	0.472	11.87
365	0.355	12.06	$0^{d}.246$	$12^{m}.49$	0.127	12.10	0.493	11.26
387	0.377	12.19	0.268	12.49	0.149	12.04	0.515	10.80
410	0.400	12.15	0.291	12.49	0.172	11.90	0.006	10.79
432	0.422	12.07	0.313	12.59	0.194	11.90	0.028	10.83
454	0.444	12.16	0.335	12.61	0.216	11.53	0.050	11.04
475	0.465	12.05	0.356	12.08	0.237	11.45	0.071	11.10
497	0.487	12.19	0.378	12.40	0.011	11.51	0.093	11.19
610.355	0.211	11.71	0.280	12.59	0.127	12.19	0.419	11.84
376	0.232	11.96	0.301	12.40	0.148	12.00	0.440	11.77
398	0.254	11.80	0.323	12.40	0.170	11.97	0.462	11.86
420	0.276	11.99:	0.345	12.20	0.192	11.90	0.484	11.66
442	0.298	11.98	0.367	12.42	0.214	11.73	0.506	11.03
463	0.319	12.15	0.388	12.49	0.235	11.44	0.527	10.71
485	0.341	12.19	0.410	12.10	0.009	11.63	0.016	10.73
507	0.363	12.19	0.432	11.83	0.031	11.51	0.038	11.02
530	0.386	12.13	0.455	11.38	0.054	11.83	0.061	11.09
611.398	0.120	11.57	0.367	12.30	—	—	0.397	11.66
421	0.143	11.60	0.390	12.49	0.203	11.76	0.420	11.79
444	0.166	11.72	0.413	12.02	0.226	11.73	0.443	11.88
466	0.188	11.78	0.435	11.56	0.000	11.54	0.465	11.90
492	0.214	11.85	0.461	11.05	0.026	11.44	0.491	11.26
513	0.235	11.78	0.004	11.15	0.047	11.86	0.512	10.98
536	—	—	0.027	11.19	0.070	11.90	0.003	10.70
558	0.280	12.05	0.049	11.38	0.092	12.12	0.025	10.84
587	0.309	12.03	0.078	11.50:	0.121	11.97	0.054	11.10
609	0.331	12.12	0.100	11.69	0.143	12.16	0.076	11.15
619.376	0.157	11.68	0.219	12.49	0.238	11.53	0.391	11.66
397	0.178	11.70	0.240	12.59	0.011	11.51	0.412	11.70
419	0.200	11.71	0.262	12.40	0.033	11.65	0.434	11.87
441	0.222	11.75	0.284	12.59	0.055	11.94	0.456	11.86
462	0.243	11.85	0.305	12.20	0.076	11.87	0.477	11.83
485	0.266	12.01	0.328	12.40	0.099	12.19	0.500	11.12
507	0.288	12.13	0.350	12.40	0.121	12.06	0.522	10.67
536	0.317	12.15	0.379	12.40:	0.150	12.16	0.018	10.73
557	0.338	12.13	0.400	12.02	0.171	12.12	0.039	10.98
579	0.360	12.16	0.422	11.69	0.193	12.12	0.061	11.12
602	0.383	12.19	0.445	11.48	0.216	11.94	0.084	11.19
620.360	0.006	10.86	0.247	12.61	0.232	11.58	0.310	11.64
382	0.028	10.92	0.269	12.47	0.006	11.68	0.332	11.77
404	0.050	11.16	0.291	12.49	0.028	11.76	0.354	11.86
425	0.071	11.40	0.312	12.59	0.049	11.83	0.375	11.90
447	0.093	11.52	—	—	0.071	11.90	0.397	11.80

Tabelle II (Fortsetzung).

Helioz. M. Z. Grw. 2424000 +	12. 1926 CVn		13. 1926 CVn		14. 1926 CVn		15. 1926 Boo	
	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.	Phase	Gr.
620.469	0ᵈ.115	11ᵐ.64	0ᵈ.356	12ᵐ.49	0ᵈ.093	11ᵐ.97	0ᵈ.419	11ᵐ.88
490	0.136	11.75	0.377	12.40	0.114	12.09	0.440	11.79
518	0.164	11.81	0.405	12.10	0.142	12.12	0.468	11.80
540	0.186	11.78	0.427	11.54	0.164	12.23	0.490	11.30
562	0.208	11.84	0.449	11.48	0.186	11.94	0.512	10.98
583	0.229	11.99	0.470	11.26	0.207	11.94	0.001	10.75
621.358	0.437	11.94	0.289	12.22	0.240	11.48	0.243	11.79
379	0.458	12.14	0.310	12.40	0.013	11.45	0.264	11.91
401	0.480	12.10	0.332	12.22	0.035	11.68	0.286	11.89
422	0.501	11.96	0.353	12.49	0.056	11.90	0.307	11.80
444	0.523	11.92	0.375	12.34	0.078	11.97	0.329	11.90
465	0.544	11.14	0.396	12.36	0.099	11.94	0.350	11.91
487	0.566	10.76	0.418	11.83	0.121	12.04	0.372	11.76
515	0.027	11.01	0.446	11.38	0.149	12.19	0.400	11.78
537	0.049	11.15	0.468	11.23	0.171	12.01	0.422	11.94
558	0.070	11.37	0.011	11.24	0.192	12.01	0.443	11.81
580	0.092	11.49	0.033	11.34	0.214	11.83	0.465	11.86
624.500	0.176	11.76	0.085	11.54	0.164	12.04	0.192	11.49
522	0.198	11.78	0.107	11.75	0.186	12.16:	0.214	11.51
543	0.219	11.79	0.128	11.97	0.207	11.87	0.235	11.65
566	0.242	11.81	0.151	12.02	0.230	11.54	0.258	11.79
587	0.263	11.86	0.172	12.22	0.003	11.58	0.279	11.71
643.393	0.351	12.05	0.336	12.22	0.247	11.65	0.454	11.92
415	0.373	12.02	0.358	12.53	0.021	11.61	0.476	11.88
436	0.394	11.97	0.379	12.59	0.042	11.73	0.497	11.19
458	0.416	12.05	0.401	12.22	0.064	11.80	0.519	10.83
484	0.442	12.12	0.427	12.02	0.090	12.01	0.013	10.73
505	0.463	12.01:	0.448	11.44	0.111	12.09	0.034	10.85
527	0.485	12.24	0.470	11.38	0.133	11.94	0.056	11.04
549	0.507	12.04	0.014	11.38	0.155	12.12	0.078	11.24
647.423	0.411	11.94	0.064	11.44	0.069	12.01	0.226	11.55
445	0.433	12.07	0.086	11.56	0.091	12.01	0.248	11.61
652.407	—	—	0.268	12.20	0.103	11.90	0.419	11.78
429	0.312	12.04	0.290	12.40	0.125	12.16	0.441	11.80
450	0.333	12.16	0.311	12.16	0.146	12.09	0.462	11.89
472	0.355	12.15	0.333	12.34	0.168	12.01	0.484	11.52
494	0.377	12.11	0.355	12.63	0.190	11.90	0.506	11.01
516	0.399	12.13	0.377	12.59	0.212	11.61	0.528	10.77
537	0.420	12.10	0.398	12.40:	0.233	11.58	0.017	10.78:

Tabelle II (Fortsetzung).

Helioz. M. Z. Grw. 2424000 +	24. 1926 Boo	25. 1926 Boo			26. 1926 Boo		27. 1926 Boo	
	Gr.	Phase	Gr. G.	Gr. P.	Phase	Gr.	Phase	Gr.
607.404	—	—	—	—	—	—	—	—
609.344	$12^{m}43$	$0^{d}248$	$11^{m}79$	$11^{m}59$	$0^{d}012$	$12^{m}49$	$0^{d}250$	$12^{m}84$:
365	12.24	0.269	11.97	11.89	0.033	11.96	0.271	13.02:
387	12.56	0.291	12.01	11.98	0.055	11.93	0.293	13.02
410	12.66	0.314	12.10	12.15	0.078	11.95	0.316	13.02
432	12.57	0.019	12.09	12.24	0.100	11.88	0.338	12.68:
454	12.55	0.041	11.98	11.94	0.122	12.08	0.360	12.81
475	12.57	0.062	11.96	11.81	0.143	12.24	0.381	12.74
497	12.58	0.084	11.87	11.73	0.165	12.47	0.403	12.40:
610.355	12.66	0.307	12.23	12.26	0.050	11.88	0.347	12.84:
376	12.52	0.011	12.23	12.31	0.071	11.87	0.368	12.84:
398	12.15	0.033	11.95	11.86	0.093	11.73	0.390	12.84:
420	12.38	0.055	11.97	11.95	0.115	12.06	0.412	12.68
442	12.29	0.077	11.86	11.72	—	—	0.434	11.98
463	12.60	0.098	11.99	11.89	0.158	12.47	0.455	11.28
485	12.50	0.120	11.95	11.95	0.180	12.42	0.020	11.38
507	12.66	0.142	12.03	12.07	0.202	12.04	0.042	11.56
530	12.57	0.165	12.06	11.99	0.225	11.87	0.065	11.83
611.398	12.19	0.081	11.81	11.70	0.120	11.89	0.019	11.53
421	12.34	0.104	11.86:	11.86	0.143	12.35	0.042	11.46
444	12.29	0.127	11.94	12.07	0.166	12.51	0.065	11.63
466	12.48	0.149	12.17	12.13	0.188	12.45	0.087	11.98
492	12.52	0.175	12.14	12.03	0.214	11.92	0.113	12.56
513	12.19	0.196	11.96	11.90	0.235	11.93	0.134	12.12
536	12.10	0.219	11.92	11.93	0.258	11.73	0.157	12.65:
558	12.43	0.241	11.83	11.72	0.280	11.86	0.179	12.65:
587	12.43	0.270	11.94	11.85	0.309	12.52	0.208	< 12.6
609	12.38	0.292	12.23	11.95	0.006	12.59	0.230	< 12.5
619.376	13.08:	0.127	12.08	12.02	0.312	12.52	0.230	< 12.6
397	12.65	0.148	12.08	12.15	0.009	12.57	0.251	< 12.8
419	12.66	0.170	12.10	12.24	0.031	12.47	0.273	12.66:
441	12.52	0.192	11.98	11.96	0.053	11.97	0.295	< 12.6
462	—	0.213	11.96	11.89	0.074	11.88	0.316	< 12.8
485	12.19	0.236	11.92	11.86	0.097	11.81	0.339	< 13.0
507	12.69	0.258	11.89	11.99	0.119	11.84	0.361	< 12.6
536	12.48	0.287	11.89	11.95	0.148	12.47	0.390	12.84:
557	12.75	0.308	12.23	12.46	0.169	12.61	0.411	< 12.6
579	12.48	0.012	12.12	12.09	0.191	12.43	0.433	12.15:
602	12.34	0.035	12.05	11.95	0.214	11.98	0.456	11.19
620.360	12.52	0.159	12.23	—	0.322	12.44	0.300	12.65:
382	12.25	0.181	12.08	12.22	0.020	12.35	0.322	12.42
404	12.56	0.203	11.98	12.00	0.042	12.04	0.344	< 12.5
425	12.52	0.224	11.77	11.76	0.063	11.88	0.365	12.47
447	12.29	0.246	11.84	11.67	0.085	11.85	0.387	12.66:

Tabelle II (Fortsetzung).

Helioz. M. Z. Grw. 2424000 +	24. 1926 Boo	25. 1926 Boo			26. 1926 Boo		27. 1926 Boo	
		Phase	Gr.					
	Gr.		G.	P.	Phase	Gr.	Phase	Gr.
620.469	12.48	0ᵈ.268	11ᵐ.77	11ᵐ.76	0ᵈ.107	11ᵐ.85	0ᵈ.409	12ᵐ.43
490	12.25	0.289	12.05:	12.25	0.128	12.24	0.430	12.23
518	12.42	0.000	12.25	12.43	0.156	12.61	0.001	11.19
540	12.62	0.021	11.99	11.99	0.178	12.54	0.023	11.49
562	12.62	0.043	11.94	11.95	0.200	11.98	0.045	11.49
583	12.23	0.064	11.84	11.76:	0.221	11.87	0.066	11.67
621.358	12.48	0.205	12.08	11.98	0.023	12.35	0.384	< 12.8
379	12.38	0.226	11.87:	11.99	0.044	12.06	0.405	12.42
401	12.38	0.248	11.88	11.89	0.066	11.99	0.427	12.46
422	12.38	0.269	11.82	11.95	0.087	11.86	0.448	11.40
444	12.57	0.291	12.08	12.08	0.109	11.83	0.013	11.26
465	12.52	0.312	12.20	12.26	0.130	12.07	0.034	11.38
487	12.64	0.017	12.20	12.31	0.152	12.53	0.056	11.64
515	12.57	0.045	11.94	11.89	0.180	12.63	0.084	12.10
537	12.43	0.067	11.85	11.86	0.202	12.04	0.106	12.05
558	11.82:	0.088	11.90	11.76	0.223	11.85	0.127	12.23
580	12.43	0.110	11.81	11.82	0.245	11.66	0.149	12.47
624.500	13.29	0.174	12.03	11.97	0.246	11.84	0.328	12.74
522	13.10	0.196	11.98	11.97	0.268	11.93	0.350	12.65
543	13.21	0.217	11.84	11.90	0.289	12.12	0.371	12.74:
566	13.30	0.240	11.88	11.80	0.312	12.43	0.394	12.63
587	13.24	0.261	11.91	11.97	0.008	12.59	0.415	12.65
643.393	12.20	0.029	12.01:	12.06	0.323	12.59	0.031	11.47
415	12.43	0.051	11.97	11.82	0.021	12.17	0.053	11.74
436	12.43	0.072	11.98	—	0.042	11.97	0.074	11.83
458	12.66	0.094	11.96	11.80	0.064	11.89	0.096	11.92
484	12.75	0.120	11.97	11.90	0.090	12.00	0.122	12.47
505	12.34	0.141	12.17	12.17	—	—	0.143	12.65
527	12.52	0.163	12.17	12.08	0.133	12.38	0.165	12.38
549	12.45	0.185	11.88	11.86	0.155	12.59	0.187	12.22
647.423	11.75:	0.251	11.86	11.86	0.136	12.34	0.406	12.74
445	12.25	0.273	11.85	11.82	0.158	12.52	0.428	12.42
652.407	12.48	0.158	12.23	12.42	0.254	11.79	0.364	12.65
429	12.38	0.180	12.05	11.99	0.276	11.77	0.386	12.47:
450	12.45	0.201	11.83	11.76	0.297	12.21	0.407	< 12.8
472	12.66	0.223	11.88	11.80	0.319	12.59	0.429	12.10
494	12.43	0.245	11.96	11.77	0.017	12.34	0.451	11.20
516	12.38	0.267	11.98	11.95	0.039	11.90	0.016	11.29
537	—	0.288	12.06:	—	—	—	0.037	11.26

Tabelle III.

*	12. 1926			13. 1926			14. 1926			15. 1926		
	Gr.	Δα	Δδ	Gr.	Δα	Δδ	Gr.	Δα	Δδ	Gr.	Δα	Δδ
a	10^{m}.40	−15'.3	+22'.5	10^{m}.66	−17'.3	+23'.3	11^{m}.23	+19'.1	− 7'.8	10^{m}.44	−14'.9	− 3'.9
b	10.92	+ 4.6	+12.0	10.84	+21.1	+11.0	11.41	− 7.3	+ 9.7	10.51	+11.8	+ 6.7
c	11.28	+ 7.5	−14.5	11.69	− 1.3	+22.7	11.80	+ 4.6	+ 6.1	10.83	−18.9	+ 0.6
d	11.31	+17.3	− 4.3	11.97	−11.9	+ 5.2	12.04	+ 2.9	+17.9	10.86	− 9.6	−10.9
e	11.58	+ 1.4	−21.8	12.61	− 1.4	− 1.4	12.21	+11.9	+ 7.1	11.39	+.8.6	+11.0
f	11.89	+23.1	− 1.7	12.63	+10.6	+ 5.1	12.99	+ 7.8	−12.4	11.64	−17.8	+ 2.0
g	11.97	− 6.2	−15.0							11.71	+16.2	− 9.9
h	12.00	+ 6.8	− 1.5							11.92	+21.9	−15.5
i	12.27	− 3.9	+16.7									
Stufenwert ..	0^{m}.076			0^{m}.195			0^{m}.144			0^{m}.071		

*	24. 1926			25. 1926				26. 1926			27. 1926		
	Gr.	Δα	Δδ	Gr. G.	Gr. P.	Δα	Δδ	Gr.	Δα	Δδ	Gr.	Δα	Δδ
a	12^{m}.02	+ 6'.4	+24'.0	11^{m}.52	11^{m}.41	− 7'.8	+19'.8	11^{m}.64	+18'.1	− 5'.4	10^{m}.66	+ 7'.8	−21'.7
b	12.22	+13.9	−18.0	11.57	11.63	− 9.2	+ 6.1	11.76	+ 7.7	−18.3	11.10[1]	+13.0	−15.2
c	12.92	+ 2.7	−14.3	11.69	11.72	+ 0.6	− 5.0	12.18	0.0	− 7.6	11.76	+ 6.4	− 1.7
d	12.92	− 2.7	− 9.0		12.30	−11.4	+ 2.0	12.27	−14.4	− 3.2	11.87	+20.8	− 0.8
e	12.93	+ 1.0	+ 9.8		12.33	−12.6	+ 3.9	12.38	− 7.6	+ 8.9	11.87	−12.2	+ 6.4
f				12.23	12.42	+ 9.2	−14.0	12.72	− 7.7	−11.1	12.13	+13.3	+ 4.7
g					12.65	− 8.4	− 8.6				12.28	+16.2	− 7.8
h											12.40	+11.9	−11.2
Stufenwert ..	0^{m}.187			0^{m}.093	0^{m}.129			0^{m}.100			0^{m}.178		

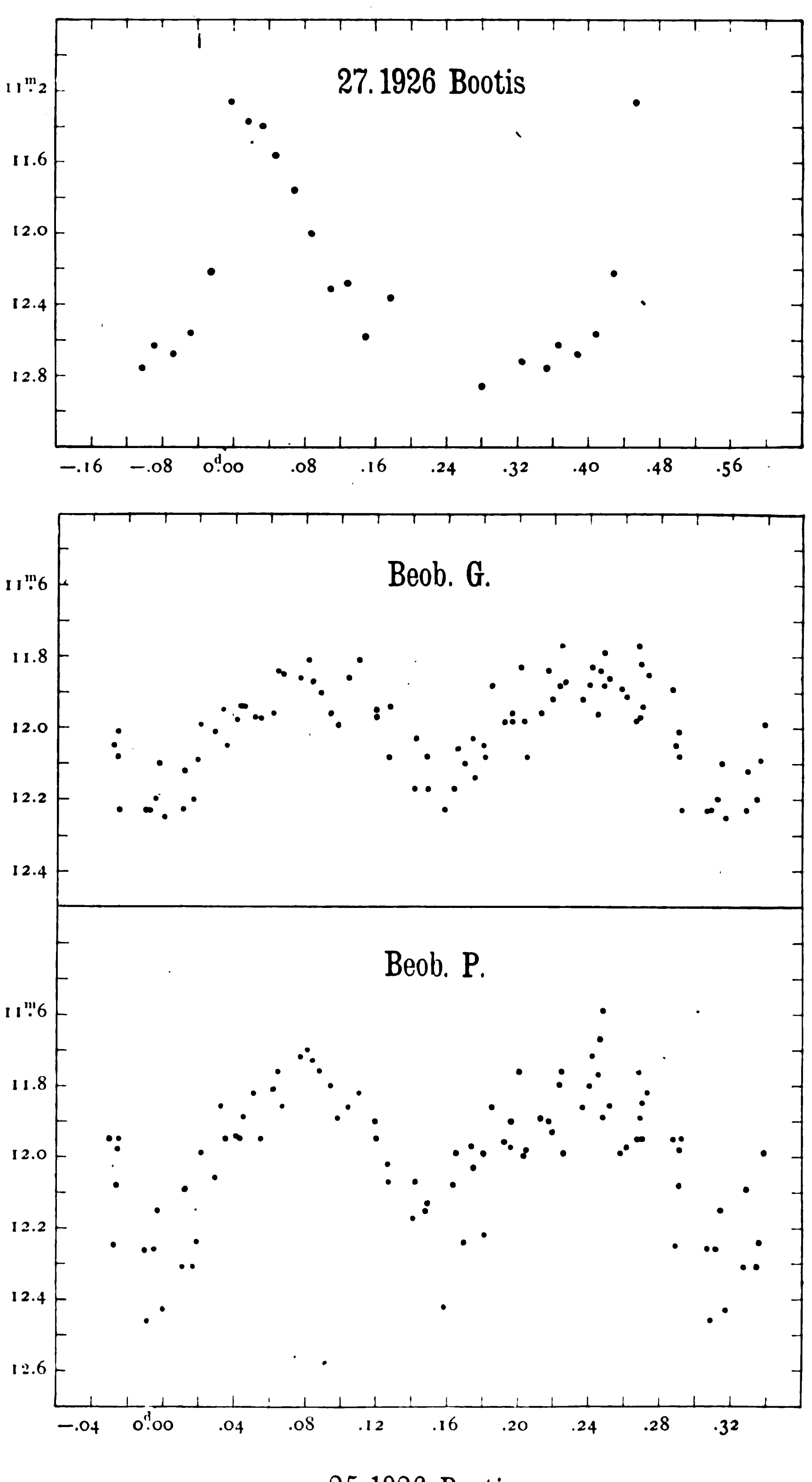
[1] Duplex 225° 0'.2; Gesamtlicht.



Tafel 1.

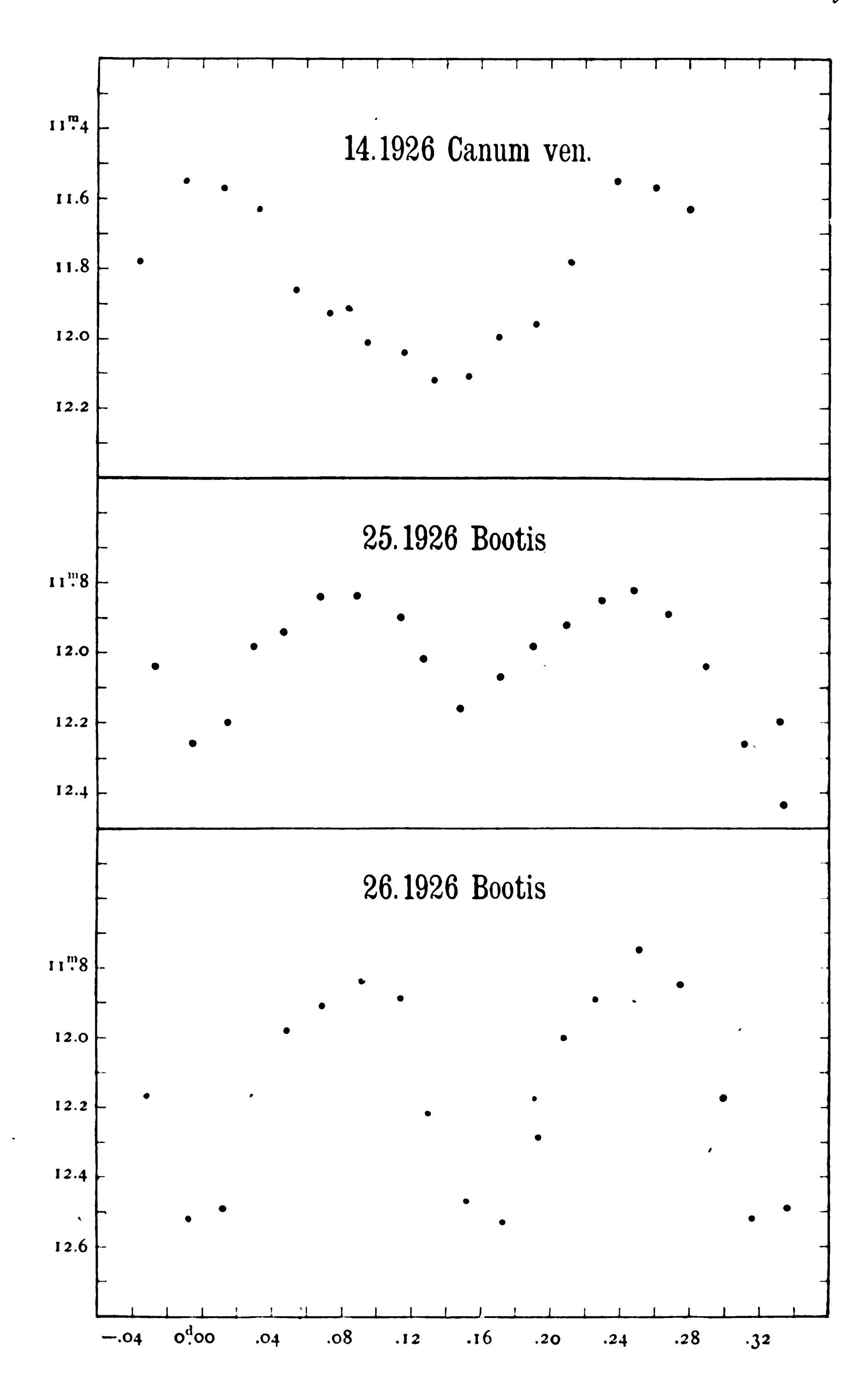
12.1926 Canum ven.
11.2
11.6
12.0
12.4
13.1926 Canum ven.
11.6
12.0
12.4
12.8
15.1926 Bootis
11.2
11.6
12.0
—.16
—.08
.08
.16
.24
.32
.40
.48
.56

Tafel 2.



25.1926 Bootis

Tafel 3.


14.1926 Canum ven.
25.1926 Bootis
26.1926 Bootis
11ᵐ.4
11.6
11.8
12.0
12.2
11ᵐ.8
12.0
12.2
12.4
11ᵐ.8
12.0
12.2
12.4
12.6
−.04
0ᵈ.00
.04
.08
.12
.16
.20
.24
.28
.32

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXII. Gesamtsitzung. 15. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Keibel sprach über die Unterscheidungsmerkmale zwischen *Lampetra* (*Petromyzon*) *fluviatilis* und *Lampetra* (*Petromyzon*) *planeri* und die Biologie dieser Tiere nach gemeinsam mit seinem Assistenten Hrn. Prof. Weissenberg angestellten Untersuchungen.

Die in den Bestimmungstabellen angegebenen Unterschiede an den Flossen, an den Zähnen und der Farbe genügen nicht, um *Lampetra fluviatilis* und *Lampetra planeri* als zwei verschiedene Arten zu trennen; dagegen gibt es bedeutende biologische Unterschiede, die hauptsächlich dadurch begründet sind, daß sich bei *Lampetra fluviatilis* nach der Larvenperiode eine Lebensperiode einschiebt, in der sie als gefräßiger Räuber in den Haffen und in den Meeren lebt. Diese Periode fehlt bei *Lampetra planeri* vollkommen.

2. Hr. Hellmann legte eine Arbeit vor: »Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland von den ersten Anfängen bis zur Einrichtung staatlicher Beobachtungsnetze.« (Abh.)

Auf die Periode der bloßen Wetternotierungen oder präinstrumentellen Beobachtungen, die 1490 beginnt, folgt 1678 die der instrumentellen Beobachtungen an einzelnen Orten, und hundert Jahre später die der korrespondierenden Beobachtungen, die im 19. Jahrhundert zur Gründung staatlicher meteorologischer Beobachtungsnetze überleitet. Leibniz und die Berliner Akademie der Wissenschaften haben an der günstigen Entwicklung der zweiten Periode hervorragenden Anteil.

3. Hr. Carl Stumpf überreichte sein Buch »Die Sprachlaute. Experimentell-phonetische Untersuchungen nebst einem Anhang über Instrumentalklänge« (Berlin 1926).

4. Das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Bernhard Seuffert in Graz hat am 7. Juli 1926 das fünfzigjährige Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

5. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt

durch die philosophisch-historische Klasse:

3000 *RM* für die Arbeiten der Preußischen Kommission,
1800 *RM* für das Ägyptische Wörterbuch,
4000 *RM* für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Burdach an dem Werke »Vom Mittelalter zur Reformation«;

durch die physikalisch-mathematische Klasse:

4000 *R.M* als Beihilfe für den Druck des Werkes »Geschichte des Fixsternhimmels«,

1000 *R.M* für die Herausgabe des Sternkatalogs durch Prof. Kopff (Berlin).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität München Hrn. Dr. Leopold Wenger zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Adresse an Hrn. Bernhard Seuffert zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. Juli 1926.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Die herzlichen Glückwünsche, die von der Preußischen Akademie der Wissenschaften ihrem korrespondierenden Mitglied zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum dargebracht werden, ehren in Ihnen den Meister exakter philologischer Forschungsmethode und Wahrer einer großen Tradition, die von Ihrem Lehrer Erich Schmidt und von Wilhelm Scherer Ihnen überkommen war. Als Herausgeber der »Vierteljahrsschrift für Literaturgeschichte« und der »Deutschen Literaturdenkmale des 18. und 19. Jahrhunderts« haben Sie entscheidend beigetragen zum streng wissenschaftlichen Ausbau eines Forschungsgebietes, das nicht selten in Gefahr stand, vom Dilettantismus überschwemmt zu werden. Sie haben stets an der Gewissenhaftigkeit gründlicher Kleinarbeit festgehalten, ohne die großen Ziele zusammenfassender Darstellung aus dem Auge zu verlieren.

Ihre eigenen Arbeiten beginnen mit der groß angelegten, nach vielen Seiten ausblickenden Monographie über den Maler Müller, durch die eine der eigenartigsten Erscheinungen der Sturm- und Drangzeit in endgültigem Bilde festgelegt wurde; sie zielen auf eine noch weit umfangreichere, das riesige Lebenswerk eines der einflußreichsten Männer seiner Zeit umspannende Gesamtdarstellung Christoph Martin Wielands. Die Akademie weiß Ihnen ganz besonders herzlichen Dank dafür, daß Sie bereit waren, die unvergleichliche Stoffbeherrschung Ihrer Lebensarbeit und die große herausgeberische Erfahrung, die Sie schon als Mitredaktor der Weimarer Goethe-Ausgabe bewährt hatten, in den Dienst der von ihr unternommenen Gesamtausgabe von Wielands Werken zu stellen und durch die von Ihnen herausgegebenen »Prolegomena« dieser Arbeit eine vorbereitende Grundlage zu geben, wie sie noch für keine deutsche Klassikerausgabe mit solcher mustergültigen Umsicht und eindringenden Hingabe geschaffen war. Möge es Ihrer Arbeitsfrische vergönnt sein, die Früchte dieser Saat in vollem Maße zu ernten und das große Unternehmen, dessen Fortgang durch die Kriegsjahre gehemmt war, der Vollendung entgegenzuführen, so daß Sie für dieses Lebenswerk, das dauernd mit Ihrem Namen verknüpft sein wird, nicht geringeren Dank erfahren wie für Ihre fruchtbare, dem deutschen Wort und dem deutschen Geist dienende Lehrtätigkeit an der südlichsten Hochschule des deutschen Sprachgebietes.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 18. August.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 22. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Bieberbach sprach »Über das Tchebychefsche Bekleidungsproblem«.

Es werden die folgenden Sätze bewiesen:

1. Eine singularitätenfreie, unberandete Fläche enthalte keinen Teilbereich, dessen curvatura integra dem absoluten Betrage nach $\frac{\pi}{2}$ erreicht oder übertrifft. Dann kann sie stets in ihrer Gänze mit einem Tchebychef-Netz bedeckt werden.

2. Eine singularitätenfreie, unberandete Fläche nirgends positiver Krümmung besitze eine curvatura integra größer oder gleich -2π. Im Falle, wo die curvatura integra gleich -2π ist, sei weiter in keinem Teilbereich die Gausssche Krümmung durchweg Null. Dann kann die Fläche in ihrer Gänze mit einem Tchebychef-Netz bedeckt werden.

2. Vorgelegt wurden »J. C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaften« Bd. V: 1904—1922, II. Abt. L—Z (Leipzig und Berlin 1926) und Leonhardi Euleri, »Opera omnia« Ser. III, Vol. I: Leonhardi Euleri, »Commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes« (Leipzig und Berlin 1926).



Über TCHEBYCHEFsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten.

Von LUDWIG BIEBERBACH.

Will man ein Ellipsoid sorgfältig einwickeln, so schlägt das Material Falten. Will man ein einschaliges Hyperboloid gleichfalls so einwickeln, daß das Material dicht anliegt, so droht der Stoff zu reißen. Flächen positiver und negativer Krümmung verhalten sich also verschieden. Dies ist eine Erfahrung, die jedem Schneider geläufig ist. Er weiß, daß er die Körperoberfläche in zweckmäßig abgegrenzte Teile zerlegen muß, um einen gut sitzenden Anzug zustande zu bekommen. Dies zuerst von TCHEBYCHEF[1] mathematisch angegriffene Bekleidungsproblem läuft bei Außerachtlassen einer etwaigen Elastizität der Fäden darauf hinaus, in passend abgegrenzten Stücken der Fläche Koordinaten so einzuführen, daß die Parameter auf jeder Parameterlinie die Bedeutung der Bogenlänge besitzen, daß also die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\dot{\alpha}_1^2 + 2F(\alpha_1, \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_2^2 \tag{1}$$

bekommt. Hr. Voss[2] hat bemerkt, daß die curvatura integra eines jeden Netzvierecks sich mit Hilfe der Außenwinkel des Vierecks in der Form

$$\sum \alpha_i - 2\pi$$

schreiben läßt.

Er hat aber nicht hervorgehoben, daß sich hieraus die für die Bedeckbarkeit mit einem einzigen Netzviereck notwendige Bedingung ergibt, daß der absolute Betrag der curvatura integra 2π nicht übertrifft[3].

Das eben erwähnte Nichthervorheben läßt wohl deutlich den Geschmackswandel erkennen, den die mathematische Fragestellung in den letzten Jahrzehnten erlebt hat. Neben dieser ergibt sich die weitere notwendige Bedingung, daß die Fläche offen sei und einen einfachen Zusammenhang[4] besitze.

[1] P. L. TCHEBYCHEF: Sur le coupure des vêtements (1878). Vgl. Oeuvres Bd. II, S. 708.

[2] A. VOSS: Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Ann. Bd. 19 (1882), S. 1—26.

[3] L. BIEBERBACH, Acta Math. 48 (1926), S. 319ff. Dort findet sich S. 325 bei der Berechnung der curvatura integra eine Vertauschung der Vorzeichen, was hier richtiggestellt sei.

[4] L. BIEBERBACH: l. c. S. 327. Die Offenheit ergibt sich aus der topologischen Tatsache, daß auf geschlossenen Flächen singularitätenfreie Netze nicht existieren.

In der hier vorliegenden Arbeit will ich nun in erster Linie für Flächen nirgends positiver Krümmung u. a. beweisen, daß der einfache Zusammenhang und eine curvatura integra, deren Betrag $< 2\pi$ ist, für die Bedeckbarkeit einer im Endlichen singularitätenfreien Fläche mit einem einzigen Netz auch hinreichen. Von weiteren Ergebnissen meiner Untersuchung, auch im Falle von Flächen, die stellenweise positiv gekrümmt sind, wird später die Rede sein.

Auf einer einfach zusammenhängenden Fläche kann man auf mannigfache Weise die Parameter u_1, u_2 so wählen[1], daß die Fläche umkehrbar eindeutig auf den von der vollen u_1-, u_2-Ebene gebildeten Parameterbereich bezogen erscheint. Ist dann

$$\sum g_{ik} \dot{u}_i \dot{u}_k \tag{2}$$

die erste Fundamentalform, so ist unsere Aufgabe die, Funktionen $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ so zu bestimmen, daß durch dieselben im großen (2) auf die Form (1) gebracht wird. Daß dies für genügend kleine Flächenstücke stets geht, ergibt sich aus den Untersuchungen von SERVANT[2].

SERVANT hat gezeigt, daß man die $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ aus den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \sum \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_\mu}{\partial \alpha_2} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{3}$$

zu ermitteln hat[3]. Die Dreizeigersymbole beziehen sich dabei auf die Form (2), sind also Funktionen der gesuchten Funktionen u_i allein. Die $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ sind so zu wählen, daß sie eine schlichte[4] Abbildung der vollen[5] α_1-, α_2-Ebene auf den Parameterbereich der u_i vermitteln.

Ich löse weiterhin das Problem unter der Voraussetzung, daß die g_{ik} mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen im Bereiche der u_i stetig seien, daß man jede geodätische Linie über den Bereich hin zu beliebigen Bogenlängen verfolgen kann, sowie daß die GAUSSsche Krümmung nirgends positiv sei, und daß endlich die curvatura integra den Betrag 2π nicht übertreffe, und daß in dem Falle, wo die curvatura integra gleich -2π ist, in keinem Teilbereich die GAUSSsche

[1] Für Flächen negativer Krümmung kann man bekanntlich — wie sich übrigens auch aus weiter unten folgenden Ausführungen ergibt — mit Hilfe einer Schar geodätischer Linien und ihrer orthogonalen Trajektorien ein solches Koordinatensystem konstruieren.

[2] SERVANT: Sur l'habillage des surfaces. Comptes rendus des séances de l'Acad. d. Sc. d. Paris, Bd. 137 (1903), S. 112. Vgl. L. BIANCHI: Lezioni di geometria differenziale, Bd. I, 3. ed. (1922), S. 153 ff.

[3] Es handelt sich also um eine Frage der Geometrie auf der Fläche, die mit der Einbettung in einen dreidimensionalen Raum nichts zu tun hat.

[4] Diese aus der modernen konformen Abbildung stammende Ausdrucksweise bedeutet »umkehrbar eindeutige« Abbildung.

[5] Es kommt nur ein volles schlichtes Netz, das heißt die volle schlichte α_1-, α_2-Ebene in Betracht, weil sonst wegen der Gestalt (1) der ersten Fundamentalform die Fläche nicht im Endlichen singularitätenfrei, das ist auch unberandet, sein kann. Vgl. hierzu auch Acta math. 48 S. 319 ff.



Krümmung überall Null sei. In allen diesen Fällen kann die Fläche mit einem Netz überspannt werden.

Ich löse weiter das Problem unter der Annahme, daß das Integral über den absoluten Betrag der Gausssschen Krümmung kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Auch hier ist stets die Überspannung mit einem Netz möglich.

Endlich betrachte ich auch berandete Flächenstücke und zeige, daß auch hier meine Methode vielfach zur Lösung des Problems führt.

Ich gebe nun eine knappe Skizze des Gedankenganges der Beweisführung. Die Integration der Differentialgleichungen (3) verlangt die Angabe von Anfangsbedingungen. Man kann die $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ entsprechenden Anfangskurven des Netzes willkürlich vorschreiben. Soll es aber möglich sein, aus ihnen ein die ganze Fläche bedeckendes Netz zu gewinnen, so muß gemäß der Beziehung, die nach (18) S. 311 zwischen der geodätischen Krümmung der Netzkurven und dem Netzwinkel besteht, die geodätische Totalkrümmung jedes Bogens jeder Netzkurve einen Betrag nicht über π besitzen. Daher liegt es nahe, geodätische Linien als Anfangskurven zu wählen. Dann werden sie nach (18) von den Netzlinien unter konstantem Winkel geschnitten. Wählt man die Anfangskurven aufeinander senkrecht, so ist nach Voss die curvatura integra eines Netzvierecks, das sich an beide Anfangskurven anlehnt, durch (20) S. 312 gegeben, hängt also unmittelbar mit dem Netzwinkel zusammen. Man sieht daraus, daß man die Anfangskurven so wählen muß, daß keiner der Quadranten eine curvatura integra hat, deren Betrag $\frac{\pi}{2}$ übertrifft. Dies ist ohne weiteres gewährleistet, wenn überhaupt kein Flächenstück eine curvatura integra besitzt, deren Betrag $\frac{\pi}{2}$ oder größer ist. Bei Flächen negativer Krümmung, deren curvatura integra einen Betrag nicht größer als 2π besitzt, ist es gewährleistet, wenn man die beiden aufeinander senkrechten geodätischen Linien so wählen kann, daß die vier von ihnen bestimmten Quadranten gleiche curvatura integra besitzen. Daß diese Wahl der Anfangskurven möglich ist, zeige ich in § 3. In § 1 und 2 schicke ich einiges über geodätische Linien und geodätisch konvexe Bereiche auf Flächen negativer Krümmung voraus. Vielfach ist die Darlegung hier nur deshalb nötig, weil diese wohl geläufigen Dinge meines Wissens nirgends mit der nötigen Sorgfalt bewiesen sind. Die Bemerkungen über geodätisch konvexe Bereiche erweisen sich als nützlich, weil sich herausstellt, daß die an beide Anfangskurven angelehnten Netzvierecke geodätisch konvex sind. In § 4 lehrt die Integration der Differentialgleichungen (3) zunächst die Lösung des Problems in einer genügend kleinen Umgebung des Schnittpunktes der beiden Anfangskurven. Die Ausdehnung der Lösung über die ganze Fläche stützt sich in § 5 auf die eben erwähnte Konvexität. Bei den Beweisen wird ein intensiver Gebrauch von Gauss-Bonnets Integralformel gemacht. § 6 behandelt die nicht überall negativ gekrümmten Flächen; § 7 bringt endlich einige Bemerkungen über berandete Flächenstücke.

§ 1. Einiges über die geodätischen Linien auf einfach zusammenhängenden singularitätenfreien Flächen nirgends positiver GAUSSscher Krümmung.

1. Es gibt kein geodätisches Nulleck, Eineck oder Zweieck. Denn andernfalls wende man auf dasselbe die GAUSS-BONNETsche Formel[1]

$$2\pi = \sum \alpha_i + \int K\,do$$

an. Man steht dann wegen $-\pi < \alpha_i < \pi$, $K \leq 0$ vor einer Unmöglichkeit[2].

2. Führt man als Kurvenparameter die Bogenlänge s ein und bedeuten u_1, u_2 die Koordinaten auf der Fläche, durch deren Reihenfolge zugleich eine weiter immer festzuhaltende Orientierung auf der Fläche definiert ist, so sind bekanntlich

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \sum \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{du_\lambda}{ds}\frac{du_\mu}{ds} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4}$$

die Differentialgleichungen der geodätischen Linien, und es ist, da (2) die erste Fundamentalform bedeutet,

$$\sum g_{ik} \frac{du_i}{ds}\frac{du_k}{ds} = 1 .$$

Ein bekannter Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen lehrt dann, daß diejenige geodätische Linie

$$u_i = u_i(s, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dot{\bar{u}}_1, \dot{\bar{u}}_2), \qquad (i = 1, 2) \tag{5}$$

für die

$$\bar{u}_i = u_i(0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dot{\bar{u}}_1, \dot{\bar{u}}_2)$$

$$\dot{\bar{u}}_i = \frac{du_i}{ds}(0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dot{\bar{u}}_1, \dot{\bar{u}}_2)$$

ist, samt den ersten Ableitungen nach s stetig von s, $\bar{u}_i$, $\dot{\bar{u}}_i$ abhängt.

3. Die von einem Punkt P der Fläche ausgehenden geodätischen Linien bedecken die ganze Fläche schlicht und lückenlos.

Zum Beweise bemerke man zunächst, daß zu jedem Punkte Q der auf einer geodätischen Linie PQ liegt, eine Umgebung gehört, deren Punkte R gleichfalls auf geodätischen Linien PR liegen. Denn Q ist innerer Punkt der über Q hinaus verlängerten geodätischen Linie PQ. Die von P ausgehenden geodätischen Linien hängen nach **2.** stetig von der Ausgangsrichtung[3] φ in P ab. Man führe auf ihnen die Bogenlänge s als Parameter ein.

---

[1] Man vgl. dazu DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces Bd. III. S. 126.

[2] Die α_i sind die eventuell verhandenen Außenwinkel. Im allgemeinen ist in der GAUSS-BONNETschen Formel $-\pi \leq \alpha_i \leq \pi$. Das Gleichheitszeichen scheidet aber in unserem Falle aus, weil zwei verschiedene Bogen geodätischer Linien einander nicht berühren können und daher am Bereichrand »Zipfel« nicht vorkommen.

[3] Dies sei der im Sinne der Orientierung der Fläche gemessene Winkel gegen eine feste Richtung (z. B. $u_2 = 0$) in P.

In P sei immer $s = 0$. In Q sei $s = s_0$, und es sei für $\overrightarrow{PQ}$: $\phi = \phi_0$. Dann bestimme man eine Zahl $0 < \delta < s_0$ so, daß Q dem Bogen $s_0 - \delta \leqq s \leqq s_0 + \delta$ von $\phi = \phi_0$ angehört. Man wähle eine weitere Zahl $0 < h < \pi$ und markiere auf den geodätischen Linien $\phi_0 - h \leqq \phi \leqq \phi_0 + h$ die Punkte $s = s_0 - \delta$ und $s = s_0 + \delta$. Diese bilden nach **2.** und **1.** zwei stetige Kurven ohne Selbstüberkreuzung, die mit dem Bogen $s_0 - \delta \leqq s \leqq s_0 + \delta$ auf $\phi = \phi_0 - h$ und auf $\phi = \phi_0 + h$ zusammen eine geschlossene Jordankurve bilden. Einem der beiden von ihr bestimmten Bereiche B gehören Q und die Bogen $s_0 - \delta < s < s_0 + \delta$, $\phi_0 - h < \phi < \phi_0 + h$ an, deren jeder diesen Bereich B in zwei Teilbereiche zerlegt. Der Bereich B wird von den genannten Bogen lückenlos bedeckt. Denn andernfalls sei S ein nicht bedeckter Punkt aus B. Dann sei ϕ' die obere Grenze derjenigen Werte $\phi = \phi_1$, für die S in demjenigen Teilbereich von B liegt, an dessen Grenze die Bogen $s_0 - \delta < s < s_0 + \delta$ von $\phi = \phi_1$ und von $\phi = \phi_0 + h$ beteiligt sind. Dann muß aber S auf $\phi = \phi'$ liegen. Denn andernfalls wäre aus Stetigkeitsgründen ϕ' nicht die obere Grenze. Daher wird eine Umgebung B von Q lückenlos und schlicht bedeckt.

Nun sei R ein beliebiger von P verschiedener Punkt der Fläche. Man verbinde einen von P verschiedenen bedeckten Punkt der Fläche mit R durch eine stetige Kurve, auf der ein Parameter t von 0 bis 1 wachsen möge, während sich ein Punkt auf der Kurve von Q nach R bewegt. Man bezeichne mit t_0 die obere Grenze derjenigen Werte von t, für die alle zu $0 \leqq t < t_0 \leqq 1$ gehörigen Punkte mit P geodätisch verbindbar sind. Dann ist der zu $t = t_0$ gehörige Punkt nach **2.** aus Stetigkeitsgründen mit P geodätisch verbindbar, und er besitzt nach dem vorhin bewiesenen eine Umgebung, deren Punkte sämtlich mit P geodätisch verbindbar sind. Dies aber widerspricht dem Begriff der oberen Grenze so lange, als $t_0 < 1$ ist. Daher ist $t_0 = 1$, und R ist mit P geodätisch verbindbar.

4. Der eben zu Ende geführte Beweis zeigt sogar etwas mehr, als wir zu beweisen trachteten. Er lehrt nämlich, daß zu je zwei positiven Zahlen δ, h und zu gegebenen s_0, ϕ_0 eine Zahl $\delta_1 > 0$ gehört, derart, daß sie zu

$$s_0 - \delta < s < s_0 + \delta\,, \qquad \phi_0 - h < \phi < \phi_0 + h$$

gehörigen Punkte der geodätischen Linien durch P einen mit dem Radius δ_1 um Q (wo $s = s_0$, $\phi = \phi_0$) gelegten geodätischen Kreis voll bedecken.

5. Je zwei Punkte der Fläche sind miteinander durch genau einen Bogen einer geodätischen Linie verbindbar.

Dies ergibt sich als eine unmittelbare Folgerung aus **3.** und **1.**

6. Zu jedem beschränkten[1] Teilbereich G der Fläche gehört eine Zahl L, derart, daß jeder Punkt einer von P ausgehenden geodätischen Linie, der G angehört, zu einem $s < L$ gehört. Man kann diesen Sachverhalt kurz ausdrücken, indem man sagt, eine jede geodätische Linie ziehe ins Unendliche.

[1] Darunter sei ein Teilbereich verstanden, dessen Punkte sich mit P durch rektifizierbare Kurven verbinden lassen, deren Länge für alle Bereichpunkte unterhalb derselben endlichen Schranke bleibt.



Zum Beweise führe man als Parameter der Fläche den Winkel ϕ und die Bogenlänge s ein. Dann hat bekanntlich die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\dot{s}^2 + g(s, \phi)\dot{\phi}^2 .$$

Man sieht daraus, daß die P mit einem beliebigen Punkt R aus G verbindende geodätische Linie kürzer ist als jede andere P mit R verbindende Kurve. Daraus ergibt sich **6.** unmittelbar.

7. Eine jede geodätische Linie[1] zerlegt die Fläche in zwei (unendliche) Teilbereiche.

Wir versehen sie mit einer Durchlaufungsrichtung, bezeichnen mit P einen ihrer Punkte und mit ϕ_0 die Durchlaufungsrichtung im Punkte P. Dann machen die zu $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \pi$, $s > 0$ gehörigen, von P ausgehenden geodätischen Bogen den einen, die zu $\phi_0 + \pi < \phi < \phi_0 + 2\pi$, $s > 0$ gehörigen Bogen den anderen Bereich aus.

Daß so zwei Bereiche definiert sind, leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß man die s und ϕ, wie wir schon bemerkten, als Koordinaten auf der Fläche brauchen kann.

Daraus folgt auch nach **1.**, daß die Bereiche punktfremd sind. $\phi = \phi_0$, $\phi = \phi_0 + \pi$, $s \leqq 0$ ist ihr gemeinsamer Rand.

8. Die Schar derjenigen geodätischen Linien, welche eine geodätische Linie[1] g unter festem Winkel schneiden, bedecken die ganze Fläche schlicht und lückenlos.

Der Beweis verläuft ganz analog zu dem unter **3.** geführten.

9. Die durch zwei Punkte P_1 und P_2 der Fläche bestimmte geodätische Linie hängt stetig von s und diesen Punkten ab.

Damit ist gemeint, daß die Lösungen (5) von (4) sich durch Funktionen von s und den Koordinaten von P_1 und P_2 darstellen lassen, die samt den ersten Ableitungen nach s stetige Funktionen dieser 5 Veränderlichen sind.

Aus **2.** entnehmen wir nämlich, daß

$$u_i = u_i(s, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \phi) \qquad (i = 1, 2) \tag{6}$$

samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der 4 Veränderlichen sind. Da die Linien $s = \text{const}$, $\phi = \text{const}$ bekanntlich aufeinander senkrecht stehen, ist die Funktionaldeterminante von (6) nach s, ϕ stets von Null verschieden. Daher werden

$$\begin{aligned} s &= s(u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \\ \phi &= \phi(u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \end{aligned} \tag{7}$$

samt ihren ersten Ableitungen stetig und nach **1.** eindeutig. Sind dann $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ die Koordinaten von P_1 und u_1^*, u_2^* die Koordinaten von P_2, so setze man hier $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$ ein und trage dies in (6) sowie in $\frac{du_i}{ds}$ ein, wodurch unsere Behauptung bewiesen erscheint.

---

[1] Damit ist jetzt gegen den bisher befolgten Sprachgebrauch die von einem ihrer Punkte in beiden Richtungen ins Unendliche verfolgte Linie gemeint.



10. Ist dann

$$u_i = h_i(\sigma, s, P_1, P_2)$$

die Schar der geodätischen Linien, die auf der durch P_1 und P_2 bestimmten geodätischen Linie g im Punkte s senkrecht stehen, ist $s = 0$ in P_1 auf g und σ die Bogenlänge auf den Linien h, so daß auf g stets $\sigma = 0$ ist, so sind die h wieder stetige Funktionen von s, σ, P_1, P_2.

Denn sie hängen jedenfalls stetig von dem Anfangspunkt auf g und der Anfangsrichtung ab, die zu der von g senkrecht ist. Diese Anfangsstücke hängen aber stetig von s, P_1, P_2 ab. Dies wurde in **9.** für die Punkte von g und die Richtungen von g bewiesen. Die zu g senkrechten Richtungen werden aber in bekannter Weise mit Hilfe der ersten Fundamentalform ermittelt, und daher hängen auch sie stetig von s, P_1, P_2 ab.

§ 2. Geodätisch konvexe Bereiche auf Flächen nirgends positiver Krümmung.

1. Eine Kurve, deren geodätische Krümmung nirgends das Vorzeichen wechselt, durchsetzt in der Umgebung keines ihrer Punkte P die sie in diesem Punkte berührende geodätische Linie.

Ist die Kurve so orientiert, daß ihre geodätische Krümmung positiv oder Null ist, so liegt sie zur Linken ihrer geodätischen Tangente oder in derselben, wofern diese mit der Kurve im Berührungspunkte gleich orientiert ist, und wofern die positive Richtung der zweiten Parameterlinie links von der positiven Richtung der ersten Parameterlinie der Fläche liegt.

Um das einzusehen, mache man in bekannter Weise die geodätische Tangente zur Linie $v = 0$ eines Koordinatensystems und wähle ihre Richtung so, daß wachsende Parameter u auf ihr der vorgeschriebenen Orientierung der Kurve entsprechen. Man wähle u als Bogenlänge auf $v = 0$. Die Linien $u = \text{const}$ mögen die zu $v = 0$ senkrechten geodätischen Linien sein und v ihre Bogenlänge, und zwar positiv in der Richtung, die die zu Grunde gelegte Orientierung der Fläche verlangt, an der ein für allemal festgehalten werden soll. Es soll u der erste, v der zweite Parameter sein. Die Linien $v = \text{const}$ sind dann zu den $u = \text{const}$ orthogonal und es ist bekanntlich

$$g_{11}\dot{u}^2 + \dot{v}^2$$

die erste Fundamentalform. Dabei ist noch $g_{11} = 1$ für $v = 0$ und $\dfrac{dg_{11}}{dv} = 0$ für $v = 0$. Ferner ist bekanntlich

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{g_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}}\, v'' . \sqrt{g_{11}} > 0$$

die geodätische Krümmung der Kurve $v = f(u)$[1]. Daher ist $v'' > 0$, und daher liegt die Kurve links von ihrer geodätischen Tangente.

[1] In dieser Form darf man die Gleichung der Kurve annehmen. Denn ist $u = u(t)$, $v = v(t)$ die Gleichung der Kurve in der Nähe des Berührungspunktes, wo $t = 0$ sei, und ist t

2. Eine Kurve auf der Fläche sei abteilungsweise zweimal stetig differentiierbar und die volle Grenze eines einfach zusammenhängenden Teilbereiches der Fläche. Sie werde so durchlaufen, daß das Innere zur Linken bleibt. In jedem inneren Punkte der Randbogen sei dann die geodätische Krümmung positiv (oder Null). In jedem Eckpunkt sei der Außenwinkel[1] zwischen o und π gelegen. Dann ist jede geodätische Tangente des Bereiches und jede geodätische Linie durch eine Ecke, deren Richtung seinem Außenwinkel angehört, eine Stütze des Bereiches, d. h. der Bereich liegt ganz auf einer Seite derselben.

Nach dem in **1.** Gesagten und nach der Definition des Außenwinkels ist diese Behauptung jedenfalls für den in einer gewissen Umgebung des betreffenden Randpunktes gelegenen Teil des Bereiches richtig. Wäre daher unsere Behauptung im großen falsch, so sei P ein Randpunkt, für den sie falsch ist und Q ein weiterer Randpunkt derart, daß die lokale Stütze von P auch in Q den Rand trifft, und daß auf ihr zwischen P und Q kein weiterer Randpunkt liegt. Dann begrenzt ein Randbogen PQ zusammen mit einem geodätischen Bogen PQ einen außerhalb des gegebenen gelegenen Bereich. Will man seinen Rand so durchlaufen, daß das Innere zur Linken bleibt, so bekommt die Randkurve, der Änderung der Durchlaufungsrichtung entsprechend, insoweit eine negative (oder verschwindende) geodätische Krümmung, als sie vom alten Bereich herrührt. In etwaigen derartigen Eckpunkten werden auch die Außenwinkel negativ. Neu treten an dem Bereich nur Außenwinkel bei P und Q auf. Beide zusammen machen höchstens 2π aus, während der übrige Rand zur Summe der Außenwinkel und zum Randintegral der geodätischen Krümmung im ganzen einen sicher negativen Beitrag liefert. Daher führt die Anwendung der Gauss-Bonnetschen Formel

$$2\pi = \int \frac{ds}{\varrho_g} + \sum \alpha_i + \int K\,do$$

auf den neuen Bereich zu einer Unmöglichkeit.

3. Ein Bereich, der unter **2.** genannten Art ist auch in dem Sinne konvex, daß die geodätische Verbindung zweier dem Innern oder dem Rande des Bereiches angehörenden Punkte selbst dem Inneren oder dem Rande angehört, mit dem Zusatz, daß sie mit dem Rand außer den Endpunkten nur dann einen weiteren Punkt gemein haben kann, wenn sie ganz im Rande verläuft.

---

die Bogenlänge der Kurve, so ist, weil $v = 0$ Tangente ist, $v'(0) = 0$ und daher $u'(0) = +1$. Daher kann man aus

$$u = u(t)$$

t als Funktion von u ermitteln und kann daher die Kurve in der Gleichungsform $v = f(u)$ annehmen.

[1] Der Außenwinkel ist der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Winkel, um den man in einer Ecke die der Ankunftsrichtung entsprechende Tangente drehen muß, um sie in die der Abgangsrichtung entsprechende Tangente überzuführen. Es ist der Grenzwert des Winkels, den man bei Abrundung der Ecke erhält.

Verbindet man nämlich zunächst zwei innere Punkte des Bereiches geodätisch, so kann dieser Verbindungsbogen den Rand nicht treffen, denn in einem etwaigen Treffpunkt P kann der Verbindungsbogen nach **2.** nicht Stütze sein. Die in P stützende geodätische Linie hat also die beiden verbundenen inneren Punkte auf verschiedenen Seiten, was wieder **2.** widerspricht.

Verbindet man einen inneren Punkt mit einem Randpunkt geodätisch, so kann die Verbindungslinie keinen weiteren Randpunkt treffen. Denn die Stützlinie in einem solchen Punkt enthält keine inneren Punkte und trägt auch nur auf sich, oder auf ihrer einen Seite innere oder Randpunkte.

Verbindet man endlich zwei Randpunkte durch einen geodätischen Bogen B, so kann dieser keine äußeren Punkte des Bereiches enthalten, weil B die Grenzlage der geodätischen Verbindungen gewisser Punktepaare des Bereichinnern ist. Enthält aber der Bogen auch nur einen inneren Punkt, so enthält er nach dem schon Gesagten außer seinen Endpunkten keine anderen Randpunkte.

4. Nimmt man an, daß die curvatura integra der Fläche endlich ist und führt auf g die von $-\infty$ bis $+\infty$ laufende Bogenlänge s als Parameter ein, so gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Schranke S derart, daß diejenigen geodätischen Linien, welche g unter festem Winkel ϕ bei einer Bogenlänge schneiden, deren Betrag S übertrifft, die Fläche derart in zwei Teile zerlegen, daß der Betrag der curvatura des einen Teiles kleiner als ε ist.

Der Radius R eines geodätischen Kreises sei so groß gewählt, daß der außerhalb desselben gelegene Flächenteil eine curvatura integra mit einem Betrag kleiner als ε besitzt. Man führe geodätische Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt des eben erwähnten Kreises als Ursprung ein. Dann bekommt die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\dot r^2 + G(r, \phi)\dot\phi^2, \quad G(0, \phi) = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(0, \phi) = 1,$$

und es wird die geodätische Krümmung des Kreises vom Radius R bei positiver Durchlaufung (r erster, ϕ zweiter Parameter)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(R, \phi),$$

während sich für die Gausssche Krümmung

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

ergibt. Da also die Ableitung von $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}$ positiv ist und da $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1$ ist bei $r = 0$, so ist $\frac{1}{\rho} > 0$ längs des Kreises. Er umschließt also nach **2.** S. 301 einen konvexen Bereich. Seine Peripherie wird also von jeder geodätischen

Linie, die einen Punkt mit seinem Inneren gemein hat, in genau zwei verschiedenen Punkten getroffen. Wenn nun die Behauptung **4.** nicht richtig wäre, so müßten alle geodätischen Linien unserer Schar in den Kreis vom Radius R eindringen. Jede müßte den Kreis in zwei Kalotten zerlegen. Bei wachsendem s oder wachsendem $-s$ liegen die Kalotten ineinander. Diese müßten, wenn unsere Behauptung falsch wäre, gegen Grenzkalotten konvergieren, die von der betrachteten Schar unbedeckt bliebe, im Gegensatz zu **8.** von S. 299.

§ 3. Zerlegung einer Fläche nirgends positiver GAUSSscher Krümmung und einer endlichen curvatura integra in vier Quadranten gleicher curvatura integra, mit Hilfe von zwei aufeinander senkrechten geodätischen Linien.

Auf einer geodätischen Linie[1] g sei die Bogenlänge s $(-\infty < s < +\infty)$ als Parameter gewählt. In einem ihrer Punkte P, wo $s = 0$ ist, sei das Büschel der geodätischen Linien mit dem Ausgangswinkel ϕ als Parameter angebracht.

1. Eine jede geodätische Linie g zerlegt die Fläche in zwei Bereiche, deren curvatura integra stetig von zwei g bestimmenden Punkten abhängt.

Dies ergibt sich daraus, daß nach **9.** S. 299 die geodätischen Linien selbst stetig von den beiden Punkten abhängen, d. h. daß sie bei hinreichend geringer Änderung des Punktepaares innerhalb eines beliebig gegebenen geodätischen Kreises beliebig dicht beieinander verlaufen. Diesen Kreis kann man aber so groß wählen, daß der außerhalb desselben gelegene Flächenteil eine beliebig kleine curvatura integra besitzt. Beides zusammen lehrt sofort die Richtigkeit der Behauptung.

2. Denkt man sich innerhalb eines beliebigen Flächenstücks irgendwelche Koordinaten eingeführt, so kann man eine geodätische Linie g auch durch einen Punkt P und den Winkel bestimmen, den sie in diesem Punkt P mit der ersten Koordinatenlinie besitzt.

Wählt man als bestimmende Punkte der Linie nach **1.** P und einem im Abstand 1 von ihm in der positiven Richtung von g auf g gelegenen Punkt Q, so hängt Q stetig von P und der Richtung der geodätischen Linie ab. Daher wird die curvatura integra der beiden durch g bestimmten Teilbereiche eine stetige Funktion von P und dem Winkel ϕ, den g in P mit der ersten Koordinatenlinie bildet. Daher kann man nun jedem gegebenen Bereich B und jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ so zuordnen, daß zwei geodätische Linien, die sich in einem beliebigen Punkt P von B unter einem Winkel schneiden, der kleiner ist als ε, Teilbereiche auf der Fläche bestimmen, deren curvaturae integrae sich um weniger als δ unterscheiden. Dabei werden immer die Teilbereiche verglichen, die links, oder die, die rechts von der gerichteten geodätischen Linie liegen.

[1] Damit ist jetzt gegen den früher befolgten Sprachgebrauch die von einem ihrer Punkte in beiden Richtungen ins Unendliche verfolgte Linie gemeint.



3. Die in $s = s_0$ auf g senkrechte geodätische Linie[1] zerlegt jeden der beiden von g bestimmten Bereiche in zwei Teilbereiche, deren curvatura integra stetig von s_0 abhängt.

Der Beweis verläuft ganz analog zu dem unter 1.

4. Man kann die auf g in $s = s_0$ senkrechte geodätische Linie[2] $h(s_0)$ so wählen, daß die beiden von ihr bestimmten Teilbereiche der Fläche gleiche curvatura integra besitzen.

Man wähle eine positive Zahl ε kleiner[3] als der absolute Betrag der halben curvatura integra der Fläche. Man denke sich weiter einen geodätischen Kreis K mit dem Radius s_1 um einen Punkt $s = 0$ von g so groß, daß der außerhalb desselben gelegene Flächenteil eine curvatura integra besitzt, deren Betrag unter ε liegt. Man denke sich die $h(s)$ von g aus so durchlaufen, daß die positive Durchlaufungsrichtung nach der linken Seite von g zeigt. Für $s_0 < -s_1$ liegt dann $h(s_0)$ links von $h(-s_1)$, und diese ist eine Stütze des rechts davon gelegenen Kreises K, der bei positiver Durchlaufung bekanntlich positiv gekrümmt ist. Daher liegt $h(s_0)$ ganz außerhalb, und die curvatura integra des links davon gelegenen Teilbereiches ist größer als die halbe curvatura integra der Fläche. Macht man denselben Schluß für $s_0 > s_1$ und beachtet die in **1.** bewiesene Stetigkeit, so ergibt sich die Richtigkeit von **4.** In dem Falle, wo überall $K < 0$ ist, ist diese senkrechte halbierende geodätische Linie eindeutig bestimmt. Im Falle $K \leqq 0$ aber gibt es möglicherweise mehrere zu g senkrechte, welche die curvatura integra halbieren. Wenn zwei solche, die g bei $s = s'$ und bei $s = s''$ schneiden, vorhanden sind, so halbieren alle die zu g senkrechten, welche g zwischen s' und s'' schneiden, gleichfalls die curvatura integra.

5. Man kann die beiden zueinander senkrechten geodätischen Linien g und h so wählen, daß die vier von ihnen bestimmten Quadranten die gleiche curvatura integra besitzen[3].

Es sei nun weiterhin g eine geodätische Linie, die die curvatura integra halbiert und h eine dazu senkrechte geodätische Linie, die gleichfalls die curvatura integra halbiert. h ist unter Umständen nicht eindeutig bestimmt, da wir auch zugelassen haben, daß K stellenweise Null ist. (Ist $K \equiv 0$, so ist jede zu g senkrechte geodätische Linie brauchbar.) Im Falle $K < 0$ ist h eindeutig bestimmt. Im Falle $K \leq 0$ kann es einen endlichen Teilbogen von g geben, wo die brauchbaren h schneiden. Wir orientieren g und h so, daß sie in dieser Reihenfolge die positive Orientierung der Fläche bestimmen. Hiernach sind wir in der Lage, wieder etwas eindeutig bestimmtes anzugeben. Unter dem positiven Quadranten (g, h) verstehen wir den Durchschnitt derjenigen von g bzw. h bestimmten beiden Teilbereiche, die jeweils die positive Seite von h bzw. g enthalten. Die curvatura integra dieses Quadranten ist eindeutig bestimmt, obwohl bei gegebenem g das dazu senkrechte halbierende h

[1] Vgl. die Erklärung zu Beginn dieses Paragraphen.

[2] Vgl. Anm. 1 auf S. 303.

[3] Im Falle, daß die curvatura integra Null ist, daß also $K \equiv 0$ ist, ist die Behauptung trivial, so daß wir $K \not\equiv 0$ voraussetzen dürfen.

und obwohl bei gegebenem h das dazu senkrechte halbierende g nicht eindeutig bestimmt zu sein brauchen. Diese curvatura integra bezeichne ich mit $H(g, h)$. Ist C die curvatura integra der ganzen Fläche, und ist

$$H(g, h) = \frac{C}{4},$$

so ist die Behauptung bewiesen.

Andernfalls ist es unsere nächste Aufgabe, eine von einem Parameter ϕ abhängende Schar $g(\phi)$, $h(\phi)$ zueinander senkrechter Paare von Halbierungslinien derart zu finden, daß $H(g(\phi), h(\phi))$ stetig von ϕ abhängt und daß die Orientierung $(g(\phi), h(\phi))$ stets dieselbe ist. Dazu betrachte ich die Schar derjenigen gerichteten geodätischen Linien, die mit h einen festen Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \phi$ $\left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ bilden. Für $\phi = \frac{\pi}{2}$ möge die Schar aus den zu g senkrechten geodätischen Linien bestehen. Zwei verschiedene derselben haben nach Gauss-Bonnet keinen Punkt gemein. Denn im entstehenden geodätischen Dreieck wäre die Summe der Außenwinkel kleiner als 2π. In dieser Schar gibt es Linien, welche die curvatura integra halbieren (Beweis ähnlich wie auf S. 304). Sind g' und g'' zwei solche Halbierungslinien, so ist jede zu g' senkrechte geodätische Linie auch zu g'' senkrecht. Denn g' und g'' gehören einem Flächenstreifen der Krümmung Null an, in dem daher die euklidische Geometrie gilt. Ist dann g' eine solche Halbierungslinie, so sei sie so orientiert, daß (g', h) mit (g, h) gleich orientiert ist. Unter den zu g' senkrechten geodätischen Linien suchen wir nun wieder eine Halbierungslinie h' derart, daß (g', h') mit (g, h) gleich orientiert ist. Dann gehört h' auch zu g'' als senkrechte Halbierungslinie, und daher ist $H(g', h')$ eindeutig als Funktion von ϕ bestimmt — obwohl g' und h' nicht eindeutig bestimmt zu sein brauchen. Ich zeige nun weiter, daß $H(g', h')$ stetig von ϕ abhängt, obwohl g', h' vielleicht nicht stetig von ϕ abhängen. Dazu betrachten wir zwei geodätische Linien $g(\phi)$ und $g^*(\phi + \Delta\phi)$, die mit h die Winkel $\frac{\pi}{2} - \phi$ bzw. $\frac{\pi}{2} - \phi - \Delta\phi$ bilden und der öfters genannten Orientierungsbedingung genügen, und die sich in einem Punkte von h schneiden. $g(\phi)$ sei Halbierungslinie und es sei $\Delta\phi$ so klein, daß die curvatura integra der von $g^*(\phi + \Delta\phi)$ bestimmten Halbbereiche von $\frac{C}{2}$ um weniger als eine alsbald noch näher zu bestimmende Zahl $\varkappa$ abweicht, und daß auch der zwischen $g(\phi)$ und $g^*(\phi + \Delta\phi)$ gelegene Teil der Fläche eine curvatura integra hat, deren Betrag $\varkappa$ nicht übertrifft. Gehen wir nun von $g^*(\phi + \Delta\phi)$ zu einer geodätischen Linie $g(\phi + \Delta\phi)$ über, die mit $h(0)$ denselben Winkel $\frac{\pi}{2} - \phi - \Delta\phi$ bildet, und die die curvatura integra halbiert. $g(\phi + \Delta\phi)$ und $g^*(\phi + \Delta\phi)$ schneiden einander nicht, und zwischen beiden liegt ein Flächenstreifen, dessen curvatura integra einen Betrag hat, der $\varkappa$ nicht übertrifft. Die zu $g(\phi)$ senkrechte Halbierungslinie $h(\phi)$ wird von $g(\phi + \Delta\phi)$ für genügend kleine

$\Delta\phi$ in einem Punkte P getroffen[1]. Wir haben so ein geodätisches Viereck[2] auf der Fläche, das von $g(\phi)$, $g(\phi+\Delta\phi)$ und $h(\phi)$ und $h(0)$ begrenzt wird. Seine curvatura integra hat einen Betrag von höchstens 2η. Drei seiner Außenwinkel sind bekannt, nämlich

$$\frac{\pi}{2}-\phi-\Delta\phi\,,\quad \frac{\pi}{2}+\phi\,,\quad \frac{\pi}{2}.$$

Daher wird nach Gauss-Bonnet für den letzten Außenwinkel α

$$2\pi=\frac{3\pi}{2}-\Delta\phi+\alpha+\iint K\,do.$$

Also

$$\left|\alpha-\frac{\pi}{2}\right|<|\Delta\phi|+2\eta.$$

Wählt man also $\Delta\phi$ und η hinreichend klein, und geht man von $h(\phi)$ zu der in P auf $g(\phi+\Delta\phi)$ senkrechten geodätischen Linie über, so zerlegt diese die Fläche in zwei Teilbereiche, deren curvatura integra nach **2.** um weniger als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon>0$ von $\frac{C}{2}$ abweicht[3]. Geht man dann zu der auf g senkrechten halbierenden geodätischen Linie über, so ändert sich die curvatura integra eines jeden Quadranten um höchstens ε. Also hängt die curvatura integra des positiven Quadranten wirklich stetig von ϕ ab.

---

[1] Folgendermaßen beweist man die Existenz dieses Schnittpunktes und gelangt man zu einer Abschätzung seiner Lage: Für genügend kleine $\Delta\phi$ trifft $g^*(\phi+\Delta\phi)$ die Linie $h(\phi)$ in einem Punkt, der vom Schnittpunkt von $g(\phi)$ und $h(\phi)$ um so weniger abliegt, je kleiner $\Delta\phi$ ist. Wir lassen dann stetig $g^*(\phi+\Delta\phi)$ in $g(\phi+\Delta\phi)$ übergehen. Dabei verschiebt sich der Schnittpunkt auf $h(\phi)$ stetig. Aber er kann nie über einen Punkt auf $h(\phi)$ hinausrücken, den wir folgendermaßen bestimmen. Wir bemerken dazu, daß der zwischen $g^*(\phi+\Delta\phi)$ und $g(\phi+\Delta\phi)$ gelegene Streifen eine curvatura integra besitzt, deren Betrag kleiner als η ist. Betrachten wir neben $g^*(\phi+\Delta\phi)$ noch eine geodätische Linie zwischen $g^*(\phi+\Delta\phi)$ und $g(\phi+\Delta\phi)$, die gleichfalls $h(0)$ unter dem Winkel $\pi/2-\phi-\Delta\phi$ schneidet und die $h(\phi)$ trifft, so erkennen wir wie im Text nach Gauss-Bonnet, daß der Winkel, unter dem sich die Linien treffen, von $\pi/2$ um weniger als $|\Delta\phi|+2\eta$ abweicht. Nunmehr bestimmen wir auf $h(\phi)$ zwei Punkte R_1 und R_2 so, daß die beiden R_1 oder R_2 passierenden geodätischen Linien, welche mit $h(\phi)$ die Winkel $\frac{\pi}{2}-|\Delta\phi|-2\eta$ und $\frac{\pi}{2}+|\Delta\phi|+2\eta$ bilden, auf ihrer von den Treffpunkten von $g(\phi)$ und $h(\phi)$ abgewandten Seite eine curvatura integra besitzen, deren Betrag kleiner ist als der Betrag der halben curvatura integra der ganzen Fläche (**4.** S. 302). Alle R_1 oder R_2 passierenden geodätischen Linien, die mit $h(\phi)$ einen Winkel bilden, der zwischen $\frac{\pi}{2}-|\Delta\phi|-2\eta$ und $\frac{\pi}{2}+|\Delta\phi|+2\eta$ liegt, haben die gleiche Eigenschaft. Daher muß man in der Schar derjenigen geodätischen Linien, welche mit $g(0)$ einen Winkel $\frac{\pi}{2}-\phi-\Delta\phi$ bilden, von g^* aus eher zu $g(\phi+\Delta\phi)$ gelangt sein, als der Treffpunkt auf $h(\phi)$ den Punkt R_1 oder den Punkt R_2 überschritten hat.

[2] Es kann zum Dreieck ausarten, wodurch die folgende Überlegung sich ein wenig modifizieren würde.

[3] Als Bereich B wähle man in **2.** einen geodätischen Kreis, der so groß ist, daß P sicher innerhalb desselben liegt für alle $\Delta\phi$, die unter einer gewissen beliebig anzunehmenden Schranke liegen.

Ist dann $\phi = \frac{\pi}{2}$ geworden, so fällt das gerichtete $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ mit dem gerichteten $h(0)$ zusammen, aber $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ fällt auf das negativ gerichtete $g(0)$.

Daher ist der positive Quadrant $\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right),\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ mit einem Quadranten identisch, der $(g(0),\ h(0))$ zu einem Halbbereich ergänzt. Daher ist

$$H(g(0),\ h(0)) + H\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right),\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{C}{2}.$$

Sind daher nicht beide Summanden gleich $\frac{C}{4}$, so ist der eine größer, der andere kleiner als $\frac{C}{4}$; daher gibt es einen Wert ϕ, für den $H(g(\phi),\ h(\phi)) = \frac{C}{4}$ ist, womit **5.** bewiesen ist.

§ 4. Integration der Differentialgleichungen (3).

In den Differentialgleichungen (3) sind die Koeffizienten Funktionen der gesuchten Funktionen u_1, u_2 allein. Sie sind samt den Ableitungen der beiden ersten Ordnungen auf der vollen Fläche stetig. Sie liegen also in jedem beschränkten Teilbereich unterhalb einer vom Bereich abhängigen Schranke.

Wir fragen nach Lösungen von (3) derart, daß für

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \bar{\alpha}_1 : u_\lambda = f_{1\lambda}(\alpha_2) \\ \alpha_2 = \bar{\alpha}_2 : u_\lambda = f_{2\lambda}(\alpha_1) \end{array}\right. ; \quad f_{1\lambda}(\bar{\alpha}_2) = f_{2\lambda}(\bar{\alpha}_1) \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{8}$$

d. h. also, es sollen die Geraden $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ und $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$ in gegebene Kurven der Fläche übergehen, die sich im Bilde von $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$ schneiden. Wir setzen die f_{ik} für alle α_1, α_2 als stetig differenzierbar voraus. Wir schreiben die Differentialgleichungen abgekürzt so:

$$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \phi_\lambda(u_1, u_2, p_{ik}), \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{9}$$

wo

$$p_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_k}$$

ist. Durch die Substitution

$$\alpha_i = \beta_i + \bar{\alpha}_i$$
$$u_\lambda = v_\lambda + f_{1\lambda}(\alpha_2) + f_{2\lambda}(\alpha_1) - f_{1\lambda}(\bar{\alpha}_2)$$

wird die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \phi_\lambda(v_i, q_{ik}, f_{ik}, f'_{ik}, \bar{\alpha}_i), \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2 \\ i, k = 1, 2 \end{pmatrix}$$

wo

$$q_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial \beta_k}$$

ist, so zu integrieren, daß

$$v_\lambda(0, \beta_2) = v_\lambda(\beta_1, 0) = 0$$

wird. Nun werde ein Quadrat $|\beta_i| < b, b > 0$ und der Wertevorrat

$$|v_\lambda| < a, \quad |q_{ik}| < a, \quad a > 0$$

betrachtet. Es sei dafür

(10a) $$|\phi_\lambda| < M,$$

wo M von $\bar{\alpha}_i$ abhängt.

(10b) $$|\phi_\lambda(\bar{v}_i, \bar{q}_{ik}, f_{ik}, f'_{ik}, \bar{\alpha}_i) - \phi_\lambda(v_i, q_{ik}, f_{ik}, f'_{ik}, \bar{\alpha}_i)| < \frac{N}{6}\left\{\sum|\bar{v}_i - v_i| + \sum|\bar{q}_{ik} - q_{ik}|\right\},$$

wo $N > 0$ eine passende — von $\bar{\alpha}_i, f_{ik}, f'_{ik}$ abhängende, von β_i unabhängige Zahl ist. Man bemerkt sofort, daß M und N ihrerseits unterhalb von Schranken liegen, die von $\bar{\alpha}_i$ nicht abhängen, wenn man für $\bar{\alpha}_i$ einen Bereich, wie z. B. $|\bar{\alpha}_i| < \bar{b}_i$ vorschreibt.

Wir bedienen uns der Methode der sukzessiven Näherungen und setzen unter der Annahme

$$|\beta_i| < b, \quad |v_\lambda^{(n-1)}| < a, \quad |q_{ik}^{(n-1)}| < a,$$

(11) $$v_\lambda^{(0)} = 0, \quad v_\lambda^{(n)} = \int_0^{\beta_1}\int_0^{\beta_2} d\beta_1\, d\beta_2\, \phi_\lambda(v_\lambda^{(n-1)}, q_{ik}^{(n-1)}, f_{ik}, f'_{ik}, \bar{\alpha}_i).$$

Dann ist

(12) $$|v_\lambda^{(n)}| < M|\beta_1 \beta_2|, \quad |q_{\nu\lambda}^{(n)}| < M|\beta_\nu|, \quad \nu \neq \lambda,$$

wenn $|v_\lambda^{(n-1)}| < a$, $|q_{ik}^{(n-1)}| < a$ für $|\beta_i| < b$ ist. Nimmt man also

(13) $$Mb^2 < a, \quad Mb < a$$

an, so ist (11), (12) für alle n sichergestellt und man kann sich der Lipschitz-Relation (10b) zum Vergleich zweier Näherungen bedienen. Man hat dann

$$|v_\lambda^{(1)}| < M|\beta_1 \beta_2|, \quad \left|\frac{\partial v_\lambda^{(1)}}{\partial \beta_k}\right| < M|\beta_i|. \qquad (i \neq k)$$

Nun wähle man μ so, daß in $|\beta_i| < b$, $(i = 1, 2)$

$$M|\beta_1 \beta_2| < M\mu\{|\beta_1| + |\beta_2|\}$$
$$M|\beta_i| < M\mu\{|\beta_1| + |\beta_2|\} \qquad (i = 1, 2)$$

ist. Dies ist möglich, weil

$$\frac{|\beta_1 \beta_2|}{|\beta_1| + |\beta_2|} \quad \text{und} \quad \frac{|\beta_i|}{|\beta_1| + |\beta_2|}$$

in $|\beta_i| < b$ beschränkt sind.

Dann wird

$$(14)\qquad |v_i^{(1)}| < M\mu\{|\beta_1|+|\beta_2|\}, \quad |q_{ik}^{(1)}| < M\mu\{|\beta_1|+|\beta_2|\}. \qquad (i, k = 1, 2)$$

Nun sei noch N_1 durch $N\{|\beta_1|+|\beta_2|\} < N_1$, $N < N_1$ bestimmt. Nehmen wir nun zum Ansatz der vollständigen Induktion an, es sei für $\nu = 1, 2, \ldots n$

$$(15)\qquad \begin{aligned} |v_i^{(\nu)} - v_i^{(\nu-1)}| &< N_1^{\nu-1} M\mu \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^\nu}{\nu!} \\ |q_{ik}^{(\nu)} - q_{ik}^{(\nu-1)}| &< N_1^{\nu-1} M\mu \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^\nu}{\nu!} \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2)$$

bewiesen. Für $\nu = 1$ wird dies mit (14) identisch. Dann ergibt sich

$$|v_i^{(\nu+1)} - v_i^{(\nu)}| < N\cdot N_1^{\nu-1}\cdot M\mu \int_0^{|\beta_1|}\int_0^{|\beta_2|} \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^\nu}{\nu!}\, d|\beta_1|\, d|\beta_2|$$

$$< N N_1^{\nu-1} M\mu \left[\frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^{\nu+2}}{(\nu+2)!} - \frac{|\beta_1|^{\nu+2}}{(\nu+2)!} - \frac{\beta_2^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\right]$$

$$< N_1^\nu M\mu \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

und

$$|q_{\lambda k}^{(\nu+1)} - q_{\lambda k}^{(\nu)}| < N\cdot N_1^{\nu-1} M\mu \int_0^{|\beta_i|} \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^\nu}{\nu!}\, d|\beta_i|$$

$$< N N_1^{\nu-1} M\mu \left[\frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^{\nu+1}}{(\nu+1)!} - \frac{|\beta_k|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right]$$

$$< N_1^\nu M\mu \frac{\{|\beta_1|+|\beta_2|\}^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

so daß also (15) für alle ν gilt.

Daraus erschließt man in der üblichen Weise die Existenz genau einer Lösung, für die

$$v_\lambda(0, \beta_2) = v_\lambda(\beta_1, 0) = 0$$

ist, und die in $|\beta_i| < b$ samt den ersten Ableitungen stetig ist und nur Werte aus

$$(16)\qquad |v_\lambda| < a, \quad |q_{ik}| < a$$

annimmt. Dabei ist noch $Mb^2 < a$, $Mb < a$ und $|\phi_\lambda| < M$ in (16). Für die ursprüngliche Aufgabe liefert das folgende Ergebnis:

Man erhält diejenige Lösung von (3), für die

$$u_\lambda(\bar\alpha_1, \alpha_2) = f_{1\lambda}(\alpha_2), \quad u_\lambda(\alpha_1, \bar\alpha_2) = f_{2\lambda}(\alpha_1), \; f_{1\lambda}(\bar\alpha_2) = f_{2\lambda}(\bar\alpha_1)$$

ist, in der Form

$$u_\lambda = v_\lambda(\alpha_1 - \bar\alpha_1, \alpha_2 - \bar\alpha_2) + f_{1\lambda}(\alpha_2) + f_{2\lambda}(\alpha_1) - f_{1\lambda}(\bar\alpha_2).$$

Nach den eben gefundenen Abschätzungen gibt es zu jedem Punkt $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}$ eine gewisse Umgebung $|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| < b$, in der die Lösung existiert und einem Bereich (16) der u_i angehört. Die Größe von b hängt dabei aber demnach von a und M, d. h. von den $\bar{\alpha}_i, f_{ik}, f'_{ik}$ ab. Man kann also nicht hoffen, eine für alle α_i existierende Lösung so ohne weiteres zu gewinnen. Allerdings kann man nach unserer Herleitung behaupten, daß bei Beschränkung der $\bar{\alpha}_i, f_{ik}$ und f'_{ik} auf vorgegebene Bereiche für alle diese $\bar{\alpha}_i, f_{ik}$ und f'_{ik} dasselbe b und dasselbe a und dasselbe M gewählt werden kann.

Wenn insbesondere

$$\begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

für $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ ist, d. h. wenn die gegebenen Kurven in $\bar{\alpha}_i$ einen von Null und π verschiedenen Winkel einschließen, so ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{d(u_1, u_2)}{d(\alpha_1, \alpha_2)}$$

in einer gewissen Umgebung von $\bar{\alpha}_i$ von Null verschieden. Für $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ geht sie nämlich in

$$\begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{vmatrix}$$

über. Somit kann man in der Umgebung dieses Punktes dann die α_i als Koordinatenlinien einführen, und die u_i vermitteln in der Umgebung von $\bar{\alpha}_i$ eine schlichte Abbildung. Es wird sich aber hier im allgemeinen nur um einen Teil derjenigen Umgebung handeln können, in der die u_i existieren.

Es sei noch angemerkt, daß die $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ dann und nur dann die Fundamentalform (2) in eine von der Gestalt (1) überführen, wenn noch Sorge getragen ist, daß α_1 und α_2 längs der Anfangskurven die Bogenlängen bedeuten, d. h. wenn

$$(17) \qquad \sum g_{ik}(f_{\nu 1}(\alpha_\nu), f_{\nu 2}(\alpha_\nu)) \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial u_k}{\partial \alpha_\nu} = 1 \qquad \begin{pmatrix} \nu, \nu = 1, 2 \\ \nu \neq \nu \end{pmatrix}$$

ist. (Vgl. Fußnote [2] auf S. 295.)

Insbesondere will ich nun annehmen, es seien Anfangskurven (8) gegeben, deren $\bar{\alpha}_i$ einem Rechteck $|\bar{\alpha}_i| < \bar{b}_i$ angehören, derart, daß die Anfangskurve selbst einem Quadrat $|u_i| < \bar{a}$ angehört, und daß auf (8) die α_i die Bogenlänge bedeuten. Zu $|u_i| < \bar{a}$ gehören positive Schranken M, μ derart, daß darin

$$|g_{ik}| < M, \; g_{11} \, g_{22} - g_{12}^2 > \mu$$

gilt. Aus (17), das längs der Anfangskurven gilt, folgt daher die Existenz einer Schranke M_1, so daß

$$|f_{ik}| < M_1$$

gilt. Die Anwendung des vorhin bewiesenen allgemeinen Existenzsatzes ergibt daher folgendes Resultat:

Wenn die Anfangskurven (8) einem Quadrat $|u_i| < \bar{a}$ angehören, wenn ihr Kreuzungspunkt aus $|\bar{\alpha}_i| < \bar{b}_i$ entnommen ist, wenn ferner a eine beliebig vorgegebene positive Zahl bedeutet, so gibt es eine nur von $\bar{a}$, $\bar{b}_i$, a abhängende Zahl $M > 0$ derart, daß für alle α_i aus

$$|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| < b\,, \quad (Mb^2 < a\,, Mb < a)$$

entnommenen α_i die durch (8) bestimmten Lösungen existieren und dem Bereich

$$|u_i| < a + 3\bar{a}$$

angehören. Die α_i sollen dabei die Bogenlänge der Anfangskurven bedeuten.

Zu den für b angegebenen Bedingungen tritt noch die weitere, daß $|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| < b$ dem Definitionsintervall der Anfangskurven angehört.

§ 5. Lösung des Problems.

Wir bringen nun die Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen zur Fusion. Wir wählen nämlich als Anfangskurven die in § 3 konstruierten beiden geodätischen Linien g und h, welche die curvatura integra der Fläche in vier gleiche Teile zerlegen und welche in ihrem Schnittpunkt aufeinander senkrecht stehen. α_1 und α_2 bedeute die Bogenlänge derselben und durch wachsende α_1 und α_2 möge eine Orientierung (g, h) bewirkt werden, die mit der auf der Fläche gegebenen übereinstimmt. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sei der Schnittpunkt von g und h. Wir betrachten eine Umgebung von $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Diese Umgebung wählen wir so klein, daß die u_i (α_1, α_2) mit den ersten Ableitungen stetig sind und eine schlichte Abbildung derselben auf die Umgebung des Schnittpunktes der beiden geodätischen Linien liefern. In dieser Umgebung können wir dann α_1 und α_2 als Koordinaten wählen, wodurch die erste Fundamentalform die Gestalt (1) bekommt. Wir betrachten die Netzvierecke, die von Linien $\alpha_1 =$ const, $\alpha_2 =$ const begrenzt werden und stellen einige bekannte Tatsachen zusammen.

Mit ω bezeichne ich den Netzwinkel, d. h. den Winkel, um den man in einem Punkte der Fläche die erste Koordinatenlinie im positiven Sinn drehen muß, um sie in die zweite überzuführen. Dann gilt für die geodätische Krümmung der Koordinatenlinien

$$\frac{1}{\rho_{\alpha_1}} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2}\,, \quad \frac{1}{\rho_{\alpha_2}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1}\,. \tag{18}$$

Hier ist $\frac{1}{\rho_{\alpha_i}}$ die geodätische Krümmung von $\alpha_i =$ const. Die Koordinatenlinien sind dabei im Sinne wachsender Parameterwerte orientiert.



Ferner gilt für die Gausssche Krümmung

$$K = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \tag{19}$$

Nun lehrt (18), daß längs der beiden geodätischen Linien der Netzwinkel konstant und also stets $\frac{\pi}{2}$ ist. Betrachten wir dann namentlich das Netzviereck $0 < \alpha_i < A_i$, so wird seine curvatura integra

$$\iint K do = \iint K \sin \omega \, d\alpha_1 d\alpha_2 = -\iint \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$= -\int_0^{A_1} d\alpha_1 \int_0^{A_2} d\alpha_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = -\int_0^{A_1} d\alpha_1 \left[\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, A_2) - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, 0) \right]$$

$$= -\int_0^{A_1} d\alpha_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, A_2)$$

(denn $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, 0)$ ist die geodätische Krümmung von $\alpha_2 = 0$, also Null). Also

$$\iint K do = -\omega(A_1, A_2) + \omega(0, A_2) = -\omega(A_1, A_2) + \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Aus dieser Relation oder auch durch Wiederholung des Beweises findet man als curvatura integra irgendeines Netzvierecks

$$\bar{A}_1 < \alpha_1 < A_1, \quad \bar{A}_2 < \alpha_2 < A_2$$

$$C(\bar{A}_1, A_1, \bar{A}_2, A_2) = \left(-\omega(A_1, A_2) + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\omega(\bar{A}_1, A_2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\left(-\omega(A_1, \bar{A}_2) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\omega(\bar{A}_1, \bar{A}_2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\omega(\bar{A}_1, \bar{A}_2) + \omega(A_1, \bar{A}_2) + \omega(\bar{A}_1, A_2) - \omega(A_1, A_2).$$

Führt man in der bei Gauss-Bonnet üblichen Weise die Außenwinkel $\tilde{\omega}(\alpha_1, \alpha_2)$ ein, so wird

$$C(\bar{A}_1, A_1, \bar{A}_2, A_2) = +\tilde{\omega}(\bar{A}_1, \bar{A}_2) + \tilde{\omega}(A_1, \bar{A}_2) + \tilde{\omega}(\bar{A}_1, A_2) + \tilde{\omega}(A_1, A_2) - 2\pi. \tag{21}$$

Diese Darstellung[1] der curvatura integra gilt nun auch für Netzvierecke, die zwar nicht selbst schlicht sind, die sich aber aus endlich vielen schlichten

[1] Man kann sie auch unter Verwendung von (18) und unter Vermeidung von (19) mit der Gauss-Bonnetschen Formel beweisen.

Netzvierecken zusammensetzen lassen, wie man durch Addition der den Teilvierecken entsprechenden Relationen (21) einsieht.

Bei Anwendung auf ein schlichtes Netzviereck folgt aus (21)

$$C \geqq -2\pi .$$

Darin liegt die S. 294 schon erwähnte notwendige Bedingung.

Ein jeder Quadrant besitzt also eine curvatura integra, die nicht kleiner als $-\frac{\pi}{2}$ ist, was auch aus (20) folgt.

Betrachten wir dann umgekehrt ein einschließlich seines Randes schlichtes Netzviereck $0 < \alpha_i < A_i$. Dann ist seine curvatura integra durch (20) gegeben. Daraus ersieht man, das $\omega(A_1, \alpha_2)$ bei wachsendem α_2 und daß $\omega(\alpha_1, A_2)$ bei wachsendem α_1 niemals abnimmt. Daher ist nach (18) am Rande des Netzvierecks

$$\frac{1}{\rho_{\alpha_1}} \geqq 0, \quad \frac{1}{\rho_{\alpha_2}} \leqq 0 .$$

Umläuft man nun dies Netzviereck so, daß sein Inneres zur Linken bleibt, so ist demnach die geodätische Krümmung des Randes stets positiv oder Null. Dazu sind die Außenwinkel alle positiv. Daher ist ein solches Netzviereck nach S. 301 geodätisch konvex, und daher gehört es ganz dem Inneren des positiven Flächenquadranten an. Die geodätischen Linien $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ treffen nur in den Bogen $0 < \alpha_2 < A_2$ $(\alpha_1 = 0)$ und $0 < \alpha_1 < A_1$ $(\alpha_2 = 0)$ seinen Rand.

Aus den Formeln (18) folgt durch Integration längs einer Netzlinie

$$\int_0^{\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{\rho_{\alpha_1}} = \omega(\alpha_1, \alpha_2) - \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{\rho_{\alpha_2}} = -\omega(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\pi}{2},$$

so daß der absolute Betrag der Totalkrümmung irgendeines einem schlichten Netzviereck $0 < \alpha_i < A_i$ angehörenden Netzbogens $\frac{\pi}{2}$ nicht erreichen kann.

Es handelt sich nun weiter darum, eine Vorstellung über die Größe der Umgebung zu gewinnen, für die diese Ergebnisse gelten.

Ich werde zeigen, daß jedes Viereck $0 < \alpha_i < A_i$ aus dem Konvergenzbereich schlicht abgebildet wird.

Es seien die α_i' so gewählt, daß meine Behauptungen für jedes Viereck $0 < \alpha_i \leqq A_i < \alpha_i'$ gelten, daß sie aber für Vierecke, deren $A_1 > \alpha_1'$ oder deren $A_2 > \alpha_2'$ ist, falsch werden. Nehmen wir an, das Viereck $0 < \alpha_i < \alpha_i'$ gehöre dem Inneren des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz an.

Dann ist sein Bild in u_1, u_2 Grenzviereck einer Folge konvexer Vierecke, bedeckt also selbst einen schlichten Bereich, der konvex ist in dem Sinne,

daß die geodätische Verbindung zweier innerer Punkte den Rand nicht trifft. Denn zwei innere Punkte sind für genügend große A_i auch innere Punkte eines konvexen Netzvierecks, das Teilbereich aller zu größeren A_i gehörigen ist, und das die geodätische Verbindung ganz im Innern enthält.

Der Grenzübergang $A_i \to \alpha'_i$ $(i = 1, 2)$ lehrt, daß die Grenzkurven eine geodätische Krümmung besitzen, die für $\alpha_1 = \alpha'_1$ nicht negativ und für $\alpha_2 = \alpha'_2$ nicht positiv ist, wenn man die Kurven in Richtung wachsender Parameter durchläuft und daß außerdem die Totalkrümmung jedes Randbogens dem Betrag nach $\frac{\pi}{2}$ nicht übertrifft, und daß alle vorkommenden Netzwinkel auch am Rande von 0 und π verschieden sind. Denn der u_1, u_2-Bereich, der $0 < \alpha_i < \alpha'_i$ entspricht, bleibt ganz im Endlichen[1] und seine Curvatura integra hängt in der bekannten Weise mit dem Netzwinkel zusammen, wie der Grenzübergang lehrt.

Daher kann der Netzwinkel nur dann π sein, wenn ein endlicher Teil des Quadranten bereits die curvatura integra $-\frac{\pi}{2}$ besitzt. Dies ist aber ausgeschlossen, wenn wir annehmen, daß entweder die curvatura integra der Fläche einen absoluten Betrag unter 2π besitzt oder daß doch in keinem Teilbereich die Gausssche Krümmung überall verschwindet.

Daher ist nach S. 313 auch die geodätische Totalkrümmung eines jeden Teilbogens von $\alpha_i = \alpha'_i$ dem Betrag nach kleiner als $\frac{\pi}{2}$.

Die Randkurve des Grenzvierecks $0 < \alpha_i < \alpha'_i$ ist weiter eine Jordan-Kurve. Denn dies trifft wegen des Nichtverschwindens der Funktionaldeterminante am Rand (= Netzwinkel $\neq 0, \pi$) für jeden genügend kleinen Bogen zu. Denn das Viereck sollte ja dem Inneren des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz angehören. Kommen aber trotzdem Doppelpunkte der Randkurve vor, so greife man aus dem Rande einen einfach geschlossenen Teilbogen heraus. Einen solchen kann man nach folgender Vorschrift finden: Man markiere in der α_1-, α_2-Ebene auf dem Rande des α_1-, α_2-Vierecks alle Punkte, die Doppelpunkten der Bildkurve in u_1, u_2, entsprechen und markiere an jedem die entsprechenden u_1-, u_2-Koordinaten. Man nehme einen Randbogen, der zwar von Punkten gleicher u_1, u_2 begrenzt ist, der aber keinen Teilbogen dieser Art enthält. Man gehe dazu von einem beliebigen Teilbogen aus, der von zwei Punkten gleicher u_1, u_2 begrenzt wird, und betrachte die Menge $\mathfrak{M}$ aller Teilbogen desselben, welche die gleiche Eigenschaft besitzen. Die in α_1, α_2 gemessene Euklidische Länge derselben hat eine von Null verschiedene untere Grenze, da sich wegen der lokalen Jordan-Eigenschaft Punkte gleicher u_1, u_2 nirgends häufen können. Dann greife man eine Folge von Teilbogen aus $\mathfrak{M}$ heraus, deren Länge gegen diese untere Grenze konvergiert und deren Endpunkte zugleich gegen Grenzlagen konvergieren und zwar so,

[1] Vgl. den Beweis auf S. 316.

daß auch die den Endpunkten zugehörigen u_1, u_2 gegen Grenzwerte konvergieren. Dann gehört der Grenzbogen zu $\mathfrak{M}$ und besitzt keinen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Teilbogen. Ihm entspricht eine einfach geschlossene JORDAN-Kurve in u_1, u_2.

Man beachte nun, daß der von dem geschlossenen Teilbogen begrenzte Bereich jedenfalls außerhalb des konvexen schlichten Bereiches liegt, auf den $0 < \alpha_i < \alpha_i' (i = 1, 2)$ abgebildet ist. Denn dessen Rand ist ja von der vollen Kurve $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_1', \alpha_2 = \alpha_2'$ gebildet. Daher muß man die geschlossene Teilkurve so durchlaufen, daß dabei $1/\varrho_g \leq 0$ ist, wenn dabei ihr Inneres zur Linken liegen soll. Der eine nun etwa neu auftretende Außenwinkel kann nur allein einen positiven Beitrag — höchstens π — liefern, so daß wir vor einer Unmöglichkeit stehen.

Der Rand von $0 < \alpha_i < \alpha_i' (i = 1, 2)$ ist also eine geschlossene JORDAN-Kurve. Daher wird nun Satz **1** von S. 301 anwendbar. Das Grenzviereck ist somit konvex und gehört dem Inneren des Quadranten an, dessen Rand es nur in den Bogen $0 < \alpha_i \leq \alpha_i', \alpha_k = 0$ $(i \neq k)$ trifft.

Nun wollen wir zeigen, daß genügend nahe benachbarte Vierecke $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i'' (\alpha_i'' > \alpha_i', i = 1, 2)$ ebenfalls schlicht abgebildet werden, daß also diese Vierecke für genügend kleine $\alpha_i'' - \alpha_i'$ ebenfalls von geschlossenen JORDANkurven begrenzt werden.

Wir wählen dazu α_1'' und α_2'' jedenfalls so, daß auch das Viereck $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i''$ $(i = 1, 2)$ dem Inneren des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz angehört.

In den Randpunkten von $0 < \alpha_i < \alpha_i' (i = 1, 2)$ ist nun aber die Funktionaldeterminante $\frac{d(u_1, u_2)}{d(\alpha_1, \alpha_2)} \neq 0$, weil dort die Netzwinkel von Null und π verschieden sind. Daher gibt es zu jedem Randpunkt eine Umgebung, für die die Abbildung schlicht ist. Endlich viele solche Umgebungen reichen dann bekanntlich hin, um den ganzen Rand zu überdecken und daher gibt es Zahlen $\alpha_i'' > \alpha_i' (i = 1, 2)$ derart, daß die Randkurve von $0 < \alpha_i < \alpha_i'' (i = 1, 2)$ ganz in diesen Umgebungen verläuft.

Nun gibt es zu jedem Punkte von $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i''$ eine Umgebung, die schlicht abgebildet wird; zwei α_1, α_2-Punkte, die denselben u_1, u_2-Punkt liefern, müssen demnach eine in α_1, α_2 gemessene Euklidische Entfernung besitzen, die größer als eine gewisse positive Zahl δ ist. Gäbe es also beliebig nahe bei α_1' und α_2' Werte von α_1'' und α_2'' für die die Abbildung nicht schlicht ist, so könnte man jedem $\alpha_i'' > \alpha_i' (i = 1, 2)$ ein solches Punktepaar zuordnen, das gleiche u_1, u_2 liefert und man käme so durch Grenzübergang $\alpha_i'' \to \alpha_i'$ zu dem Schluß, daß auch $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i'$ nicht schlicht abgebildet wird. Daher wird auch $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i''$ $(i = 1, 2)$ für passende α_i' übertreffende Werte von α_i'' schlicht abgebildet. Daher wird also jedes dem Bereich der gleichmäßigen Konvergenz angehörige α_1-, α_2-Viereck schlicht abgebildet.

Wir zeigen nun, daß man die Abbildung über die volle α_1-, α_2-Ebene ausdehnen kann.

Zu dem Zwecke bemerken wir, daß es für die Bündigkeit der vorausgegangenen Überlegungen nicht erforderlich ist, daß das betrachtete α_1-, α_2-Viereck in einem Bereiche gleichmäßiger Konvergenz liegt. Es genügt, daß

das abgeschlossene Viereck aus inneren Punkten endlich vieler Bereiche gleichmäßiger Konvergenz besteht. Dementsprechend haben wir nun nur festzustellen, daß diese Überdeckungseigenschaft jedem Viereck der α_1-, α_2-Ebene zukommt.

Ich nehme zum Beweise irgendein Viereck $0 \leqq \alpha_i \leqq A_i$, das durch unser Verfahren eine schlichte Abbildung auf die u_1-, u_2-Ebene erleidet. In dem Bildbereich kann man dementsprechend die α_1, α_2 selbst als Koordinaten nehmen. Die Länge einer Flächenkurve wird daher

$$L = \int \sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + 2 F \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_2^2}\, ds,$$

wo s die Bogenlänge in der α_1-, α_2-Ebene bedeutet. Hier ist $|F| \leqq 1$. Und daher wird

$$|L| \leqq \int \{|\dot{\alpha}_1| + |\dot{\alpha}_2|\}\, ds.$$

Betrachten wir insbesondere die dem Quadranten $\alpha_i \geqq 0$ $(i = 1, 2)$ angehörigen $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2)$ entsprechenden Geraden des Vierecks, so wird für sie $\dot{\alpha}_i \geqq 0$ $(i = 1, 2)$. Also $|L| \leqq A_1 + A_2$.

Daher liegt das Bild des Vierecks ganz in dem geodätischen Kreis mit dem Radius $\rho = A_1 + A_2$ um P. (Das war das Bild von $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.) Zu dem geodätischen Kreis vom Radius ρ gehört weiter eine Zahl $r(\rho)$ derart, daß darin

$$|u_i| \leq r \qquad (i = 1, 2) \tag{22}$$

gilt. Diesem Quadrat der u-Ebene gehört somit der Bildbereich vollständig an.

Legen wir weiter um jeden Punkt des Vierecks $|u_i| < r$ einen geodätischen Kreis vom Radius ρ, so gibt es eine positive Zahl R derart, daß in dem vom Viereck und von diesen Kreisen bedeckten Bereich $|u_i| < R$ ist. Nun ziehe ich das Schlußergebnis von § 4 heran. Ich wähle dort $\bar{b}_i = A_i$, $\bar{a} = R$, $a = R$. Ich bestimme die hierzu nach § 4 gehörige Zahl b, die ich aber außerdem noch der Bedingung $b < \frac{\rho}{2}$ unterwerfen will. Ich nehme zunächst die Stelle $\bar{\alpha}_1 = A_1 - \frac{b}{n}$, $\bar{\alpha}_2 = 0$ als Kreuzungspunkt und die Linien $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = A_1 - \frac{b}{n}$ als Anfangskurven; die ganze positive Zahl n unterliege dabei der Bedingung $A_1 > \frac{b}{n}$. Alsdann gibt es nach § 4 für $|\alpha_1 - \bar{\alpha}_1| < b$, $0 < \alpha_2 < b$ eine Lösung des Problems, wobei noch $b < A_2$ sein muß, weil die zweite Anfangskurve nur für $0 \leq \alpha_2 < A_2$ erklärt ist.

Daher wird nach einer gerade gemachten Bemerkung das Viereck $0 \leqq \alpha_1 \leqq A_1 + \frac{n-1}{n} b$, $0 \leq \alpha_2 \leq b$ schlicht abgebildet. Denn es ist mit zwei Bereichen gleichmäßiger Konvergenz bedeckt. Man kann daher namentlich in dem neuen Viereck $A_1 - \frac{b}{n} \leq \alpha_1 \leq A_1 + \frac{n-1}{n} b$, $0 \leqq \alpha_2 \leq b$ die Netzlinien als Para-

meterlinien brauchen und daher in diesem Viereck die erste Fundamentalform auf die Tchebychefsche Gestalt bringen. Daher liegt dies Viereck, wie eine S. 316 durchgeführte Abschätzung lehrt, ganz in dem geodätischen Kreis vom Radius $2\cdot\frac{\rho}{2}=\rho$ um den eingeführten Kreuzungspunkt. Wenn wir also nun zwecks Vornahme des zweiten Schrittes $\bar{\alpha}_1=A_1-\frac{b}{n}$, $\bar{\alpha}_2=b$ als Kreuzungspunkt, $\alpha_1=A_1-\frac{b}{n}$, $\alpha_2=b$ als Anfangskurven wählen, so liegen diese Anfangskurven wieder in $|u_i|<R$ und wir können das Schlußergebnis von § 4 wieder mit $\bar{b}_i=A_i$, $\bar{a}=R$, $a=R$ anwenden. Wir erhalten dieselbe Zahl b, die wir wieder $b<\frac{\rho}{2}$ unterwerfen. Wieder erhalten wir nach § 4 in $|\alpha_i-\bar{\alpha}_i|<b$ eine Lösung des Problems. Hier soll nun noch b der Bedingung $A_2>2b$ unterliegen, da nur für $0\leq\alpha_2<A_2$ die zweite Anfangskurve erklärt ist. Wir wollen daher b' statt b schreiben. So erhalten wir ein neues, schlicht abgebildetes Viereck $0\leq\alpha_1\leq A_1+\frac{n-1}{n}b'$, $0\leq\alpha_2\leq b+b'$. Namentlich liegt daher wieder das Viereck $|\alpha_i-\bar{\alpha}_i|<b'$ ganz im geodätischen Kreis vom Radius ρ um den zweiten Kreuzungspunkt. So sieht man, daß man nach endlich vielen Schritten das schlicht abgebildete Viereck $0\leq\alpha_i\leq A_i$ nach rechts hin, d. h. über $\alpha_1=A_1$ hinaus erweitert hat. Ebenso erweitert man es nach oben und schließlich als letzten Schritt auch über die rechte obere Ecke hinaus. Man erhält so ein neues Viereck, das $0\leq\alpha_i\leq A_i$ ganz im Inneren hat, und das mit endlich vielen Bereichen gleichmäßiger Konvergenz bedeckt ist, das also auch schlicht abgebildet wird.

Nehmen wir nun an, unser Verfahren führte nicht zur Erfassung eines jeden Quadrates $0\leq\alpha_i\leq\sigma$, so gäbe es eine Zahl P derart, daß man jedes Quadrat mit $\sigma<\mathrm{P}$ bedecken könnte, daß man aber kein Quadrat mit $\sigma>\mathrm{P}$ bedecken könnte. Das aber widerspricht deutlich den eben abgeschlossenen Betrachtungen.

Unser Verfahren vermittelt also eine schlichte Abbildung der vollen α-Ebene auf die Fläche[1].

Nun bleibt zu zeigen, daß dabei auch die Fläche voll bedeckt wird.

Dies ist sehr rasch für den Fall einzusehen, daß die curvatura integra der Fläche größer als -2π ist. Denn dann ist die curvatura integra des Quadranten größer als $-\frac{\pi}{2}$. Sie sei gleich c. Dann sind nach (20) S. 312

[1] Zunächst lehrt freilich unsere Betrachtung nur die schlichte Abbildung des Quadranten $\alpha_i\geq 0$ auf den Quadranten $u_i\geq 0$. Aber ebenso beweist man auch die schlichte Abbildung jedes anderen α-Quadranten auf den entsprechenden u-Quadranten. Ferner kann längs der Begrenzungslinien des Quadranten vermittelst des Existenzsatzes der stetige Zusammenhang der in den einzelnen Quadranten gewonnenen Lösungen aufgewiesen werden.

die vorkommenden Netzwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2} - c$. Und daher ist in der Fundamentalform

$$\dot{\alpha}_1^2 + 2F\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_2^2, \quad F > \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \gamma.$$

Daher ist die Länge einer jeden Kurve $\alpha_i = \alpha_i(t)$ größer als

$$\int \sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + 2\gamma\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_2^2}\, dt,$$

d. h. größer als die Länge der Kurve $\alpha_i = \alpha_i(t)$ der α-Ebene bei Zugrundelegung eines schiefwinkeligen cartesischen Koordinatensystemes mit dem Netzwinkel $\frac{\pi}{2} - c$. Da aber ein solches Netz die volle Ebene bedeckt, so folgt daraus, daß unser Netz die ganze Fläche bedeckt.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Untersuchung in dem Falle, wo die curvatura integra der Fläche gleich -2π ist. Hier kann nämlich die Fläche nicht immer in ihrer Gänze mit einem Tchebychef-Netz überzogen werden.

Wenn z. B. nur ein endlicher Teil der Fläche eine von Null verschiedene Gausssche Krümmung aufweist, so ist die Bedeckung weder nach unserem Verfahren noch nach einem anderen möglich. Denn wäre sie möglich, so müßte ein genügend großes endliches Netzviereck schon die curvatura integra -2π umschließen. Die curvatura integra eines Netzvierecks ist aber Summe der Außenwinkel minus 2π. Daher müßten alle Außenwinkel Null sein, was der Grundeigenschaft eines Netzes zuwider ist. Auch wenn sich bei der Vierteilung der Fläche ergibt, daß in einem Quadranten nur ein endlicher Teil eine von Null verschiedene Krümmung aufweist, ist aus einem ähnlichen Grund die Bedeckung — wenigstens nach unserer Methode — unmöglich.

Demgegenüber möchte ich nun zeigen, daß unsere Methode z. B. stets dann zur Bedeckung führt, wenn in keinem Teilbereich die Krümmung überall verschwindet.

Zu dem Zwecke bemerke ich, daß der von dem Netz bedeckte Teil der Fläche stets in dem Sinne geodätisch konvex ist, daß die geodätische Verbindung zweier dem Netzinnern angehöriger Punkte selbst das Netzinnere nicht verläßt. Denn der bedeckte Teil der Fläche ist als Grenze einer stets wachsenden Folge konvexer Netzvierecke aufzufassen, derart, daß jede vom Netz bedeckte abgeschlossene Punktmenge schon dem Innern eines endlichen Netzvierecks angehört. Wir brauchen wieder nur den einzelnen Quadranten zu betrachten. Da das Viereck dann ein konvexes Viereck ist, so gehört nach S. 301 die geodätische Verbindung zweier innerer Punkte ganz dem Inneren an. Ferner konvergiert die curvatura integra der den Quadranten approximierenden Netzvierecke gegen $-\frac{\pi}{2}$. Denn bliebe sie kleiner, so wäre ein Teilgebiet des Quadranten unbedeckt und doch würde die vorhin angestellte Abschätzung die Bedeckung des ganzen Quadranten erschließen lassen.

Da aber die curvatura integra gegen $-\frac{\pi}{2}$ konvergiert, und da die Menge der Punkte des Quadranten, wo die GAUSSsche Krümmung Null ist, keinen Bereich enthält, so kann kein Teilbereich unbedeckt bleiben. Nehme ich nun an, ein Punkt Q der Fläche bliebe unbedeckt, so bemerke ich, daß er nach der Anlage unserer Konstruktion nur dem Inneren eines Quadranten angehören kann.

Ich betrachte dann das Büschel der geodätischen Linien im Punkte Q im Innern irgendeines um Q gelegten geodätischen Kreises, der dem Innern des Quadranten angehören möge, und denke mir diese geodätischen Durchmesser durch den Kreis hindurch verfolgt. Sollte ein solcher Durchmesser nicht zu beiden Seiten von Q Punkte des Netzinnern enthalten, so ist dies gewiß für jeden hinreichend benachbarten Durchmesser der Fall, da sonst ein Kreissektor also ein Teilbereich vom Netz unbedeckt bliebe. Dies aber widerspricht der Konvexität des bedeckten Teiles des Flächenquadranten.

Wenn also z. B. die GAUSSsche Krümmung nirgends positiv und die curvatura integra $> -2\pi$ ist, oder wenn im Falle einer curvatura integra gleich -2π die Krümmung überall negativ ist oder doch nur längs gewisser JORDAN-Kurven verschwindet, also z. B. für alle analytischen Flächen nirgends positiver Krümmung, führt unsere Methode zur vollen Erledigung des Bekleidungsproblemes. Notwendig und hinreichend ist in diesem Fall, daß die curvatura $\geqq -2\pi$ ist. Andernfalls bleiben nur im Falle $= -2\pi$ einige Fälle beiseite, wo entweder keine Bedeckung möglich ist, oder doch unsere Methode versagt.

§ 6. Lösung des Problemes für Flächen, bei denen das Integral über den absoluten Betrag der GAUSSschen Krümmung kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist[1].

In diesem Falle wählen wir als Anfangskurven der Integration irgend zwei zueinander senkrechte geodätische Linien.

Man bemerkt nämlich, daß jede geodätische Linie frei von Doppelpunkten ist und sich nicht schließt. Denn es gibt kein geodätisches Null- oder Eineck, wie man wieder mit Hilfe der GAUSS-BONNETschen Formel erkennt. Keine in einem Punkte zu einer geodätischen Linie g senkrechte geodätische Linie h trifft diese ein zweites Mal. Denn wieder würde GAUSS-BONNET die Unmöglichkeit erkennen lassen.

Jeder von g und h bestimmte Quadrant besitzt nun eine curvatura integra, deren Betrag kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

Nun wende man das Ergebnis von § 4 auf diese Anfangskurven an.

Alsdann betrachte man nicht mehr die dem einzelnen Quadranten angehörigen Netzvierecke, sondern betrachte gleich Vierecke $-A < \alpha_i < A$.

[1] Ich begnüge mich mit einer Skizze des Beweises.

Wieder nehme man an, α' sei die obere Grenze der A', für die $-A' < \alpha_i < A'$ dem Bereich der gleichmäßigen Konvergenz angehört, und für die schlichte Abbildung erzielt wird. Dann ist am Rand noch überall der Netzwinkel von 0 und π verschieden. Denn wäre das im Randpunkt $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ nicht der Fall und z. B. $\bar{\alpha}_i > 0$, so betrachte man das Viereck $0 < \alpha_i < \bar{\alpha}_i$. Seine curvatura integra ist durch (20) S. 312 gegeben. Da der Betrag der curvatura integra aber $\frac{\pi}{2}$ nicht erreicht, so erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung. Ferner erkennt man, daß der absolute Betrag des Unterschiedes irgend zweier im Innern oder am Rande von $-A' < \alpha_i < A'$ vorkommenden Netzwinkel $\frac{\pi}{2}$ nicht erreichen kann. Denn zerlegt man ein Viereck $-A_i < \alpha_i < A_i$ durch die beiden Linien $\alpha_i = 0$ in vier Teile, so gilt für die curvatura integra der vier Teile entweder (20) oder aber die Darstellung $\omega - \frac{\pi}{2}$ durch den Netzwinkel. Wegen der Annahme über den absoluten Betrag der Gaussschen Krümmung ist daher der absolute Betrag der Differenz zweier Netzwinkel ω, für die ja $0 < \omega < \pi$ gilt, stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$.

Daraus wieder folgt, daß der Rand des Vierecks $-A' < \alpha_i < A'$ eine einfach geschlossene Kurve ist. Denn wieder folgt daraus, daß kein Netzwinkel 0 oder π ist, daß auch am Rande die Funktionaldeterminante nicht verschwindet; daher ist jeder genügend kleine Randbogen von Doppelpunkten frei. Wäre das im großen nicht der Fall, so konstruiere man wie oben einen einfach geschlossenen Teilbogen, der einen außerhalb des Netzvierecks verlaufenden Teilbereich begrenzt. Will man seinen Rand so durchlaufen, daß das Innere zur Linken liegt, so liefern alle bisherigen Außenwinkel nun negative Beiträge, die Totalkrümmung des Randes aber, wegen der eben über die Änderung des Netzwinkels gemachten Bemerkung, weniger als $\frac{\pi}{2}$. Die curvatura integra des Bereiches gibt weniger als $\frac{\pi}{2}$, der eine neu auftretende Außenwinkel höchstens π, so daß man vor einer Unmöglichkeit steht.

Wie oben (S. 316/317) kann man daher die Abbildung weiter tragen und über die ganze α-Ebene ausdehnen. Daß man so eine Bedeckung der ganzen Fläche erhält, zeigt man durch eine Abschätzung wie auf S. 318, da ja wegen der Voraussetzung über die curvatura integra der Netzwinkel nie der Null oder π beliebig nahe kommen kann.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß man durch eine etwas genauere Betrachtung der Beziehungen zwischen Netzwinkel einerseits, geodätischer Krümmung der Netzlinien sowie curvatura integra der Netzvierecke andererseits das Problem auch stets dann lösen kann, wenn es gelungen ist, durch zwei aufeinander senkrechte geodätische Linien die Fläche so in vier Quadranten zu zerlegen, daß kein Quadrant einen Teilbereich besitzt, dessen curvatura integra einen absoluten Betrag hat, der $\frac{\pi}{2}$ erreicht oder übertrifft.

§ 7. Bemerkungen über beliebige Flächenstücke.

Die in der vorliegenden Arbeit benutzte Methode führt auch in noch anderen Fällen zur Konstruktion eines Netzes. Ich betrachte z. B. ein beliebiges negativ gekrümmtes Flächenstück und lege durch einen seiner Punkte zwei zueinander senkrechte geodätische Linien. Diese haben dann keinen weiteren Punkt gemein. Unser Verfahren liefert für jeden Quadranten ein Tschebychef-Viereck. Das Verfahren zur Konstruktion des Netzvierecks findet dadurch seinen Abschluß, daß entweder der Viereckswinkel, der nicht rechter ist, 0 oder π wird, d. h. wir haben einen Teil des Quadranten von der curvatura integra $\pm\frac{\pi}{2}$ mit einem Viereck bedeckt; oder aber, das Verfahren kommt dadurch zu Ende, daß wir an den Bereichrand stoßen. In beiden Fällen kann man aber das Verfahren erneut aufnehmen, wofern der gegebene Bereich noch nicht erschöpft ist. Sind noch freie Bogen der Anfangskurven verfügbar, so kann man an diese und den Vierecksrand neue Netzvierecke anschließen. Andernfalls kann man in Bereichzipfel, die sich an den Vierecksrand an solchen Stellen anschließen, wo die Netzwinkel von 0 oder π verschieden sind, eindringen, indem man den Vierecksrand als eine Anfangskurve beibehält und eine andere Netzkurve willkürlich in den Zipfel hinein verlängert; willkürlich, d. h. unter Wahrung der Stetigkeit der Kurvenrichtung.

Man sieht also, daß man sehr wohl auch Flächenstücke mit einem einzigen Netz überziehen kann, dessen curvatura integra einen 2π übertreffenden Betrag hat.



Form und Brillanz der Brillanten.

Von A. Johnsen.

(Vorgetragen am 17. Juni 1926 [s. oben S. 210].)

Einleitung.

I. Absorption.

Die Lichtabsorption im Diamanten kann bei den folgenden Untersuchungen außer Betracht bleiben. Setzt man nämlich in der bekannten Absorptionsformel $J_1 = J_0 \cdot e^{-ks}$ die durchschnittliche Absorptionskonstante der gewöhnlichen Gläser[1] ein, also etwa $k = 0.015$ für $\lambda = 580\ \mu\mu$, so ergibt sich bei einer Lichtstrecke $s = 1$ eine Absorption von höchstens 2 Prozent; diese Weglänge tritt in einem ungefähr einkarätigen Brillanten auf, während in einem Zehnkaräter $s < 3$ cm und $\frac{J_0 - J_1}{J_0} < 5$ Prozent sein würde. Nimmt man hinzu, daß Dämpfung und Absorption im Diamanten höchstwahrscheinlich viel geringer sind als in Gläsern, so ergibt sich, daß bei der Berechnung der optischen Wirkungen des Brillanten die etwas größere oder kleinere Länge der Lichtwege vernachlässigt werden darf.

II. Farbenspiel.

Die Dispersion $n_H - n_A$ des Diamanten beträgt 0.0628, d. i. ungefähr das Fünffache der des Wassers und das Dreifache der von leichtem Kronglas; sie ist nahezu gleich der Dispersion des Zirkons ($ZrSiO_4$), etwas kleiner als die von Zinnstein (SnO_2), ein Fünftel der von Anatas (TiO_2) und ein Sechstel der des Rutils (TiO_2).

Die Dispersion der verschiedenen Spektralbereiche läßt sich aus Tabelle I entnehmen; diese enthält die Brechungsindizes n des Diamanten nach den sorgfältigen Messungen von E. A. Wülfing[2] nebst den daraus berechneten Grenzwinkeln J der Totalreflexion, von der später die Rede sein soll.

---

[1] Vgl. H. Hovestadt, Jenaer Glas; Jena 1900, S. 52.

[2] E. A. Wülfing, Min. Mitt. **15**. 350. 1896.

Tabelle I.

Spektrallinie	λ in μμ	n	J
H	397	2.4652	23° 56′
G	431	2.4513	24° 5′
F	486	2.4354	24° 15′
E	527	2.4269	24° 20′
D	589	2.4175	24° 26′
C	656	2.4104	24° 31′
B	687	2.4076	24° 32′
A	760	2.4024	24° 36′

Anschaulicher treten die Farbeneffekte der Dispersion hervor, wenn man die Winkel zwischen violetten und roten Strahlen, etwa der H-Linie und der A-Linie, ermittelt, also $i_H - i_A$ in Luft für den Fall, daß ein weißer Strahl unter verschiedenen Winkeln r im Diamanten gegen Luft einfällt.

Tabelle II.

∡ r	∡ i_H	∡ i_D	∡ i_A	∡ $(i_H - i_A)$
0°	0°	0°	0°	0°
5°	12° 24′	12° 10′	12° 5′	0° 19′
10°	25° 21′	24° 49′	24° 39′	0° 42′
15°	39° 39′	38° 44′	38° 27′	1° 12′
20°	57° 28′	55° 47′	55° 15′	2° 13′
23° 56′ = J_H	90° 0′	78° 44′	77° 3′	12° 57′

Man ersieht aus Tabelle II die zu verschiedenen Winkeln r gehörenden Winkel i_H, i_D, i_A und $i_H - i_A$.

Ähnlich zeigt Tabelle III die Differenzen $r_A - r_H$ im Diamanten für den Fall, daß ein weißer Strahl unter verschiedenen Winkeln i in Luft gegen den Diamanten einfällt.

Tabelle III.

∡ i	∡ r_A	∡ r_D	∡ r_H	∡ $(r_A - r_H)$
0°	0°	0°	0°	0°
10°	4° 9′	4° 7′	4° 2′	0° 7′
20°	8° 11′	8° 8′	7° 59′	0° 12′
30°	12° 1′	11° 56′	11° 42′	0° 19′
40°	15° 31′	15° 25′	15° 7′	0° 24′
50°	18° 36′	18° 28′	18° 6′	0° 30′
60°	21° 8′	20° 59′	20° 34′	0° 34′
70°	23° 6′	22° 57′	22° 29′	0° 37′
80°	24° 12′	24° 2′	23° 33′	0° 39′
90°	24° 36′ = J_A	24° 26′ = J_D	23° 56′ = J_H	0° 40′

Aus den Tabellen II und III ist zu ersehen, daß die Divergenz zwischen roten und violetten Strahlen im Diamanten nicht einmal $^3/_4$° erreicht, während die in Luft austretenden Strahlen bis etwa 13° divergieren können, und zwar

wird dieses Maximum erreicht, wenn ein weißer Strahl im Diamanten unter $\measuredangle J_H$ gegen Luft einfällt, wo $J_H = 23° 56'$ den Grenzwinkel der totalen Reflexion für die H-Linie bedeutet. Dabei ist besonders bemerkenswert, daß, wie Tabelle II zeigt, $\measuredangle (i_H - i_A)$ mit wachsendem $\measuredangle r$ zunächst sehr langsam, schließlich aber sehr schnell wächst, und zwar in dem kleinen Bereich von $r = 20°$ bis $r = 23° 56'$ fast fünfmal so stark als in dem großen Bereich von $r = 0°$ bis $r = 20°$.

III. Glanz.

Die hohe Lichtbrechung des Diamanten, die man aus Tabelle I ersieht, hat zweierlei Folgen; erstens einen starken Glanz der Oberfläche im auffallenden Licht, zweitens einen großen Winkelbereich totaler Reflexion.

Nach der Fresnelschen Formel ist bei einem Einfallswinkel i nebst einem Brechungswinkel r die reflektierte Intensität gleich p-Prozent der auffallenden, wo $p = \left\{ \frac{\text{tg}^2 (i-r)}{\text{tg}^2 (i+r)} + \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} \right\} \frac{100}{2}$; daraus berechnet sich für Natriumlicht, wenn $i = 0°$ ist, $p = 17$, und wenn $i = 67° 32'$ ist, $p = 25$, während für Glas mit $n_D = 1.5$ die betreffenden beiden p-Werte gleich 8 und $14^1/_2$, für Wasser gleich 2 und 11 sind. Durch dieses starke Reflexionsvermögen des Diamanten wird der sogenannte »Diamantglanz« hervorgerufen, der an Intensität zwischen dem »Glasglanz« und dem »Metallglanz« steht.

Da der Grenzwinkel J der Totalreflexion nach Tabelle I für die D-Linie $24° 26'$ beträgt, so umfaßt der Winkelbereich der totalen Reflexion $90° - 24° 26' = 65° 34'$. Werden Lichtstrahlen, die in den Oberteil eines Brillanten eintreten, an Facetten des Unterteils total reflektiert und gelangen dann aus dem Oberteil ins Auge, so erscheinen jene Facetten des Unterteils metallisch glänzend, und zwar wie versilbert. Dieser »Metallglanz« der unteren Facetten sowie der »Diamantglanz« der oberen Facetten liefern zusammen den als Brillanz bezeichneten Effekt, der natürlich ganz unabhängig vom sogenannten Farbenspiel ist; »Farbenspiel« und »Brillanz« machen zusammen das »Feuer« aus.

Es ist leicht einzusehen, daß ein kugelig geschliffener Diamant zwar das Farbenspiel der Tautropfen in erhöhtem Maße, dagegen nur eine sehr geringe Brillanz aufweisen wird, da keine Totalreflexion in ihm zustande kommen kann; sämtliche Reflexionswinkel eines monochromatischen Lichtstrahls, der in eine Diamantkugel eingedrungen ist, sind einander gleich und kleiner als der Grenzwinkel J der totalen Reflexion.

Form und Brillanz.

Der heute übliche dreifache Brillantschnitt, das sogenannte »dreifache Gut«, besitzt am Oberteil außer der Tafel drei Etagen gleich geneigter Flächen, nämlich acht Sternfacetten, acht Hauptfacetten und sechzehn Querfacetten; am Unterteil liegen sechzehn Querfacetten und acht Hauptfacetten sowie die winzige Kalette, die übrigens den optischen Effekt des Unterteils ungünstig beeinflußt und daher neuerdings nicht selten fortgelassen wird.

Die Rundiste stellt ein regelmäßiges Sechzehneck dar, die Tafel ein regelmäßiges Achteck, die Sternfacetten gleichschenklige Dreiecke, die Hauptfacetten Deltoide und die Querfacetten ungleichseitige Dreiecke. Die Symmetrie dieser Brillanten besteht in einer achtzähligen Drehungsachse und $4+4$ Spiegelungsebenen.

Wir betrachten nun denjenigen Facettenbüschel, der von der Tafel, zwei einander gegenüberliegenden oberen Hauptfacetten und zwei einander gegenüberliegenden unteren Hauptfacetten gebildet wird; die Kalette möge fehlen. Die Figur 1 stellt einen Schnitt senkrecht zu diesem Büschel dar. BG entspricht der Tafel, BD und FG zwei oberen Hauptfacetten, CD und CF zwei unteren Hauptfacetten und DF der Rundistenebene; AC ist die Mittelsenkrechte der Tafel, ϕ der spitze Winkel zwischen einer oberen Hauptfacette und der Rundistenebene und ψ der spitze Winkel zwischen einer unteren Hauptfacette und der Rundistenebene.

Wir fordern jetzt, daß jeder Strahl, der senkrecht zur Tafel gerichtet ist und auf die Tafel oder eine obere Hauptfacette auftrifft, an den beiden unteren Hauptfacetten CD und CF nacheinander oder an CF und CD nacheinander reflektiert werde und dann entgegengesetzt der Einfallsrichtung aus der oberen Hauptfacette oder aus der Tafel austrete, und zwar sollen die Strahlen, die auf die Tafel fielen, aus den Hauptfacetten austreten, und die Strahlen, die auf die Hauptfacetten fielen, aus der Tafel austreten (Fig. 1). Welche Werte der Winkel ϕ und ψ genügen diesen Forderungen?

Aus der Figur 1 gewinnt man eine Beziehung zwischen $\measuredangle\phi$, $\measuredangle\psi$ und dem Brechungsindex n; löst man die betreffende Gleichung nach ϕ und nach ψ auf, so ergeben sich die Gleichungen (1) und (2):

$$\operatorname{ctg}\phi = -\frac{1+n\cos 4\psi}{n\sin 4\psi}\,, \tag{1}$$

$$\cos 4\psi = -\frac{\sin^2\phi}{n} (\underline{+}) \frac{\cos\phi}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\phi}\,. \tag{2}$$

In Gleichung (2) bedeutet die Einklammerung des Pluszeichens vor dem Wurzelausdruck, daß es, wie sich noch zeigen wird, in Wegfall kommt; zunächst aber müssen wir mit beiden Vorzeichen rechnen. Wir setzen jetzt $n = n_D = 2.4175$. Dann liefert das Pluszeichen in (2) für $\measuredangle\phi = 0°$ $\measuredangle\psi = 0°$ und für $\measuredangle\phi = 90°$ $\measuredangle\psi = 28° 36^1/_2{}'$; das Minuszeichen liefert für $\measuredangle\phi = 0°$ $\measuredangle\psi = 45°$ und für $\measuredangle\phi = 90°$ $\measuredangle\psi = 28° 36^1/_2{}'$. Wir untersuchen jetzt zunächst, ob etwa ψ ein Maximum oder Minimum durchläuft, wenn ϕ von 0° bis 90° ansteigt. Setzt man $\frac{d\cos 4\psi}{d\phi} = 0$, so ergibt sich aus (2), und zwar unabhängig vom Wurzelvorzeichen,

$$n = 1\,. \tag{3}$$

Da der Brechungsindex $n > 1$, tritt also ein Maximum oder Minimum von $\cos 4\psi$, also auch von ψ, nicht auf. Setzt man $\frac{d\operatorname{ctg}\phi}{d\psi} = 0$, so liefert (1)

$$\cos 4\psi = -n\,; \tag{3a}$$

demnach kommt auch für $\operatorname{ctg} \phi$ und für ϕ kein Maximum oder Minimum in Frage.

Steigt also $\measuredangle \phi$ von 0° bis 90°, so steigt bei positivem Wurzelvorzeichen in (2) $\measuredangle \psi$ von 0° bis 28° 36½′ und fällt bei negativem Wurzelvorzeichen in (2) $\measuredangle \psi$ von 45° bis 28° 36½′.

Nun erinnern wir uns, daß die Forderungen, die zu (1) und (2) führten, nichts darüber bestimmten, ob an den beiden unteren Hauptfacetten *CD* und *CF* der Figur 1 partielle oder totale Reflexion eintreten soll; daher sagen natürlich (1) und (2) nichts darüber aus. Jetzt wollen wir aber fordern, daß an *CD* und an *CF* Totalreflexion stattfinden soll, weil sich sonst kein Metallglanz und somit nur eine sehr geringe Brillanz ergeben würde.

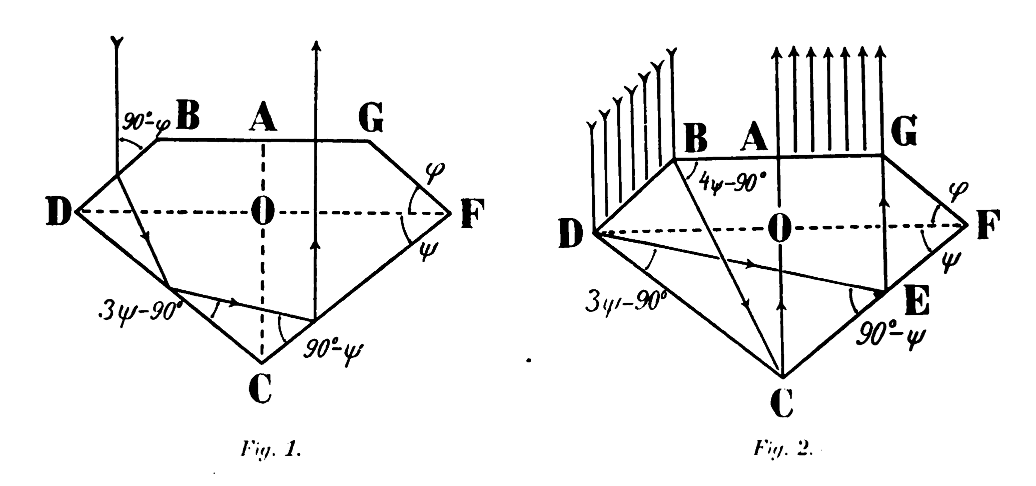


Fig. 1. *Fig. 2.*

Als Bedingung dafür, daß an *CD* in Figur 1 Totalreflexion eintritt, ergibt sich

$$\psi > J, \tag{4}$$

wo J der Grenzwinkel der Totalreflexion und für Natriumlicht $J = J_D = 24° 26'$ ist; als Bedingung dafür, daß an *CF* in Figur 1 Totalreflexion stattfindet, erhält man

$$\psi < \frac{180 - J}{3}, \tag{5}$$

also $\psi < 51° 51'$. Da aus (2) abgeleitet wurde, daß $0° < \psi < 45°$, so liefert (5) keine weitere Einengung der Variationsbreite von ψ, wohl aber (4). Sogleich wird sich zeigen, daß die untere Grenze von ψ, nämlich $\psi > 24° 26'$, die sich soeben aus (4) ergab, noch höher hinaufrückt, wenn wir (4) mit (1) kombinieren. Da nach (4) und (2) $45° > \psi > 24° 26'$, so $180° > 4\psi > 90°$; somit ist $\cos 4\psi$ negativ und $\sin 4\psi$ positiv. Da nun $\phi < 90°$ und daher $\operatorname{ctg} \phi$ positiv, so ergibt sich aus (1)

$$-\cos 4\psi > \frac{1}{n}, \tag{6}$$

also $\psi > 28° 36^1/_2'$, so daß sich als endgültige Begrenzung von ψ ergibt

$$(7) \qquad 28° 36^1/_2' < \psi < 45°.$$

Hiermit ist zugleich die oben aufgeworfene Frage nach dem Wurzelvorzeichen in (2) dahin beantwortet, daß das Pluszeichen ausscheidet, weil es $0° < \psi < 28° 36^1/_2'$ lieferte. — Wünscht man, daß $\psi = \phi$ sein soll, so erhält man aus (1) die quadratische Gleichung

$$(8) \qquad 4 \cos^4 \psi - 3 \cos^2 \psi = - \frac{n+1}{4n};$$

ihre beiden Wurzeln sind $\psi_1 = 39° 1^1/_2'$ und $\psi_2 = 67° 30'$; da $\psi_2 > 45°$, so scheidet es aus und man erhält $\psi = \phi = 39° 1^1/_2'$.

Tabelle IV enthält einige Paare zugeordneter ϕ-Werte und ψ-Werte, wie sie sich aus (1) oder (2) bei Berücksichtigung von (7) ergeben.

Tabelle IV.

ϕ	ψ
0° 0′	45° 0′
26° 43′	41° 0′
39° 1¹/₂′	39° 1¹/₂′
41° 7′	38° 40′
42° 6′	38° 30′
45° 0′	38° 0′
61° 19′	35° 0′
84° 18′	30° 0′
90° 0′	28° 36¹/₂′

Unser bisheriges Ergebnis besagt, daß den aufgestellten Forderungen unendlich viele Paare von ϕ- und ψ-Werten gehorchen und daß alle diese ϕ-Werte und alle diese ψ-Werte in je einem bestimmten, endlichen Winkelbereich liegen. Das Größenverhältnis der Facetten wurde hierdurch nicht berührt. Um zu dem günstigsten Größenverhältnis von Hauptfacetten und Tafel zu gelangen, müssen wir eine neue Forderung hinzufügen. Es sollen alle längs BD auf die linke obere Hauptfacette der Figur 2 fallenden Strahlen längs AG aus der rechten Tafelhälfte wieder austreten und ebenso natürlich alle längs AG auf die rechte Tafelhälfte fallenden Strahlen aus der linken oberen Hauptfacette längs BD wieder austreten, so daß ein Strahl von B nach A bzw. von A nach B gelangt und ein anderer von D nach G bzw. von G nach D; dabei soll auch jetzt wieder jeder auffallende Strahl senkrecht zur Tafel gerichtet sein, an den beiden unteren Hauptfacetten CD und CF nacheinander oder an CF und CD nacheinander total reflektiert werden und dann genau entgegengesetzt zu seiner ursprünglichen Richtung wieder austreten.

Kehrt man in Figur 2 alle Pfeile um, so hat man natürlich den umgekehrten Strahlengang.

Nun ergeben sich aus Figur 2 für das Größenverhältnis der Strecken AO und DO folgende zwei Beziehungen

$$\frac{DO}{AO} = \frac{\operatorname{ctg}\phi - \operatorname{tg} 4\psi}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg} 4\psi} \tag{9}$$

und

$$\frac{DO}{AO} = \frac{\operatorname{ctg}\phi}{2 - 4\sin^2\psi}. \tag{10}$$

Setzt man die rechtsseitigen Ausdrücke von (9) und (10) einander gleich und löst nach $\operatorname{ctg}\phi$ auf, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\operatorname{ctg}\phi = \frac{2\operatorname{tg} 4\psi (\cos^2\psi - \sin^2\psi)}{\cos^3\psi - 3\sin^2\psi - \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg} 4\psi}, \tag{11}$$

womit $\frac{DO}{AO}$ eliminiert ist.

Bereits Gleichung (1) lieferte einen Ausdruck für $\operatorname{ctg}\phi$; setzen wir die rechten Seiten von (1) und (11) einander gleich, so haben wir die alte Forderung mit der neuen vereinigt und erhalten

$$-\frac{1 + n\cos 4\psi}{n\sin 4\psi} = \frac{2\operatorname{tg} 4\psi (\cos^2\psi - \sin^2\psi)}{\cos^3\psi - 3\sin^2\psi - \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg} 4\psi}, \tag{12}$$

womit ϕ eliminiert ist. Aus (12) gewinnt man durch eine Reihe von Umformungen die für $\cos 2\psi$ kubische Gleichung

$$4(n-1)\cos^3 2\psi - 2n\cos^2 2\psi - 4(n-1)\cos 2\psi + n - 1 = 0. \tag{13}$$

Unter den drei Wurzeln von (13) kommt nur eine in Betracht, und die liefert, wenn man wieder $n = n_D = 2.4175$ setzt,

$$\psi = 38°40'. \tag{14}$$

Setzt man den ψ-Wert von (14) in (1) ein, so ergibt sich

$$\phi = 41°7'. \tag{15}$$

Es genügt also nur dieses einzige Wertepaar von ϕ und ψ allen unsern Forderungen. Trägt man diese beiden Werte in (9) oder (10) ein und setzt

$$AO = 1, \tag{16}$$

so folgt

$$DO = 2.61. \tag{17}$$

Hieraus gewinnt man an Hand von Figur 2 sämtliche übrigen Strecken, nämlich $CO = 2.09$, $BG = 2.93$ und $BD = FG = 1.52$ sowie $CD = CF = 3.35$. Insonderheit verhält sich danach die Dicke AO des Oberteils zu der Dicke CO des Unterteils wie 1 : 2.09, die Gesamthöhe AC zum größten Rundistendurchmesser DF wie 2.95 : 5, der größte Tafeldurchmesser BG zum größten Rundistendurchmesser DF wie 5.04 : 9

und der größte Durchmesser BD der oberen Hauptfacetten zum größten Tafeldurchmesser BG wie 2.08 : 4.

Diese Größenverhältnisse nebst den beiden Werten von φ und ψ gewährleisten also maximale Brillanz, d. h. optimale Ausnützung des in Richtung AC auf Tafel und obere Hauptfacetten fallenden Natriumlichtes; Intensitätsverluste entstehen dabei nur durch Reflexion beim Eintritt in den Oberteil und beim Austritt aus dem Oberteil sowie in sehr geringem Maße durch Absorption.

Nach der auf S. 324 angeführten Formel läßt sich folgendes berechnen. Beim Auffallen des Lichtes auf die Tafel entsteht ein Intensitätsverlust von 17 Prozent und hernach beim Austritt aus einer oberen Hauptfacette ein Reflexionsverlust von 15 Prozent der Anfangsintensität; das macht einen Gesamtverlust von 32 Prozent. Der erste Verlust von 17 Prozent trägt aber als Diamantglanz der Tafel zur gesamten Brillanz bei, so daß der Gesamtverlust eigentlich nur 15 Prozent beträgt. Aber auch von dem zweiten Reflexionsverlust, nämlich dem beim Austritt aus einer oberen Hauptfacette reflektierten Anteil, tritt nach mehreren inneren Reflexionen ein kleiner Betrag aus dem Oberteil aus.

Da das Auffallen auf eine obere Hauptfacette unter dem Winkel $\varphi = 41° 7'$ erfolgt, so entsteht ein Reflexionsverlust von 18 Prozent und nachher beim Austritt aus der Tafel ein Reflexionsverlust von 14 Prozent der Anfangsintensität, was wieder einen Gesamtverlust von 32 Prozent ausmacht. Der Betrag von 18 Prozent wird von der Hauptfacette als Diamantglanz reflektiert, aber nicht senkrecht zur Tafel, sondern fast parallel zu ihr. Statt der 14 Prozent gehen endgültig nur $2^1/_2$ Prozent verloren, während $11^1/_2$ Prozent der Anfangsintensität nach inneren Reflexionen aus einer Hauptfacette austreten, und zwar parallel zur Tafelnormale.

Was das Farbenspiel unserer Brillantform betrifft, so liefern die errechneten Werte φ und ψ für weiße Stahlen, die senkrecht zur Tafelebene gerichtet sind und auf Tafel und obere Hauptfacetten fallen, folgendes: Die H-Strahlen und die A-Strahlen divergieren beim Austritt aus der Tafel um 1°, beim Austritt aus einer oberen Hauptfacette um $1^1/_3°$, so daß hier das Spektrum länger wird als dort.

Der in diesem Kapitel geforderte und streng mathematisch behandelte Strahlengang ist bereits unlängst von dem »Laboratorium für Diamantforschung, Düsseldorf-Oberkassel« gefordert und bearbeitet worden. Die betreffende Veröffentlichung[1] enthält aber nicht die Untersuchung selbst, sondern nur deren Ergebnisse, und obendrein weichen diese teilweise von den unseren ab; es werden dort $\varphi = 42°$ und $\psi = 38° 30'$ als optimale Werte angegeben, während die Größenverhältnisse der Durchmesser und der Facetten mit den unseren übereinstimmen. Übrigens findet man in der gleichen Veröffentlichung die optimalen Neigungswinkel der Sternfacetten, der oberen Querfacetten und der unteren Querfacetten gegen die Rundistenebene der Reihe nach zu 22°, 49° und 41° angegeben.

[1] Deutsche Goldschmiedezeitung **29**, 5. u. 6. Heft, Leipzig 1926.



Unser Ergebnis, daß sich die Dicke des Oberteils zu der des Unterteils fast genau wie 1:2 verhalten muß, stimmt bemerkenswerterweise völlig mit einer sehr alten Erfahrung überein; bereits im Jahre 1750 hat DAVID JEFFERIES[1] diese Regel mitgeteilt, die anscheinend schon damals längst bekannt war und später ohne weitere Angaben in die Bücher über Edelsteinkunde von J. R. BLUM (1832), K. E. KLUGE (1860), A. SCHRAUF (1869) usw. aufgenommen worden ist. Dagegen wird in diesen älteren Werken das Verhältnis von größtem Tafeldurchmesser zu größtem Rundistendurchmesser gleich 4:9 anstatt des von uns berechneten Verhältnisses 5:9 angegeben; übrigens machen die Diamantschleifer die Tafel im Verhältnis zur Rundiste schon seit Jahren merklich größer als früher, obwohl das einen größeren Gewichtsverlust bedeutet, wie ja heute überhaupt fast nur auf Brillanz und nicht »auf Gewicht« geschliffen wird; der »Brasilianer« oder »alte Minen«-Schliff war zu dick und »klumpig«, weil seine Tafel zu klein und die Winkel ϕ und ψ zu groß waren.

FRANK B. WADE[2] geht offenbar von anderen Forderungen aus als wir und erhält daher auch andere Ergebnisse, teilt aber weder seine Bedingungen noch seine Berechnungsmethode mit. Nach ihm soll besonders günstig und mit der Erfahrung im Einklang sein $\phi = 35°$ und $\psi = 41°$, $AO:CO = 1:2.09$, $AC:DF = 3:5$, $BG:DF = 2:5$ und $BD:BG = 3.66:4$ (vgl. unsere Figur 2).

---

[1] DAVID JEFFERIES, Treatise on diamonds, London 1750; deutsche Übersetzung von GEORG MARCUS KNOCH, Danzig 1756. S. 29.

[2] FRANK B. WADE, Diamonds; New York and London 1916, p. 63. 64, 68, 69, 77, 78.

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXIV. Gesamtsitzung. 29. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Spranger sprach über »Die Frage nach der Einheit der Psychologie«.

Es ist ein Irrtum, daß die Psychologie direkt an das »unmittelbare« Erleben herankomme. Vielmehr setzt sie immer die Erkenntnis von Gegenstandsordnungen voraus, auf die der subjektiv-seelische Zusammenhang wissenschaftlich bezogen wird. Die gegenwärtig viel erörterte Frage nach dem Verhältnis von naturwissenschaftlicher und geisteswissenschaftlicher Psychologie, mit der eine Anzahl ähnlicher Alternativen zusammenhängt, weist auf den Unterschied zwischen der intentionalen Zuordnung des Seelischen zu den rein mathematisch-chemisch-physikalisch konstruierten Objekten und der Zuordnung zu den Sinngehalten des historisch-objektiven (bzw. idealen) Geistes hin. Eine Mittelstellung zwischen beiden nimmt die allerdings noch sehr in den Anfängen befindliche biologische Psychologie ein. Gemäß diesen Zuordnungsverhältnissen kann man von verschiedenen Schichten der psychologischen Betrachtungsweisen sprechen, die sich gegenseitig ergänzen und aufhellen. Nur der physiologischen Psychologie im engeren Sinne, die das Seelische und das Leibliche einander kausal oder parallelistisch oder metaphysisch-identifizierend, nicht aber im Sinne der intentional-gegenständlichen Gerichtetheit auf den Objektzusammenhang zuordnet, kommt nach dem Stande unserer heutigen Einsicht eine prinzipielle Sonderstellung zu. Innerhalb des Schichtenbaues der reinen Psychologie stellt das Auftreten von sinnvollen Gegenstandsganzheiten und entsprechend von sinnvollen Erlebniszusammenhängen, die beide in der spezifischen Erkenntnisform des »Verstehens« erfaßt werden können, eine im einzelnen genauer zu bestimmende Schwelle zwischen zwei Formen psychologischer Begriffsbildung dar.

2. Hr. F. W. K. Müller legte eine Abhandlung der HH. Dr. E. Waldschmidt und Dr. W. Lentz vor: Die Stellung Jesu im Manichäismus. (Abh.)

Die von Sir Aurel Stein aus Tun-huang in Chinesisch-Turkistan heimgebrachte chinesisch-manichäische Hymnenrolle enthält u. a. mehrere Hymnen auf Jesus: eine große Lobpreisung von 75 Strophen, ein Schlußgebet nach dem Preise Jesu und außerdem einen mit chinesischen Zeichen umschriebenen Hymnus im mitteliranischen Nordwestdialekt. Die Ausdrucksweise dieser Texte ist in weitem Umfang christlich. Sie beweist, daß die durch die Kirchenväter bezeugte Verehrung Jesu bei den Manichäern nicht sekundär eingedrungen ist. Jesus ist für Mani der Erlöser. Als solcher erscheint er unter der in der Hymnenrolle gewöhnlichen Bezeichnung »Großer Heiliger« auch in dem chinesischen Traktat von Chavannes und Pelliot. Eschatologische Vorstellungen verschiedenen Ursprungs werden von Mani miteinander verwoben und zu Jesus in Beziehung gesetzt. Jesus, der dem Adam die Gnosis bringt, geleitet auch die Seele des Erlösten nach dem Tode ins Lichtparadies zurück. Damit erhalten die durch Reitzenstein unter der Bezeichnung »Erlösungsmysterium« bekanntgewordenen Erweckungshymnen der iranischen Turfanfragmente ihre Deutung: es sind Gespräche der aufsteigenden Seele mit Jesus über die finsteren Schrecken des »Fleischeskörpers« und die Herrlichkeit des vom Gläubigen ersehnten Lichtreiches.

3. Hr. Burdach übersandte seine Werke »Vom Mittelalter zur Reformation«, Bd. III, Teil 2: 'Der Dichter des Ackermann aus Böhmen und seine Zeit', 1. Hälfte (Berlin 1926) und »Vorspiel. Gesammelte Schriften zur Geschichte des deutschen Geistes«, Bd. II: 'Goethe und sein Zeitalter' (Halle a. S. 1926).

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Studniczka in Leipzig übersandte seine Arbeit »Ein neues Bildnis des Sokrates« (Sonderabdr. Leipzig 1926).

5. Vorgelegt wurde das mit Benutzung des Archivs der Akademie erschienene Buch »August Potthast, Geschichte der Buchdruckerkunst zu Berlin im Umriß«, hrsg. von Ernst Crous (Berlin 1926).

6. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt

durch die physikalisch-mathematische Klasse:

6000 *RM* als Sonderzuschuß zu den Druckkosten des »Nomenclator animalium generum et subgenerum«,

2000 *RM* für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. Herbert Louis in Berlin nach Bulgarien,

150 *RM* zur Fortführung der Untersuchungen des Hrn. Dr. Fritz Levy in Berlin über Zellteilungsphysiologie;

durch die philosophisch-historische Klasse:

5000 *RM* für die Fortführung der Arbeiten der Orientalischen Kommission,

800 *RM* für die Herausgabe der Bibliothekskataloge des Mittelalters,

500 *RM* für die Bearbeitung des Philo-Index,

1500 *RM* für eine Forschungsreise des Hrn. Prof. Dr. Friedrich Frhrn. Hiller von Gaertringen nach Griechenland,

2000 *RM* für die Neubearbeitung der »Prosopographia imperii Romani«.

Ausgegeben am 4. September.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

XXV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 21. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Hahn sprach über Neue Gesetzmäßigkeiten bei der Fällung und Adsorption kleiner Substanzmengen und deren experimentelle Begründung.

Es werden gewisse Gesetzmäßigkeiten bei der Fällung und Adsorption kleiner Substanzmengen an Niederschlägen anderer chemischer Zusammensetzung aufgefunden und zwei Sätze aufgestellt, die diese Gesetzmäßigkeiten ausdrücken sollen.

Fällungssatz: Ein Element wird aus beliebig großer Verdünnung mit einem kristallisierenden Niederschlag dann ausgefällt, wenn es in das Kristallgitter des Niederschlags eingebaut wird, also Mischkristalle mit den Ionen des kristallisierenden Niederschlags bildet. Tut es dies nicht, dann bleibt es im Filtrat, auch wenn seine Verbindung mit dem entgegengesetzt geladenen Bestandteil des Gitters in dem betreffenden Lösungsmittel beliebig schwer löslich ist.

Adsorptionssatz: Ein Element wird aus beliebig großer Verdünnung an einem Niederschlag (Adsorbens) dann adsorbiert, wenn dem Niederschlage eine der Ladung des zu adsorbierenden Elementes entgegengesetzte Oberflächenladung erteilt worden und die adsorbierte Verbindung in dem vorliegenden Lösungsmittel schwer löslich ist.

Die experimentelle Prüfung dieser Sätze geschah mittels radioaktiver Substanzen, weil diese sich wegen ihrer leichten Nachweisbarkeit in beliebig großen Verdünnungen für die hier behandelten Probleme besonders eignen.

2. Sodann überreichte Hr. Einstein eine Arbeit von Dr. E. Rupp (Göttingen): Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichts.

Es werden zwei von Einstein vorgeschlagene Versuche (»Gitterversuch« und »Spiegeldrehversuch«) über die Interferenzeigenschaften des von Kanalstrahlen emittierten Lichtes (an Quecksilber-Kanalstrahlen) ausgeführt. Beide Versuche beweisen, im völligen Einklange mit der Undulationstheorie des Lichtes, daß das Atom bei der Erzeugung des Interferenzfeldes nicht durch einen Momentanprozeß, sondern durch einen Prozeß von einer Dauer von der Größenordnung der Abklingungszeit der klassischen Theorie beteiligt ist. Dies wird dadurch bewiesen, daß gezeigt wird, daß die zur Interferenz gelangenden Wellen, welche ja von einem und demselben Teilchen herstammen müssen, von räumlich verschiedenen Stellen ausgehen; mit Rücksicht auf die Bewegung der Teilchen folgt dann aus dieser örtlichen Differenz eine zeitliche Differenz der Emission jener Wellen.

3. Vorgelegt wurde die 49. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: »Amphibia: Anura II«, bearbeitet von Dr. Fr. Nieden (Berlin und Leipzig 1926).

Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes.

Von A. Einstein.

(Vorgetragen am 8. Juli 1926 [s. oben S. 274].)

Bisher bin ich der Meinung gewesen, daß Experimente an Kanalstrahllicht Ergebnisse liefern könnten, die mit Ergebnissen der klassischen Undulationstheorie nicht im Einklange sind[1]. Im nachfolgenden will ich eine einfache Überlegung mitteilen, gemäß welcher ein Versagen der klassischen Undulationstheorie auf dem ins Auge gefaßten Gebiete nahezu ausgeschlossen erscheint. Diese Überlegung ist auch darum von einem gewissen Interesse, als sie zu einer bequemen Voraussage der zu erwartenden Interferenzerscheinungen führt. Wesentlich für die mitzuteilende Überlegung ist es, daß sie von der Undulationstheorie nur soweit Gebrauch macht, als ihre Ergebnisse durch Versuche als gesichert erkannt sind.

Ich gehe aus von folgendem Satze, dessen Zutreffen sich kaum bezweifeln lassen dürfte: Eine ausgedehnte, homogene ruhende Lichtquelle läßt sich optisch stets ersetzen durch eine ihr gleiche, parallel verschobene ruhende Lichtquelle. Dieser Satz beansprucht Gültigkeit natürlich nur insoweit, als sich die Grenzen der Lichtquelle nicht bemerkbar machen. Seine Gültigkeit äußert sich z. B. darin, daß die »Interferenzerscheinungen an dünnen Blättchen« von der Entfernung der Lichtquelle vom Interferenzapparat völlig unabhängig sind.

Wir betrachten nun einen homogenen Kanalstrahl im Vakuum. Dieser ist — von einem mit den Teilchen bewegten Koordinatensystem K' aus betrachtet — eine ruhende Lichtquelle. Bei der zuerst von Wien eingeführten Versuchsanordnung zur Untersuchung des Abklingens des Kanalstrahlleuchtens ist (wegen des Abklingens längs des Kanalstrahles) diese Lichtquelle allerdings keine homogene; aber dies ist für die Interferenzeigenschaften des emittierten Lichtes ohne Belang. Nach dem obigen Satze können wir diese in bezug auf K' ruhende Lichtquelle durch eine parallel verschobene, in bezug auf K' ruhende ersetzen. Vom »ruhenden« Koordinatensystem K aus betrachtet, bedeutet dies, daß wir einen Kanalstrahl zu sich selbst parallel ver-

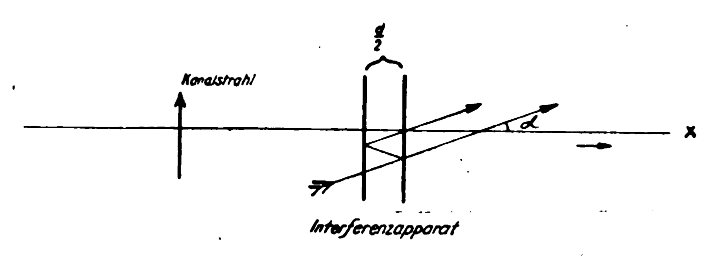
[1] Vgl. z. B. meine Notiz »Vorschlag zu einem die Natur des elementaren Strahlungsemissionsprozesses betreffenden Experiment«. Naturwissenschaften 1926, Heft 14.

schieben können, ohne daß dies an dem von ihm emittierten Lichte nachgewiesen werden könnte. Daraus folgt aber weiter: Ein Kanalstrahl kann in seinen optischen Wirkungen ersetzt gedacht werden durch einen unendlich fernen von gleicher Natur und gleicher Geschwindigkeit.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, die Interferenzerscheinungen des von einem Kanalstrahl emittierten Lichtes einfach vorauszusagen, da sich ein unendlich ferner Kanalstrahl bezüglich des nach dem im Endlichen befindlichen optischen System gesendeten Lichtes offenbar durch ein System kontinuierlich verteilter ruhender Lichtquellen von passender Farbe ersetzen läßt.

Der betrachtete Kanalstrahl K sei parallel der Y-Achse eines Koordinatensystems. Wir denken ihn uns durch einen die negative X-Achse im Unendlichen schneidenden ersetzt und beschränken uns auf Fortpflanzungsrichtungen, die nahezu der X-Y-Ebene parallel sind. Ist ν_0 die Eigenfrequenz der Kanalstrahlteilchen, so hat das gegen die X-Achse unter dem Winkel α gesandte Licht in erster Näherung die Frequenz $\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \sin \alpha\right)$. Wir dürfen so rechnen, wie wenn die zu α gehörigen Lichtquellen im Unendlichen ruhten und die Frequenz ν hätten. Wir dürfen ferner die Intensität der Strahlung als von α unabhängig betrachten, wenn wir uns noch auf kleine Winkel α beschränken, was wir tun wollen.

Damit ist jegliches Beugungsproblem auf ein solches mit ruhenden Lichtquellen reduziert. Im folgenden sollen einige solche Probleme schematisch besprochen werden. Der Interferenzapparat sei durch zwei halbspiegelnde parallele Ebenen gebildet, deren Abstand $\frac{d}{2}$ sei. Beobachtet werde durch das Auge oder dieses in Kombination mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr. Formal kommt dies darauf hinaus, daß wir ohne optische Apparate hinter dem Interferenzapparat die Erregung in einer im Unendlichen ($x = \infty$) senkrecht zur x-Achse stehenden Ebene untersuchen.



1. Fall. Zwischen Kanalstrahl und Interferenzapparat ist nichts geschaltet, was die Lichtstrahlen ablenkt.

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen höchster Intensität ist für den $\measuredangle\ \alpha$

$$\frac{d \cos \alpha}{\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \sin \alpha\right)},$$

falls Kanalstrahlen und reflektierende Ebenen genau senkrecht zur x-Achse stehen. Für hinreichend kleine α ist dies gleich

$$\frac{d}{\lambda_0}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Die Bewegung der Kanalstrahlteilchen hat also einfach eine Verschiebung der Interferenzfigur um den Winkel $+\frac{v}{c}$ zur Folge. Dies gibt eine bequeme Methode zur Messung der Kanalstrahlgeschwindigkeit an die Hand.

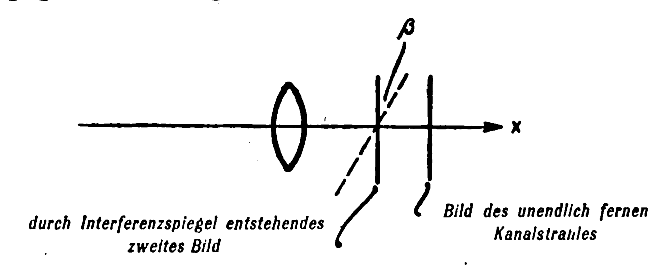
Ebenso einfach erledigt sich der Fall, daß zwischen Kanalstrahl und Interferenzapparat ein optisches System eingeschaltet ist, das einem auf ∞ eingestellten Fernrohr äquivalent ist und den Winkel $z$mal vergrößert. In diesem Falle ist die Winkelverschiebung der Interferenzfigur $\frac{1}{z}$ mal größer als in dem soeben betrachteten Fall.

2. Fall. Zwischen Kanalstrahl und Interferenzapparat ist eine Linse oder ein Linsensystem mit der Brennweite f geschaltet.

Die Linse bzw. das Linsensystem erzeugt von dem im Unendlichen gedachten Ersatzkanalstrahl ein durch ruhende Lichtquellen ersetzbares Bild, welches senkrecht zur X-Achse steht. Zur Ordinate y dieses Bildes gehört die Wellenlänge $\lambda_0\left(1-\frac{v}{c}\alpha\right)$, wobei $\alpha=\frac{y}{f}$, also die Wellenlänge $\lambda_0\left(1-\frac{v}{c}\frac{y}{f}\right)$. Der Wirksamkeit der beiden Spiegel kann dadurch Rechnung getragen werden, daß man sich diese Lichtquelle durch Spiegelung verdoppelt denkt; das so gebildete zweite Bild wäre im Abszissenabstand $-d$ von der ersten zu denken, derart, daß je zwei Punkte der Lichtquellen mit gleichem y kohärent sind. Beide Bilder wirken als kohärente Lichtquellen.

Wären diese beiden Lichtquellen monochromatisch, so würden alle ihre zusammengehörigen Punktepaare dieselbe Interferenzfigur im Unendlichen liefern. Hierzu wäre nämlich nötig, daß die Punkte aller Paare in Wellenlängen gemessen den gleichen Abstand hätten. Da dies nicht der Fall ist, kann im Unendlichen keine deutliche Interferenz entstehen.

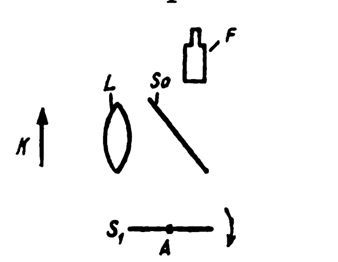
Vollständige Interferenz ist dadurch herbeizuführen, daß dem durch Spiegelung an den Interferenzspiegeln entstehenden Bilde gegenüber dem andern eine Neigung β gegeben wird gemäß dem Schema



Der $\measuredangle\ \beta$ wäre durch die Bedingung bestimmt, daß $\frac{d-\beta y}{\lambda_0\left(1-\frac{v}{c}\frac{y}{f}\right)}$ von y unabhängig wäre. Es müßte also sein $\beta=\frac{v}{c}\frac{d}{f}$. Eine solche Drehung der gespiegelten virtuellen Lichtquelle um den Schnittpunkt mit der X-Achse läßt sich dadurch herbeiführen, daß man die spiegelnden Flächen um den Winkel

$\frac{\beta}{2}$ gegeneinander neigt. Damit die Drehung des gespiegelten Bildes um dessen Schnitt mit der X-Achse erfolgt, ist allerdings notwendig, daß dieser Punkt auf der spiegelnden Fläche liege, welche um den $\measuredangle \frac{\beta}{2}$ gedreht wird.

Am besten dürfte sich dies Ergebnis mit Hilfe des MICHELSONschen Interferometers prüfen lassen. Die Anordnung wäre die folgende:



Die Linse L ist so aufgestellt, daß sie (über S_0) einen unendlich fernen Gegenstand in der Reflexionsebene von S_1 darstellt. Die Spiegel S_1 und S^2 werden so aufgestellt, daß in dem auf ∞ eingestellten Fernrohr F Interferenzkreise sichtbar sind, falls eine ruhende Lichtquelle verwendet wird. Die optische Wegdifferenz[1] sei l. Nun verwendet man als Lichtquelle den Kanalstrahl K. Dann verschwinden die Interferenzringe. Sie müssen aber wieder auftreten, wenn der Spiegel S_1 um A in der Pfeilrichtung um den Winkel $\frac{\beta}{2}$ gedreht wird.

Dies Resultat bedarf natürlich noch der experimentellen Nachprüfung, wenn auch seine Gültigkeit aus der obigen Betrachtung schon sehr wahrscheinlich gemacht ist. Die theoretische Bedeutung dieses Ergebnisses für die Lichttheorie erhellt aus folgender Überlegung. Das Resultat gilt auch für den Fall, daß die Entfernung des Kanalstrahles K von der Linse L gleich der Brennweite der letzteren ist; in diesem Falle läßt es aber eine besonders anschauliche Deutung zu. Im Fernrohr F können nur solche Teile eines Wellenzuges zur Interferenz kommen, welche gleichzeitig und in derselben Richtung eintreffen. Diese sind aber von K (wegen der Neigung von S_1) von zwei Orten ausgegangen, welche die Distanz $f \cdot \beta$ oder $\frac{v}{c}\, d$ haben. Es dürfte deshalb kaum zu bezweifeln sein, daß sie zu verschiedenen Zeiten von einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Teilchen ausgehen. Daraus würde zu schließen sein, daß das die Interferenz bestimmte Feld nicht durch einen Momentanprozeß erzeugt sein kann, wie dies durch die Quantentheorie nahegelegt wird; für die Erzeugung des Interferenzfeldes scheint vielmehr die Undulationstheorie volle Gültigkeit zu behalten, wie dies der Auffassung von BOHR und HEISENBERG entspricht[2].

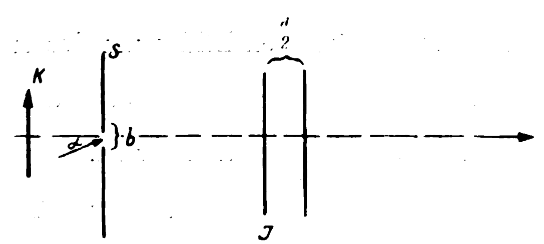
3. Fall. Zwischen Kanalstrahl und Interferenzapparat ist ein Spalt bzw. Gitter eingeschaltet.

Der Fall, daß die Kanalstrahlen hinter einem Spalt von der Breite b vorbeigehen, hat zuerst meine Aufmerksamkeit auf das hier behandelte Problem

[1] l sei positiv gerechnet, wenn der Spiegel S_1 entfernter ist als der Spiegel S_2.

[2] Insbesondere darf man nicht annehmen, daß der Quantenprozeß der Emission, der energetisch durch Ort, Zeit, Richtung und Energie bestimmt ist, auch in seinen geometrischen Eigenschaften durch diese Größen bestimmt sei. Das Zutreffende in der Auffassung von BOHR, CRAMERS und SLATER scheint also nur darin zu bestehen, daß diese Autoren die strenge Gültigkeit der Erhaltungssätze aufgeben wollten.





gelenkt. Man denke sich nämlich ein Kanalstrahlteilchen, welches unmittelbar hinter dem Schirme S an dem Spalt b vorbeigehe. Die Zeit des Vorbeiganges ist $\frac{b}{v}$, die Länge des nach der Undulationstheorie durch den Schirm gesandten Wellenzuges gleich $b\frac{c}{v}$. Erzeugt der Interferenzapparat eine Gangdifferenz d, welche gleich oder größer als $b\frac{c}{v}$ ist, so sollte also keinerlei Interferenz wahrnehmbar sein. An dem Zutreffen dieser Konsequenz zweifelte ich aber, weil ich wegen der Tatsachen der Quantentheorie vermutete, daß das von den Kanalstrahlen durch elementare Emissionen in bestimmter Richtung ausgesandte Licht streng monochromatisch sei. Ich glaubte, daß die Tatsache, daß der Elementarakt der Emission in dem Spalte b stattfindet, für die Beschaffenheit des emittierten Lichtes nicht maßgebend sein könne, weil ich die Erzeugung auch des Wellenfeldes auf einen Momentanakt zurückführen zu müssen glaubte. Daß dies nicht mit der Grundannahme dieser Arbeit vereinbar ist, wurde vorhin am 2. Fall gezeigt. Es wird sich hier mit noch größerer Deutlichkeit erweisen.

Wir fragen nach der Beschaffenheit der Strahlung, welche nach einem unendlich fernen Punkte der Achse gelangt, in Abhängigkeit von dem Gangunterschied d. Zu diesem Zweck denken wir wieder den Kanalstrahl ins Unendliche gerückt und durch ruhende Lichtquellen von der Frequenz $\nu_0\left(1+\frac{v}{c}\alpha\right)$ ersetzt, wobei die Beugung an dem Spalt zu berücksichtigen ist. Der Spalt sei breit, aber nicht unendlich breit gegen die Wellenlänge λ_0. Nach der Beugungstheorie ist die Intensität des aus der durch α charakterisierten Einfallsrichtung in die Richtung der positiven X-Achse gebeugten Lichtes der Größe

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\alpha\right)}\right]^2$$

proportional. In diesem Ausdruck kann ohne Fehler von Belang λ durch λ_0 ersetzt werden. Dagegen muß berücksichtigt werden, daß die Abweichung des λ von λ_0 von erheblichem Einfluß ist auf das Ergebnis des Interferenzvorganges mit dem Gangunterschied d. Eine den Interferenzapparat senkrecht passierende monochromatische Strahlung besitzt hinter dem Apparat eine Intensität, welche der Größe

$$\cos^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}\right)$$

proportional ist. In diesem Ausdruck ist die Abhängigkeit der Größe λ von α wesentlich. Die Intensität der nach $x=\infty$ gelangenden Strahlung ist be-

züglich ihrer Abhängigkeit von d nach dem Gesagten bestimmt durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda_0}\alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda_0}\alpha\right)^2} \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda}\right) d\alpha .$$

wobei

$$\lambda = \lambda_0\left(1 - \frac{v}{c}\alpha\right).$$

Die Ausführung des Integrals liefert, abgesehen von einer belanglosen multiplikativen Konstante, den Wert

$$1 + \left(1 - \frac{d}{b}\frac{v}{c}\right)\cos\left(\pi\frac{d}{\lambda_0}\right),$$

bzw. den Wert 1, je nachdem $d < \frac{2bc}{v}$ oder $d > \frac{2bc}{v}$.

Im letzteren Falle sind also keine Interferenzen sichtbar. Im ersteren wird die relative Stärke der Interferenzen zum nicht interferierenden Anteil durch die lineare Funktion

$$1 - \frac{v}{bc} d$$

gegeben. Die relative Interferenzstärke sinkt also mit wachsendem Gangunterschied linear zu 0 ab. Dies Resultat beruht wesentlich auf der Beugung am Spalte.

Wenn unser Satz von der Einflußlosigkeit einer Parallelverschiebung der Lichtquelle auf die Interferenzerscheinung richtig ist, so gilt dies Resultat auch für die Emission von Kanalstrahlteilchen, die unmittelbar hinter dem Spalt vorbeigehen, entgegengesetzt zu meiner ursprünglichen Erwartung.

Ich will nun zeigen, daß dieses Resultat genau den Erwartungen der Undulationstheorie entspricht, nach welcher das Kanalstrahlteilchen wie ein HERZscher Oszillator emittiert. Nach dieser sendet das einzelne Kanalstrahlteilchen, während es am Spalte vorbeigeht, einen Wellengang mit der Frequenz ν_0 nach der positiven x-Richtung durch den Spalt. $\frac{b}{v}$ ist die Dauer dieser Emission. Der Interferenzapparat macht aus diesem einen Wellenzuge zwei von gleicher Amplitude, welche zeitlich um $\frac{d}{c}$ gegeneinander versetzt sind. Die beiden Wellenzüge interferieren also nur während einer Zeit $\frac{b}{v} - \frac{d}{c}$ an einer ins Auge gefaßten Stelle miteinander, und die auch nur für so kleine

d, daß diese Größe positiv ist. In diesem Falle ist das Zeitintegral des Quadrates der Erregung in einem Punkte der x-Achse proportional zu

$$2\int_0^{\frac{d}{c}} \cos^2(2\pi\nu_0 t)\,dt + \int_0^{\frac{b}{v}-\frac{d}{c}} \left[\cos(2\pi\nu_0 t) + \cos\left(2\pi\nu_0\left(t-\frac{d}{c}\right)\right)\right]^2 dt\,.$$

Da dies der Gesamtintensität in dem ins Auge gefaßten Punkte proportional ist, so erhält man für diese durch Ausrechnung bis auf einen belanglosen Proportionalitätsfaktor wieder den Wert

$$1+\left(1-\frac{d}{b}\frac{v}{c}\right)\cos\left(\pi\frac{d}{\lambda_0}\right),$$

was mit dem obigen Ergebnis völlig übereinstimmt.

Die analoge Untersuchung eines regelmäßigen Gitters würde ein periodisches lineares Absinken und Anwachsen der Interferenzstärke mit d statt eines einmaligen linearen Absinkens ergeben haben. Bedeutet $\frac{b}{d}$ die Dicke der Gitterstäbe sowie der Gitterlücken, so wären die Gangdifferenzen größter und kleinster Interferenzfähigkeit durch die Gleichungen

$$d_{\max} = 2n\frac{bc}{v}\,,\quad d_{\min} = (2n+1)\frac{bc}{v}$$

charakterisiert, wobei n eine ganze positive Zahl (einschl. 0) bedeutet.

Ergebnis. Wenn der Satz von der Einflußlosigkeit der Parallelverschiebung der Lichtquelle auf die Interferenzerscheinungen ausgedehnter Lichtquellen richtig ist, so müssen die an homogenen Kanalstrahlen beobachtbaren Interferenzerscheinungen gemäß der klassischen Emissionstheorie des Lichtes verlaufen, d. h. so, wie wenn die Kanalstrahlteilchen bewegte Herzsche Oszillatoren wären. Ein Einfluß der Quantenstruktur der Strahlung ist nicht zu erwarten.

Nachtrag.

Die vorliegende Arbeit ist im Mai 1926 geschrieben und diente Hrn. Rupp als Wegleitung für Versuche, welche in der nachfolgenden Arbeit beschrieben sind. Dieselben haben die Theorie vollkommen bestätigt.

Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichtes.

Von Dr. E. Rupp
in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein.)

Die Frage, ob die Interferenz des Lichtes aus einem Momentanprozeß der emittierenden Atome erklärt werden kann oder ob das Interferenzfeld durch Wellenzüge hervorgerufen wird, die zu verschiedenen Zeiten von dem Atom weggehen, hat bisher noch keine Klärung gefunden. Die Versuche W. Wiens über die Leuchtdauer der abklingenden Atome[1] wie Versuche des Verfassers[2] über die Interferenzfähigkeit des abklingenden Kanalstrahllichtes lassen keine Entscheidung dieser Frage zu. Die größterreichte Interferenzweglänge wie deren Erhaltenbleiben längs einer längeren Wegstrecke des abklingenden Kanalstrahls können allerdings durch Annahme einer endlichen Erzeugungszeit für das von einem Atom erzeugte Interferenzfeld, wie sie aus der Undulationstheorie folgt, in einfacher Weise erklärt werden.

Die von A. Einstein in der vorangehenden Abhandlung entwickelte Theorie über die Interferenzeigenschaften des von Kanalstrahlen emittierten Lichtes gab Veranlassung, Interferenzuntersuchungen an Kanalstrahlen unter diesen neuen Gesichtspunkten nochmals vorzunehmen. Einstein schlägt in dieser Arbeit zwei Versuche vor, die im positiven Falle eine Entscheidung zugunsten einer endlichen Erzeugungszeit des Interferenzfeldes pro Elementarprozeß fällen lassen. Diese Versuche seien hier kurz als A. Gitterversuch und als B. Spiegeldrehversuch bezeichnet.

Vorweggenommen sei hier gleich das Ergebnis, daß die ausgeführten Experimente eindeutig so entscheiden, wie es nach der Undulationstheorie zu erwarten war, auf welche auch die theoretischen Gedankengänge Einsteins sich aufbauen.

A. Der Gitterversuch.

Treffen monochromatische Lichtstrahlen einer bewegten Lichtquelle, aus dem Unendlichen kommend, auf ein Michelsonsches Interferometer, so erzeugen sie im Beobachtungsfernrohr Interferenzen bis zu einem bestimmten hohen Gangunterschied. Bringt man in den Weg dieser Lichtstrahlen ein Gitter, so werden, wenn die Lichtquelle sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, die

[1] W. Wien, Ann. d. Phys. **60.** 597. 1919. **66.** 229. 1921. **76.** 109. 1925.
[2] E. Rupp, Ann. d. Phys. **79.** 1. 1926. Hier zitiert als Teil I.

Interferenzstreifen periodisch verschwinden und wiedererscheinen, wobei die Örter der Maxima und Minima der Streifenintensität gegeben sind durch die Gleichungen

$$d_{\max} = 2(a_1 - a_2)_{\max} = \frac{2nb}{v} c\,, \quad d_{\min} = 2(a_1 - a_2)_{\min} = 2(n+1)\frac{bc}{v} \quad (n = 0, 1, 2 \cdots),$$

wenn $2(a_1 - a_2)$ der Gangunterschied, b die Breite einer Gitterlücke bzw. eines Gitterstabes, falls die Undulationstheorie im Falle bewegter Lichtquellen volle Gültigkeit behält.

Wären die Interferenzen jedoch eine Eigenschaft des Interferenzfeldes selber, also unabhängig von einem periodischen Emissionsprozeß des Atoms, wie es die Quantenvorstellung nahelegt, so müßten die Interferenzstreifen bei vergrößertem Gangunterschied stets in gleicher Deutlichkeit erhalten bleiben[1].

Bei dem Gitterversuch handelt es sich also darum, das Interferenzfeld des Elementarprozesses in einzelne Teilstücke zu zerlegen und die Interferenzfähigkeit dieser Stücke zu prüfen. Eine solche Zerlegung in Teilstücke ist grundsätzlich auf zwei verschiedene Wege möglich. Entweder wird das von einem ruhenden Atom emittierte Licht in einzelne Teile zerlegt, indem man den Strahlenweg intermittierend offen läßt und versperrt. Da die Sperrdauer stets nur kurz sein darf, muß man sich eines Unterbrechers bedienen, der in Zeiten von der Größenordnung 10^{-8} sec trägheitslos arbeitet. Als solche Unterbrecher kommen in Frage:

die durch kurze elektrische Wellen gesteuerte Kerrzelle und

ein System rotierender und ruhender Nikols, ähnlich den Lichtschwebungsversuchen von Righi.

Diese Versuche vermögen wohl über das Interferenzfeld Aussagen zu machen, nicht aber in so einfacher Weise den Zusammenhang der Perioden dieses Feldes mit periodischen Vorgängen im Atom klarzustellen. Bei derartigen Unterbrechungsversuchen wird eine Aufspaltung der ursprünglichen Linie entsprechend einer Schwebungsmodulation nicht eintreten (vgl. G. Joos, Phys. Zt. 27, 401, 1926), da Aufspaltung nur möglich ist bei quantenhaften Vorgängen. Eine Lichtwelle kann aber nur »moduliert« werden, wenn der Modulationsvorgang am Emissionsort einsetzt, nicht auf ihrem Wege durch den Raum. Hingegen wäre bei diesen Versuchen eine Linienverbreiterung zu erwarten.

Ein zweiter Weg scheint hierzu geeigneter, indem bewegte Atome während der Emission hinter durchlässigen und undurchlässigen Strichen eines Gitters vorbeifliegen, wodurch eine periodische Unterteilung des von ihm erzeugten Wellenfeldes verursacht wird, entsprechend der Geschwindigkeit des leuchtenden Atoms. Es gehören hier zu verschiedenen Teilwellenzügen verschiedene Örter des emittierenden Atoms.

Eine solche Unterteilung war in der früheren Untersuchung schon gesucht worden[2], indem das Licht des abklingenden Kanalstrahls an einem Doppel-

---

[1] A. Einstein, Naturwissenschaften Heft 14, 1926.
[2] Teil I S. 15 unten.



spalt vorbeiging und dann auf seine Interferenzfähigkeit untersucht wurde. Diese Versuche führten jedoch zu keinem Ergebnis, wie angenommen wurde infolge der Strahlstreuung und der Geschwindigkeitsverteilung im Strahl.

Versuchanordnung.

Die elektrische und optische Apparatur war die früher verwendete[1]. Die Röhrenspannung lieferte ein Transformator mit Gleichrichtung. Als Kanalstrahllichtquelle fand stets die Quecksilberlinie 546 $m\mu$ Anwendung, da diese Linie in einfachster Weise Interferenzen hohen Gangunterschieds liefert. Die größterreichte Interferenzweglänge war früher 60 cm[2]. Die aus dem Dopplereffekt gemessene Geschwindigkeit betrug stets $1.9 \cdot 10^7$ cm/sec.

Die optische Anordnung ist in Fig. 1 skizziert.

K = abklingender Kanalstrahl. Druck im Beobachtungsraum unter 0.001 mm Hg. Kühlung mit flüssiger Luft.
P = planparalleles Fenster, an die Röhre aufgekittet.
B = Blende mit verstellbarer Öffnung.
G = Gitterraster mit verschiedener Gitterkonstanten. Es standen drei vorzüglich geteilte Gitter zur Verfügung[3]:

1. Abstand entsprechender Striche (Lücke + Stab) 0.02 cm.
2. Abstand entsprechender Striche 0.01 cm.
3. Abstand entsprechender Striche 0.005 cm.

L_1 = Linse mit der Brennweite $f_1 = 4$ cm, Öffnungsverhältnis $o_1 = 3.5$.
L_2 = Linse $f_2 = 40$ cm, $o_2 = 3$.

Die Anordnung der Linse L_1 L_2 entspricht einem auf Unendlich gestellten Fernrohr, ihre Brennpunkte fallen also in einem Punkt zusammen.

Bei einem Teil der Versuche wurden beide Linsen weggenommen, so daß das durch das Gitter gegangene Licht unmittelbar die Verteilerplatte des Interferometers traf.

Der Abstand KG ist möglichst kurz gewählt, 1.8 cm. An G liegt die Linse L_1 unmittelbar an. Die Entfernung L_2 S_1 betrug etwa 40 cm.

Fig. 1.

F = Grünfilter aus Glas für die Linie Hg 546 $m\mu$.

J soll das Michelsonsche Interferometer andeuten, die Anordnung ist hier genau wie früher beschrieben (dortige Fig. 1). Schlitzblende bb zwischen den Spiegeln von 4 — 5 mm Breite und 5 cm Höhe gestatten, die durch den Öffnungswinkel der Linse L_2 bedingten Dopplerkomponenten in Richtung des Strahls herabzusetzen.

Das Interferometer war auf Interferenzen gleicher Dicke eingestellt.

---

[1] I S. 4. Hierbei wirkt die Gaedesche Stahlpumpe unmittelbar im Beobachtungsraum, nicht etwa im Kanal der Röhre, wie in den »Physikal. Berichten« irrtümlich referiert.

[2] I S. 14.

[3] Von J. C. Haas, Frankfurt a. M., wofür hier bester Dank ausgesprochen sei.

Die Versuchsröhre wurde sehr stark belastet, um genügend Lichtintensität im Abklingleuchten zu erhalten. Es sei hier bemerkt, daß schlechtes Vakuum im Beobachtungsraum den gefundenen Effekt zerstört. Die Versuche wurden nun in folgender Weise ausgeführt:

Bei einer bestimmten Öffnung der Blende B und mit einem bestimmten Gitter G wurde die Intensität und Schärfe der Interferenzen als Funktion des Gangunterschieds $2(a_1 - a_2)$ des abklingenden Kanalstrahllichtes ermittelt. Die Schätzung der Interferenzintensität geschah in der Weise, daß das Gitter zuerst mit seinen Strichen senkrecht zum Kanalstrahl gestellt wurde, wobei der zu erwartende Effekt der periodischen Intensitätsschwankungen der Interferenzstreifen auftrat. Dann wurde das Gitter um 90° gedreht, seine Striche standen dann parallel zum Strahl, welche Stellung die Streifenintensität nicht beeinflußt. Um vor physiologisch bedingten Irrtümern frei zu sein, wurden nur solche Intensitätsschätzungen aufgezeichnet, die mit ausgeruhtem Auge sofort als Unterschiede zu erkennen waren. Jedes längere Herumsuchen, das leicht zu Täuschungen führt, wurde vermieden. In manchen Fällen, wo die Unterschiede vielleicht durch längeres Beobachten hätten erhalten werden können, wurden daher lieber gar keine Angaben gemacht (die Stellen u in Fig. 2). Die in Fig. 2 eingezeichneten Intensitätsschätzungen können naturgemäß nur qualitative Geltung beanspruchen. Sie sollen die periodischen Intensitätsschwankungen anschaulich vor Augen führen.

Ergebnisse (Fig. 2).

I. Anordnung mit den Linsen L_1 L_2.

1. Gitter mit Abstand entsprechender Striche $2d = 0.02$ cm; Blende vor dem Kanalstrahl 4 mm weit. Erscheinung Fig. 2a.
2. Gitter $2d = 0.01$ cm; Blende 4 mm. Erscheinung Fig. 2b.
3. Gitter $2d = 0.005$ cm; Blende 4 mm. Erscheinung Fig. 2d.

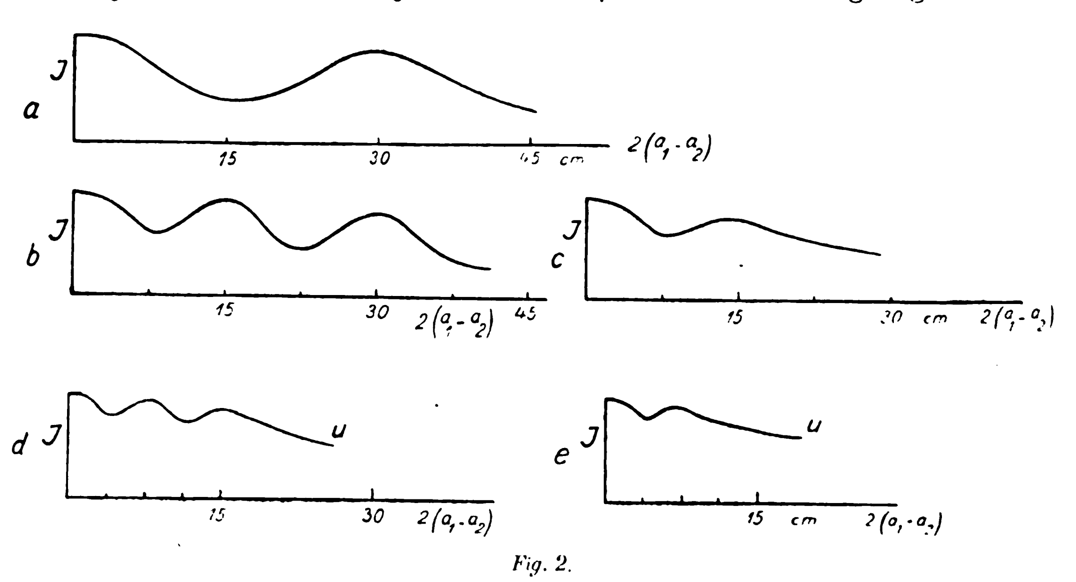


Fig. 2.

II. Anordnung Linsen L_1 L_2 weggenommen. Abstand des Gitters G von der Mitte der Verteilerplatte $S_0 = 6$ cm. Streifenschärfe fast noch deutlicher als vorher, jedoch im ganzen lichtschwächer.

1. Gitter $2d = 0.02$ cm; Blende 2 mm, » 4 » } Erscheinung dieselbe Fig. 2a.
2. Gitter $2d = 0.01$ cm; Blende 2 mm, » 4 » } Erscheinung dieselbe Fig. 2b. » 6 » Fig. 2c.
3. Gitter $2d = 0.005$ cm; Blende 2 mm, zu lichtschwach zur sicheren Beobachtung. Blende 4 mm Fig. 2d. Blende 6 mm Fig. 2e.

Die Interferenzstreifen zeigen also periodische Intensitätsänderungen, ohne jedoch ganz zu verschwinden. Die Änderungen hängen mit der Dichte der Gitterstriche ursächlich zusammen. Mit dem halben Strichabstand werden die Perioden halb so groß; sie sind unabhängig, ob die Linsenanordnung entsprechend einem auf unendlich eingestellten Fernrohr gewählt ist, oder ob überhaupt kein optisches System zwischen Gitter und Interferometer geschaltet ist. Andere Linsenkombinationen jedoch vernichten den Effekt. Die Änderungen werden undeutlicher mit engerem Gitter, die Gesamtintensität der Streifen nimmt ebenfalls mit engerem Gitter ab. Die periodischen Änderungen verschwinden mit größerer Öffnung der Blende B. Die beobachteten Maxima haben eine ziemlich große Breite, infolge der Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Strahl.

Vergleich der Intensitätsschätzungen mit der Theorie.

Die Abstände der Maxima sollen nach der Theorie sein:

1. $0.02 \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{1.9 \cdot 10^7} = 31.5$ cm, gefunden 0 und 30 cm.
2. $0.01 \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{1.9 \cdot 10^7} = 15.7$ » » 0.15, 30 cm
3. $0.005 \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{1.9 \cdot 10^7} = 7.8$ » » 0.7 – 8, 15 cm.

Zwischen Theorie und Experiment besteht also zufriedenstellende Übereinstimmung. Zu erklären wäre noch das nicht völlige Verschwinden der Interferenzstreifen an den Orten der Minima und das Verschwinden der periodischen Änderungen mit größerer Blendenöffnung B und mit engerem Gitter.

α) Ursache des Nichtverschwindens der Streifen an den Orten der Minima. Die periodischen Änderungen bleiben im Falle I 1 und II 1 auch noch erhalten, wenn statt Abklingleuchten Übergang zum Umladeleuchten vorhanden ist (Vakuum im Beobachtungsraum 0.08 bis 0.001 mm Hg). Und zwar werden die Minima nicht merklich unschärfer. Erst bei vollem Um-

ladeleuchten und bei weggenommener Kühlung tritt an Stelle der periodischen Streifenänderung ein kontinuierliches Streifenband. Rührt das Nichtverschwinden der Streifen an den Minimumsorten etwa von ruhender Intensität im Kanalstrahllicht her, so wäre ein volles Verschwinden aller Streifen jedenfalls für Abklingleuchten zu erwarten. Da aber für Abklingleuchten und Übergang zum Umladeleuchten die Streifenminima nicht merklich deutlicher werden, ist zu schließen, daß das nicht völlige Verschwinden der Interferenzstreifen an den Orten der Minima auf apparative Gründe zurückzuführen ist, seien es Unvollkommenheiten des Fensters P, der Spiegel und Platten des Interferometers oder »falsches« Licht. Solch apparativen Fehler liefern teils »weiß«, teils kontinuierliche Streifen. Sie sind bei der geringen gesamten Lichtintensität im einzelnen schwer kontrollierbar und damit auch schwer ausschaltbar.

β) Verschwinden der periodischen Änderungen mit größerer Blendenöffnung. In größerem Abstand vom Kanalende (weitere Blende B) kommen auch bei gutem Vakuum im Beobachtungsraum und guter Kühlung bei Quecksilberkanalstrahlen Störungen der Lichtemission vor (im Gegensatz zu den Wasserstoffkanalstrahlen), wie in Teil I S. 17 aus der Fig. 3 zu erkennen. Das Verschwinden der periodischen Veränderung mit größerer Blendenöffnung, wie es in Fig. 2c auftritt, ist zum Teil auf solche Störungen zurückzuführen. Denn die periodischen Änderungen werden stets verschwinden. wenn Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen der emittierenden Atome gleichzeitig vorkommen, wie es bei Störungen der leuchtenden Atome, teils durch ruhende Atome, teils durch ineinanderlaufende bewegte Atome, der Fall sein wird. Auch kann das Abklingen der Atome im Strahl zum Verschwinden der periodischen Änderungen Anlaß geben. Verschiebt man die Blende B bei 2 mm Weite mit Gitter 1 längs des Kanalstrahls parallel zum Strahl, so erhält man unmittelbar am Kanalende periodischen Änderungen entsprechend Fig. 2a, bei einer Blendenstellung in etwa 5 mm vom Kanalende jedoch wird das Minimum bei 15 cm sehr undeutlich, wie es bei Störungen der Lichtemission zu erwarten ist.

γ) Verschwinden der periodischen Änderungen mit engerem Gitter. Mit engerem Gitter wird die Gesamtintensität erheblich vermindert, und die Minima werden unschärfer. Diese Unschärfe wird zum größten Teil in physiologischen Wirkungen begründet sein, da das Erkennen von Intensitätsunterschieden mit Abnehmen der Gesamtintensität ebenfalls abnimmt. Die Verwendung noch engerer Gitter würde wohl keine brauchbaren Ergebnisse fördern, solange es nicht gelingt, die kontinuierliche Intensität (Fall α) ganz zu beseitigen.

Hervorgehoben sei, daß die vorliegenden Messungen nicht durch irgendwelche Dopplereffekte entstellt sein können. Die ersten Nullstellen würden liegen infolge

1. Wärmebewegung der Quecksilberatome bei etwa 90 cm,
2. endlicher Strahlöffnung (wirksame Blendenöffnung bb 0,2—0,3 cm in 100 cm Abstand) bei 45—35 cm,
3. geometrischer Strahlverbreiterung (2 Zwischenblenden 3 mm, Spalt 0,3 mm, Kanallänge 7 cm) bei 45 cm.

B. Der Spiegeldrehversuch.

Gehen von einem Punkt des Kanalstrahlbündels zwei Lichtstrahlen verschiedener Farbe aus, so können sie in ihrer Gesamtheit keine deutliche Interferenz ergeben. Auch werden die Wellenflächen, welche von einem Kanalstrahlteilchen weggesendet werden, nicht an demselben Ort der Bildebene des Fernrohrs abgebildet. Zwei Strahlen verschiedener Farbe aber hat man in jedem Kanalstrahl infolge der stets auftretenden Dopplerkomponenten der leuchtenden Atome. Nun können aber nach der Undulationstheorie, wie Einstein zeigt, deutliche Interferenzen entstehen, wenn man durch eine kleine Neigung der Spiegel S_1 und S_2 gegeneinander erreicht, daß diese durch die Geschwindigkeit v der Kanalstrahlen hervorgerufene Unschärfe der Interferenzen durch Änderung der Gangdifferenz der interferierenden Strahlen wieder rückgängig gemacht wird. Der hierfür nötige Neigungswinkel β beider Spiegelbilder ist durch die Gleichung bestimmt

$$\beta = \frac{v}{c} \cdot \frac{2\,(a_1 - a_2)}{f},$$

wenn f die Brennweite der Linse L, die einen unendlich fernen Gegenstand auf dem einen Interferometerspiegel abbildet. Bei Ausführung des Versuches darf ein Spiegel gemäß dem Reflexionsgesetz nur um den halben Winkel $\frac{\beta}{2}$ gegenüber dem anderen gedreht werden. Dieser Neigungswinkel ergibt sich als Differenz, wenn man einmal mit einer ruhenden Lichtquelle, dann mit Kanalstrahlen auf deutlichste Interferenz einstellt.

Versuchsanordnung.

Benutzt wurde wieder dieselbe Röhre mit Hg-Kanalstrahlen, Linie 546 mμ, im Abklingleuchten. In Fig. 3 ist die Versuchsanordnung schematisch dargestellt.

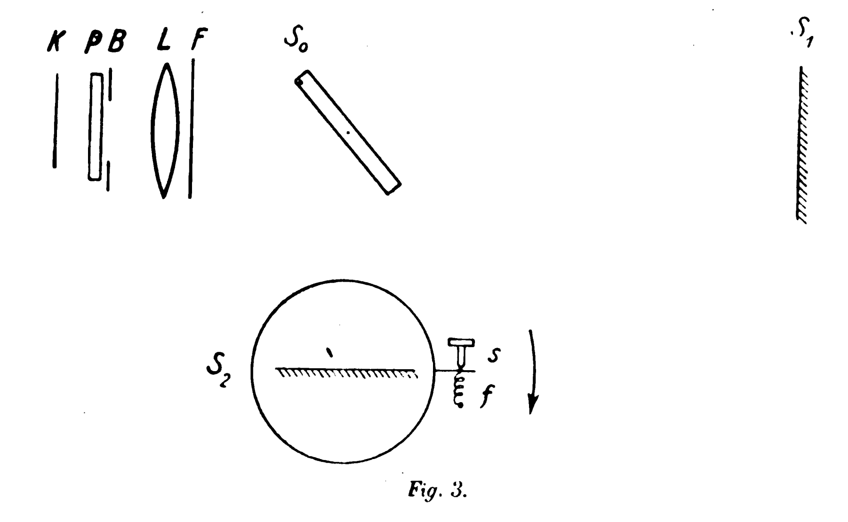


Fig. 3.

K = abklingender Kanalstrahl.
P = planparalleles Fenster der Röhre.
B = Blende 4 mm weit, unmittelbar am Kanalende.
L = Linse von $f = 14$ cm $\text{o} = 3$.
F = Grünfilter aus Glas.
Abstand $KL = 5$ cm. Abstand $L\,S_0\,S_2$ entspricht $f = 14$ cm.

Doppelter Abstand der Interferometerspiegel $S_1\,S_0\,S_2 = 2(a_1 - a_2) = 20$ cm. Statt der engen Schlitzblenden wurden jetzt Blenden von 1 cm Breite in den Strahlengang $S_0\,S_1$ und $S_0\,S_2$ geschoben.

Der Spiegel S_2 ist auf einem Drehtisch aufgestellt, der durch eine Schraube s um die Vertikalachse verschoben werden kann; Gangunterschied der Schraube $s = 0.3$ mm. f = Gegenfeder. Abstand der Spiegelmitte vom Angriffspunkt der Schraube $l = 7$ cm. Das Beobachtungsfernrohr ist auf Unendlich eingestellt.

Das Interferometer ist jetzt auf Interferenzen gleicher Neigung umgestellt, wobei besonders das Erreichen der genau senkrechten Stellung der Achse von S_2 viel Mühe machte. Geschlossene Interferenzkreise waren nicht zu erhalten, sondern Kreisbögen, meist von etwa 120°. Die Einstellung des Interferometers geschah mit Quecksilberlicht im Umladeleuchten.

Versuche.

a) Mit Hg-Glimmlicht werden die Interferenzstreifen auf größte Schärfe eingestellt. Diese Stellung der Schraube s sei mit 0° bezeichnet. Drehung in Richtung des Pfeils am Spiegel S_2 bedeute +. Die Interferenzen bleiben erhalten mit abnehmender Schärfe bei Drehung der Schraube von etwa −20° bis +20°.

b) Nun wird als Lichtquelle der Kanalstrahl, Hg 546 $m\mu$, im Abklingleuchten verwendet. Geschwindigkeit 1.9×1^7 cm/sec. Interferenzstreifen bei 0° äußerst undeutlich und schwach, die Streifen werden deutlicher von 15° an, sie werden hell und scharf zwischen 30° und 40°, dann aber nimmt die Deutlichkeit sehr schnell ab, bei 45° Drehung sind fast keine Streifen mehr festzustellen. Drehung in umgekehrter Richtung läßt die Streifen bei −10° verschwinden.

c) An der Kanalstrahlröhre wird die Kühlung weggenommen. Man erhält dann Kanalstrahlen im Umladeleuchten. Interferenzstreifen von −20° erst undeutlich, deutlich bei 0°, undeutlicher gegen 15°, dann wieder deutlicher zwischen 25° und 40°, aber weniger gut als im Versuch b. Starker Abfall der Streifenintensität bei 45°.

a'. Hg-Glimmlicht. Ergebnis wie oben unter a.

Diese Versuchsreihen wurden während drei Abenden 4—5 mal wiederholt mit gleichem reproduzierbarem Ergebnis.

d) Kehrt sich die Richtung von v um, so muß die kompensierende Spiegeldrehung in umgekehrter Richtung erfolgen. Dazu wurde die Röhre um 180° gedreht aufgebaut. Während vorher die Richtung des Kanalstrahls ↑



verlief, verläuft sie jetzt ↓. Es wurden die Versuche a und b ausgeführt mit demselben Ergebnis, nur war jetzt eine Spiegeldrehung in umgekehrter Richtung erforderlich. ↶ gegen vorher ↷.

Vergleich mit der Theorie.

$$\beta = \frac{1.9 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}} \frac{20}{14} = 9 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\beta}{2} = 4.5 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ganghöhe der Schraube s ist 0.3 mm, also beträgt die Winkeländerung bei einer ganzen Umdrehung $0.03/7 = 4.10^{-3}$. Die Interferenzstreifen mit Kanalstrahllicht im Abklingleuchten müssen also am schärfsten sein, bei etwa $1/10 = 36°$ Schraubenumdrehung. Theorie und Experiment stimmen also befriedigend überein. Infolge der Geschwindigkeitsverteilung des Strahls und aus apparativen Gründen werden die Stellen deutlicher Interferenz über einen größeren Winkelbogen verteilt sein.

Im Umladeleuchten, wo ruhende Intensität und bewegte Intensität vorhanden sind, treten 2 Maxima auf, bei 0° das der ruhenden und zwischen 30° und 40° das der bewegten leuchtenden Atome. Hierbei muß die ruhende Intensität gegenüber der bewegten aber jedenfalls noch zurücktreten.

Der Spiegeldrehversuch verläuft also ebenso wie der Gitterversuch ganz, wie es die Undulationstheorie voraussagt. Ein Einfluß quantenhafter Vorgänge bei der Lichtemission läßt sich in keinem Fall nachweisen. Gerade beim Spiegeldrehversuch ist wesentlich, daß interferenzfähiges Licht von einem Teilchen zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten emittiert wird, eine Auffassung, die nach der Quantenvorstellung schwer verständlich ist. Aus beiden Versuchen läßt sich eine Mindestabklingzeit berechnen, die für den Gitterversuch $\frac{d}{v} = \frac{0.02}{1.9 \cdot 10^7} = 10^{-9}$ sec und für den Spiegeldrehversuch $\frac{f\beta}{v} = \frac{14 \cdot 9 \cdot 10^{-4}}{1.9 \cdot 10^{-7}} = 6.5 \cdot 10^{-10}$ sec beträgt. Die Wienschen Messungen über die Leuchtdauer der Atome hängen eng mit den hier ausgeführten Versuchen zusammen. Wahrscheinlich sind diese Werte der Leuchtdauer mit den hier gefundenen Mindestzeiten identisch.

C. Zur größterreichten Interferenzweglänge von H_β.

In Teil I wurde für H_β im Abklingleuchten als größterreichte Interferenzweglänge 15.2 cm gefunden. Dieser hohe Gangunterschied erscheint erstaunlich in Anbetracht der Wärmebewegung und des Dopplereffekts der leuchtenden Atome, die stets Querkomponenten der Geschwindigkeit in bezug zu Strahlrichtung hervorrufen werden. Die Querkomponenten infolge Dopplereffekts sind vom Betrage $v/c \cdot \sin \alpha$, wenn α der Öffnungswinkel, unter dem der Strahl auf die Spiegel S_1 S_2 fällt. In der verwendeten Anordnung wird der Winkel α durch die Blenden $b\,b$ — 4—5 mm weite Schlitze — bestimmt. Da $f_2 = 40$ cm, wird $\alpha = 1/100$ parallel zum Strahlengang, während senkrecht dazu der ganze

Öffnungswinkel der Linse L_2 ausgenutzt wird. Zur Erklärung des hohen Gangunterschieds muß jedoch der effektive Öffnungswinkel α' noch etwa 10 mal kleiner sein. Wie sich dieser effektive Wert α' zusammensetzt, konnte damals bei der geringen Strahlintensität nicht festgestellt werden. Ich begnügte mich auf rein empirischem Weg, durch Verschieben der Blenden bb und Änderung der Spiegelstellung S_1 S_2 einen so hohen, stets reproduzierbaren Gangunterschied erreicht zu haben.

Jetzt ist es möglich geworden, die Frage nach diesem Gangunterschied zu lösen durch folgenden Versuch: Es wurden zunächst mit Hg-Glimmlicht Interferenzen vom Gangunterschied etwa 10 cm eingestellt in derselben Anordnung wie in Teil I, Fig. 1. Nur befand sich der Spiegel S_2 auf dem Drehtische der oben beschriebenen Anordnung. Dann wurden Wasserstoffkanalstrahlen im Abklingleuchten erzeugt, Geschwindigkeit etwa $5 \cdot 10^7$ cm/sec, die Linie H_β herausgefiltert und die Interferenzen gleicher Dicke gesucht. Es waren aber bei dieser Spiegelstellung keine Interferenzen feststellbar. Nun wurde die Schraube f, Fig. 3, in entgegengesetzter Richtung wie oben für Hg-Kanalstrahlen gedreht, dann erschienen bei einer bestimmten Schraubenstellung die Interferenzen für H_β in großer Deutlichkeit. Wurde bei dieser Spiegelstellung wieder Hg-Glimmlicht als Lichtquelle verwendet, so waren die Streifen von Hg 546 mμ äußerst undeutlich, sie wurden aber wieder scharf, wenn die Schraube f zurückgedreht wurde.

Es ist damit wohl nachgewiesen, daß der größterreichte Gangunterschied von $H_\beta = 15.2$ cm durch empirische Kompensation der Querkomponenten der Strahlgeschwindigkeit in derselben Weise erreicht wurde wie hier beim Spiegeldrehversuch, wobei noch zu bemerken ist, daß in der früheren Anordnung (Fig. 1) der Abstand $L_2 S_0 S_2$ etwa gleich der Brennweite von $L_2 = 40$ cm betrug, so daß die Voraussetzungen der Theorie dort annähernd erfüllt waren. (Siehe Teil I S. 7, wo als Abstand der Teilstrecke S_0 S_2 30 cm angegeben ist.) Daß die Schraube f jetzt in umgekehrter Richtung gedreht werden muß, entspricht der Richtungsumkehr der Strahlen infolge der beiden Linsen L_1 L_2.

Zusammenfassung.

Anschließend an eine theoretische Untersuchung Einsteins über die Interferenzeigenschaften des von Kanalstrahlen emittierten Lichtes werden zwei Interferenzversuche an Kanalstrahlen ausgeführt:

A. Das Licht des abklingenden Kanalstrahls von Hg 546 mμ wird durch ein Gitter unterteilt und die Intensität der Interferenzstreifen als Funktion des Gangunterschieds ermittelt (Gitterversuch). Dabei treten periodisch Maxima und Minima der Streifenintensität auf, die durch die Gitterkonstante und die Strahlgeschwindigkeit bestimmt sind.

B. Die Spiegelstellung optimaler Interferenz ist bei abklingendem Kanalstrahllicht als Lichtquelle und bei Einschaltung einer Linse zwischen letzterer und Interferenzapparat um einen durch die Bewegung der emittierenden Teilchen verursachten Drehwinkel verschoben (Spiegeldrehversuch). Dieser Winkel wird für eine bestimmte Kanalstrahlgeschwindigkeit ermittelt und in Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.



Die Ergebnisse beider Experimente sind Folgerungen der Undulationstheorie, sie sprechen also für eine endliche (Interferenz-) Leuchtzeit des Atoms. das der Anordnung der Versuche gemäß zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten die zur Interferenz gelangenden Wellen emittiert. Ein Einfluß der instantanen Quantenvorgänge der Emission auf die Interferenzerscheinungen macht sich bei den Versuchen nicht bemerkbar.

Die größterreichte Interferenzweglänge von H_β eines früheren Versuchs wird mit dem Ergebnis des Spiegeldrehversuchs in Verbindung gebracht.

Diese Arbeit wurde größtenteils noch im Radiologischen Institut in Heidelberg vor meiner Übersiedelung nach Göttingen ausgeführt. Ich benutze die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Geheimrat P. Lenard noch einmal auf das herzlichste für die Förderung und Unterstützung zu danken, die er mir stets hat zuteil werden lassen.

Göttingen, I. Physikalisches Institut, August 1926.

Ausgegeben am 15. November.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXVI. Gesamtsitzung. 28. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Ludendorff sprach über »Die deutsche astronomische Expedition nach Bolivia«.

Die astronomische Expedition nach La Paz (16½° südliche Breite, 3600 m Meereshöhe), die auf dem Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam vorbereitet worden ist, und die ihre Arbeiten vor kurzem begonnen hat, steht unter Leitung von Prof. A. Kohlschütter, Direktor der Sternwarte in Bonn; als Assistent fungiert Dr. Fr. Becker. Das Hauptinstrument der Expedition ist eine photographische Kamera mit Zeiß-Triplet-Objektiv von 30 cm Öffnung und 150 cm Brennweite. Diese Kamera ist von der Firma Zeiß leihweise zur Verfügung gestellt worden, während die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft die Kosten der von der genannten Firma hergestellten parallaktischen Montierung getragen hat. Die Hauptaufgabe der Expedition ist die Aufnahme der Spektren der Sterne in den südlichen »Selected Areas« von Kapteyn. Es kommen bei diesen Aufnahmen Objektivprismen zur Verwendung, die dem Objektiv der Kamera vorgeschaltet werden. Die Klassifizierung der auf den Platten erhaltenen Spektren wird auf der Sternwarte in Bonn und auf dem Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam geschehen.

Redner hat die Expedition, die von den bolivianischen Behörden auf das freundlichste aufgenommen und unterstützt worden ist, anfänglich begleitet. Er schildert im Anschluß an seine Ausführungen über die Expedition namentlich den prähistorischen sogenannten Sonnentempel Kalasasaya in Tiuhanacu, der ohne Zweifel zu Beobachtungen der Sonne zwecks Festlegung des Kalenders gedient hat.

2. Hr. von Wilamowitz überreichte den 2. Band seiner »Reden und Vorträge« (Berlin 1926).

3. Vorgelegt wurde das Buch des korrespondierenden Mitglieds Hrn. Bidez in Gent »L'empereur Julien Œuvres Complètes« Tom. 1, Part 2 (Paris 1924), sowie das Werk des inzwischen verstorbenen korrespondierenden Mitglieds Hrn. Latyschev in St. Petersburg »Inscriptiones Antiquae Orae Septentrionalis Pontis Euxini Graecae et Latinae« (St. Petersburg 1926).

4. Ferner wurde vorgelegt das 1. Heft der im Auftrage der Preußischen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen »Forschungen zum Deutschtum der Ostmarken«: »Die Besiedelung der Mittelmark von der slawischen Einwanderung bis 1624« von Dr. Werner Gley (Stuttgart 1926) und der 1. Band der mit Unterstützung der Akademie erschienenen Sammlung »Barthold Georg Niebuhrs Briefe«, herausgegeben von Dietrich Gerhard und William Norvin (Berlin 1926).



5. Endlich wurde vorgelegt die 47. und 49. wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft: »Die Innenstadt von Babylon« von Oskar Reuther, 2 Bände (Leipzig 1926), und »Das vorgeschichtliche Gräberfeld von Abusir-El-Meleq« nach den Aufzeichnungen Georg Möllers bearbeitet von Alexander Scharff (Leipzig 1926), sowie der 1. Band des Werkes »Septuaginta«, im Auftrage der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Alfred Rahlfs (Stuttgart 1926).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Karl Robert Wenck in Marburg feierte am 2. August und das korrespondierende Mitglied Hr. Karl von Müller in Tübingen am 8. August das fünfzigjährige Doktorjubiläum. Die Akademie hat den Jubilaren Adressen gewidmet, die in diesem Stück abgedruckt sind.

Die Preußische Regierung hat am 28. Juli 1926 die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität und Direktors des Meteorologischen Instituts zu Berlin, Hrn. Dr. Heinrich von Ficker, zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat am 17. September 1926 ihr ordentliches Mitglied und beständigen Sekretar Hrn. Gustav Roethe durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Prof. Dr. Karl Robert Wenck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 2. August 1926.

Hochverehrter Herr Kollege!

Zum heutigen Tage spricht Ihnen die unterzeichnete Preußische Akademie der Wissenschaften die herzlichsten Glück- und Segenswünsche als ihrem Mitgliede aus. Heute vor 50 Jahren haben Sie den Grad eines philosophischen Doktors erhalten, und ein halbes Jahrhundert hindurch haben Sie seither, Ihrem Doktoreide getreu, für die Wissenschaft gearbeitet. Auf die großen Erfolge dieser Ihrer Arbeit können Sie am heutigen Tage mit Stolz zurückblicken. Ausgehend von der Geschichte Ihrer Wettinischen Landesfürsten, haben Sie, zeitlich immer weiter zurückschreitend, die Thüringische Geschichte und insbesondere die Geschichte des Ludowinger-Hauses in den Kreis Ihrer Tätigkeit gezogen. Ihr Buch über die Entstehung der Reinhardsbrunner Geschichtsbücher und Ihr schöner Aufsatz über die Reinhardsbrunner Geschichtsfälscher und Fabulisten haben im Verein mit Ihrer Arbeit über die Reinhardsbrunner Historien und die Erfurter Peters-Chronik und mit Ihrer Veröffentlichung des Liber Cronicorum Erfurdensium zum guten Teil die Grundlage für Holder-Eggers Ausgabe der Reinhardsbrunner Chronik gebildet. Indem Sie von der Quellenkritik zur Schilderung jener Zeiten übergingen, haben Sie insbesondere die Geschichte der Heiligen Elisabeth mehrfach untersucht und im großen Wartburg-Werk eine künstlerisch abgerundete Schilderung des Lebensganges der Heiligen gegeben. In dem gleichen Wartburg-Werk brachten Sie uns die älteste Geschichte der Wartburg und deren spätere Schicksale als fürstlicher Residenz nahe. An alles dies schloß sich Ihre Beschäftigung mit Philipp dem Großmütigen und mit den späteren Hessischen Fürsten, wie Sie denn unermüdlich durch Aufsätze und Besprechungen die mittelalterlich-hessische Landesgeschichte in einer mustergültigen Weise, stets den Zusammenhang mit der allgemeinen deutschen Geschichte wahrend, durch jahrelange entsagungsvolle Arbeit gefördert haben.

Im engen Zusammenhange aber mit Ihren Arbeiten über die Heilige Elisabeth stehen diejenigen Forschungen, in denen Ihre Bedeutung am stärksten hervortritt, nämlich die Arbeiten zum kirchlich-religiösen und überhaupt geistigen Leben des Hoch- und Spätmittelalters. Hierher gehört schon Ihre Habilitationsschrift über Clemens V. und Heinrich VII., dann Ihre Arbeiten über Bonifacius VIII., über Dante, über Conrad von Gelnhausen und vor allem Ihre meisterhafte Studie über Philipp den Schönen und seine Persönlich-



keit im Urteil der Zeitgenossen, in der Sie mit feiner psychologischer Kunst den König aus der Geistesgeschichte seiner Zeit erklärten. In allen diesen Arbeiten wie besonders auch in Ihrer Studie über den Heiligen Franziscus und noch jüngst in Ihrer tief eindringenden Arbeit über die Römischen Päpste zwischen Alexander III. und Innocenz III. haben Sie als echter Historiker gezeigt, daß Sie trotz tiefster Erforschung auch der kleinsten Einzelheiten des komplizierten Stoffes doch den großen Zusammenhang niemals aus dem Auge verlieren und mit feinstem Empfinden die religiösen und geistigen Strömungen zu würdigen wissen. Wenn dabei der Schwerpunkt Ihrer Arbeit in der rastlosen Heranziehung und unerbittlichen Kritik aller irgend erreichbaren Quellen und schriftstellerischen Leistungen für den Aufbau und für die Bildung Ihrer Meinung von den Geschehnissen liegt, so können Sie gegenüber der heutigen Neigung, obenhin über die größten Dinge zu urteilen, geradezu als ein Vorbild dafür dienen, wie der hohe Geistesschwung durch die exakte Arbeit an den Einzelheiten nicht gelähmt zu werden braucht.

Wir wünschen Ihnen und der deutschen Wissenschaft, daß Sie noch recht lange in alter Frische an der Arbeit bleiben mögen, als ein Mann. der auch durch seine tiefe vaterländische Empfindung der Jugend ein Vorbild zu sein vermag.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Karl von Müller zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 8. August 1926.

Hochverehrter Herr Kollege!

Am festlichen Tage, der ein halbes Jahrhundert Ihrer wissenschaftlichen Arbeit beschließt, bringt Ihnen die Preußische Akademie der Wissenschaften als Ihrem Mitgliede herzliche Glückwünsche dar und blickt mit Ihnen zurück auf Ihr erfolgreiches Schaffen. — Nachdem Sie in Tübingen und Göttingen den Grund zu Ihren Studien unter der Leitung Karl Weizsäckers, Albrecht Ritschls und Julius Weizsäckers gelegt und von dem letzteren die strenge methodische Schulung empfangen hatten, haben Sie Sich nicht lange nach Ihrer Doktorpromotion in die Wissenschaft durch die umfangreiche Untersuchung und Darstellung eingeführt: »Der Kampf Ludwigs des Bayern mit der Kurie«. Dies Werk, das eine bedeutende Epoche deutscher und universaler Geschichte aufgehellt hat, sicherte Ihre akademische Laufbahn, die Sie von Berlin über Halle, Gießen und Breslau auf den Lehrstuhl Ferdinand Christian Baurs nach Tübingen geführt hat. Zahlreiche Monographien sind der ersten gefolgt, in denen Sie mit Vorliebe die Anfänge geschichtlicher Erscheinungen — des Minoritenordens, der Waldesier, der kirchlichen Verfassung usw. — untersucht haben, immer darauf bedacht, von der Tradition zum festen Kern der Dinge vorzudringen und den Wurzelstock verzweigter Entwicklungen und blühender Legenden aufzudecken. Aber alles, was Sie in diesen maßgebenden Einzeluntersuchungen geleistet haben, tritt hinter Ihrem »Grundriß der Kirchengeschichte« zurück, der allmählich zu dem führenden Lehrbuch dieser Disziplin geworden ist. Wenige Wissenschaften können sich rühmen, daß sie ein Lehrbuch besitzen, das in allen Abschnitten ganz überwiegend selbständige Forschung enthält und deshalb zu den großen Originalarbeiten gerechnet wird. Ihr Lehrbuch, wie es heute vor uns liegt, hat diese Eigenschaft, und da es, wie die Monographien, von einem unbestechlichen Tatsachensinn getragen und von der ungemeinen Fähigkeit bestimmt ist, überall die Rechtsverhältnisse und Institutionen, sei es als Ausgangspunkt, sei es als Niederschläge der geschichtlichen Entwicklungen zu erfassen, so bringen Ihnen am heutigen Tage



mit den Kirchenhistorikern auch die Kirchenrechtshistoriker ihre besonderen Glückwünsche dar. Die Preußische Akademie aber, der von ihrem Ursprung her die innige Verbindung aller Wissenschaften als Aufgabe gesetzt ist, schließt sich an Ihrem Ehrentage dem Kreise Ihrer engeren und weiteren Fachgenossen an, indem sie Ihnen mit dem Dank für das, was Sie geleistet, die besten Wünsche zur Fortsetzung der Arbeiten darbringt, mit denen Sie die Wissenschaft noch immer bereichern.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 15. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

XXVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 4. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. PLANCK.

*1. Hr. SCHOTTKY sprach über die **Differentialgleichungen, denen eine Gruppe von sechs Sigma-Quotienten genügt.**

Es wird die Frage beantwortet: Welches ist das allgemeine Integral der zwölf partiellen Differentialgleichungen, von denen eine

$$\phi_{13}\phi_{23} = -\frac{\partial\phi_{12}}{\partial\omega} - a_3\frac{\partial\phi_{12}}{\partial w},$$

ist, während die elf übrigen aus dieser entstehen, indem man in ihr die Zahlen 1, 2, 3 untereinander und mit 4 vertauscht.

2. Hr. SCHUR legte eine Arbeit von Hrn. Dr. R. BRAUER in Königsberg vor: **Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen.** (Ersch. später.)

Besitzt eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen, deren Charakter in einem Zahlkörper K enthalten ist, genau a linear unabhängige Invarianten n-ten Grades, so ist, wie der Verfasser zeigt, der Index der Gruppe in bezug auf K nur durch Primzahlen teilbar, die in an aufgehen. Hieraus folgt als Spezialfall ein bekannter Satz von A. SPEISER.

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. E. STUDY in Bonn übersandte eine Abhandlung: **Vereinfachte Begründung von S. LIES Kugelgeometrie. I.,** nebst einem **Zusatz** von E. A. WEISS in Bonn.

Die Arbeit enthält den Nachweis, daß sämtliche Tatsachen, die der von demselben Verfasser schon früher berichtigten Kugelgeometrie S. LIES zugrunde liegen, aus der Theorie der orthogonalen Transformationen von drei und vier Veränderlichen abgelesen werden können.

Aus der sogenannten Geraden-Kugeltransformation ergeben sich, bei Benutzung der STUDYschen Formeln, besonders durchsichtige Parameterdarstellungen der KUMMERschen Fläche und der allgemeinen Zyklide durch hyperelliptische Thetafunktionen, die den Zusammenhang beider Figuren zum Ausdruck bringen.



Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie. I.

Von E. Study
in Bonn.

Der vorliegende Aufsatz (dem ein zweiter folgen soll) bezieht sich auf die Elemente der (von einigen so genannten »höheren«) Kugelgeometrie. Die algebraischen Tatsachen, die die Wurzel ihres Stammes bilden, sollen von einer neuen Seite her beleuchtet werden. Das Vorzutragende hat sich leicht so einrichten lassen, daß es auch zur Einleitung in diesen Gedankenkreis dienen kann. Wer mit der projektiven Geometrie vertraut ist, wird schon genügend vorbereitet sein, und wenn er den Quaternionen nicht ganz fremd gegenübersteht, wird er nur geringe Mühe haben. Nur der Kern der Sache soll abgehandelt werden, und auf so einfache Art wie nur möglich.

Eine vorausgehende Untersuchung[1] hatte mit der Geometrie der Kreise eingesetzt, die darin den meisten Raum einnahm. Diesmal werden im wesentlichen nur die Kugeln betrachtet[2].

Nach wie vor habe ich alles Metrische zunächst aus dem Spiel gelassen, ähnlich wie bei dem üblichen Aufbau der projektiven Geometrie. Diese Möglichkeit besteht nicht nur, sie ist auch Forderung einer gesunden Methodik. Die Urheber älterer Entwürfe, S. Lie und F. Klein, hatten ihre Begriffe »elementar«, nämlich mit Hilfe von Kugelradien und Winkeln, einzuführen gesucht. Ihre Definitionen waren aber sehr lückenhaft, ergänzt würden sie ihre anscheinende Einfachheit verloren und zu einer ziemlich abstrusen Theorie geführt haben.

Von der vorliegenden Untersuchung bleiben Maßbegriffe und andere Einzelheiten, darunter auch die Besonderheiten reeller Figuren, ganz ausgeschlossen[3].

In den Mittelpunkt der Betrachtung treten hier die orthogonalen Transformationen von drei und vier Veränderlichen oder vielmehr ihre Koeffizientensysteme, zusammen mit den bisher kaum beachteten Ausartungen solcher Systeme. Ihr Zusammenhang mit der Kugelgeometrie ist allerdings formaler Natur. Erst bei besonderer Wahl der Koordinaten kommt er zum Vorschein. Die Gruppeneigenschaft der orthogonalen Transformationen spielt dabei nicht mit. Indessen werden durch Ausnutzung solcher Beziehungen die Übersicht und die Handhabung des Formelapparats sehr erleichtert. So ziemlich alles, was zunächst gebraucht wird, liegt in der Theorie der einfachsten orthogonalen Transformationen längst fertig vor. Ganze Systeme von Aussagen lassen sich daher in wenige Worte fassen. Zugleich liefert die bekannte Parameterdarstellung der genannten Transformationen (die man am bequemsten von den Quaternionen aus erhält) ohne weiteres auch den Zusam-

[1] Math. Annalen, Bände 89—91, 1922—1924.

[2] Der großgedruckte Text enthält den eigentlichen Fortschritt des Gedankens und bildet für sich allein ein zusammenhängendes Ganzes.

[3] Siehe darüber § 16 und § 17 der erwähnten Abhandlung. (Math. Annalen, Bd. 91. 1924), insbesondere Lehrsätze XXXIIIa, XXXV, XXXVI.

menhang der projektiven Geometrie eines Raumes R_3 mit der Kugelgeometrie. Die Punkt, Gerade, Ebene und Facette (Element) genannten Grundbegriffe werden, lückenlos, zum »Kugelraum« M_3^2 gehörigen Begriffen als deren »Bilder« zugeordnet, nämlich — nach meiner weiterhin (wiederholt) zu erklärenden Terminologie — den Begriffen X-Gerade, orientierte Kügel, Y-Gerade und Blatt.

Noch einfacher liegt die Sache in der Geometrie der Kreise. An Stelle der M_3^2 tritt eine M_2^2, z. B. eine Kugel. Grundbegriffe sind hier »das orientierte Element« und »der orientierte Kreis«. Zu den orientierten Elementen gehören die Erzeugenden der Kugel, die also nicht »Vereine« sind, zu den orientierten Kreisen die Punkte (auch im komplexen Gebiet). Die orientierten Kreise haben zu Bildern die Geraden in einem linearen Komplex, die orientierten Elemente haben die Büschel solcher Geraden zu Bildern.

Es ist mir als sehr lohnend erschienen, die Grundgedanken der von S. Lie skizzierten Kugelgeometrie reinlich zum Ausdruck zu bringen. Es hat doch wohl ein erhebliches Interesse, daß schon in der Geometrie auf einer quadratischen Punktmannigfaltigkeit M_3^2 ein vollständiges und zugleich einfaches Duplikat der gewöhnlichen projektiven Geometrie vorhanden ist.

Die moderne Geometrie, besonders die höherer Räume, kennt viele dieser sogenannten Übertragungsprinzipe, von denen erst sehr wenige genügend untersucht sind. Auch dieses hier ist Glied einer Folge, die sich ins Unendliche erstreckt. In gleicher Einfachheit kehrt es jedoch bei mehr als drei (reellen oder komplexen) Dimensionen nicht wieder. Und weil es Licht auf Gegenstände wirft, die zu den bekanntesten der heutigen Geometrie gehören, darf es als eines der lehrreichsten Beispiele gelten.

In den erwähnten Arbeiten, deren Inhalt auch noch neueren Autoren als Ausgangspunkt gedient hat, werden die Punktkontinua R_3 und M_3^2 und dazu noch das offene Kontinuum der Elementargeometrie vielfach zusammengeworfen. Die aufgezählten Seitenstücke zu Begriffen der projektiven Geometrie fehlen, oder sie werden durch Begriffe vertreten, die nur sehr ungenau zu den Aussagen darüber passen. Entsprechend ist der algebraische Apparat ausgefallen, in dem nur dieses oder jenes nach Willkür herausgegriffene Bruchstück des Kontinuums R_3 oder M_3^2 erscheint.

Bei aller Anerkennung für den Wert des von S. Lie herrührenden Entwurfs habe ich mich doch genötigt gesehen, dessen Ausführung durch ihn selbst und andere einer sehr abfälligen Kritik zu unterziehen[1]. Gegenüber einer Bearbeitung von Vorlesungen Kleins durch W. Blaschke (1926) muß ich das damals Gesagte nunmehr noch unterstreichen. Denn dieser Mathematiker — einer meiner eigenen ehemaligen Schüler! — hat die Kennzeichnung des Verfehlten samt dessen Berichtigung vor Augen gehabt.

Wie in diesem für Studierende bestimmten (!) Lehrbuch mit den Begriffen Reell und Imaginär, mit »dem Raum« und mit Koordinatentransformationen umgesprungen wird, spottet jeder Beschreibung. Ja ich glaube, man kann mit Hilfe einer solchen Methodik sogar Geister erscheinen lassen. So ist die Schnittfigur zweier Kugeln in § 29 ein (mehr oder minder) reeller Kreis, in § 39 besteht sie aus einem Kreis und einem imaginären Gespenst, das aber gewiß auch reell und »nullteilig« werden, sozusagen materialisiert werden kann (vgl. S. 50). Von Vorsicht im Ausdruck, besonders im Gebrauch von Worten wie immer, alle, jeder, irgendeiner, ist keine Rede. Mathematik im Négligé. Und weil der Mensch zwar nicht immer sagt, was er denkt, oft aber denkt, was er sagt, konnte aus einem schlecht (nämlich gar nicht) definierten Bruchstück eine vermeintliche »Geometrie im Gesamtraum« werden. (S. 4.) Was uns als solche nun zum dritten Male angeboten wird, ist dermaßen mißlungen, daß selbst eine solche Hauptsache wie die Gleichberechtigung von Punkten und Ebenen gegenüber den Geraden-Kugeltransformationen nicht zum Vorschein kommt[2]. Alles trägt, nach wie vor, das Gepräge eiligster Abfassung.

Nur an einer einzigen Stelle (S. 249) sieht es beinahe so aus, als sei der Herausgeber einer Anwandlung von übertriebener Gewissenhaftigkeit erlegen. Dort wird nämlich »nebenbei« (!) der Versuch gemacht, wenigstens einer von vielen zu allgemein gehaltenen Behauptungen nach-

[1] Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 25, 1916. (Von Blaschke mit gutem Grunde nicht zitiert.)

[2] Siehe die Lehrsätze XXIII, XXVII, XXXI in der zuvor (und auch von Blaschke) zitierten Abhandlung.



träglich (!) eine genaue Fassung zu geben. Allerdings ist auch das wieder bös verunglückt (!). Aber der Leser erfährt ja, wo er sich unterrichten kann — falls er nämlich, ungleich dem Herausgeber dieser Vorlesungen, einen unwiderstehlichen Drang zur Vertiefung in die Grundfragen der Kugelgeometrie verspüren sollte . . .

Diese Art von Mathematik, eine Mathematik der Halbwahrheiten, Begriffsschiebungen und Zauberworte, ist wirklich verdrießlich. 1. meint der Approximationsmathematiker nicht das, was er sagt, sondern irgend etwas anderes. 2. kommt, nach ihm, auf den Unterschied zwischen diesem Gesagten und jenem Gemeinten sehr wenig an. 3. hat er alles das gesagt, worauf es wirklich ankommt. Punkt. Hony soit qui mal y pense!

Verständigen kann man sich natürlich mit Mathematikern nicht, die jeder ernsthaften Kritik auszuweichen suchen oder, noch einfacher, sie an sich abgleiten lassen, überhaupt die Spielregeln unserer Wissenschaft tatsächlich nicht anerkennen.

Der gewöhnliche, vereinzelt auftretende Fehler ist etwas sehr Harmloses im Vergleich zu dieser anspruchsvollen, ja manchmal geradezu gewalttätigen Art von Schriftstellerei, die ohne Übertreibung als eine Systematisierung des Irrtums bezeichnet werden kann.

Diese Vorlesungen werden wohl auch in Zukunft meistens ziemlich unkritische Leser finden. Eben darum, aber auch um Lesern, wie ich sie mir wünsche, das Nachschlagen zu ersparen, habe ich weiterhin nochmals einige der angeblichen Tatsachen analysiert, auf denen die Kugelgeometrie angeblich beruht.

1.

Die Mannigfaltigkeit M_4^2.

Wir betrachten eine nicht-singuläre quadratische Mannigfaltigkeit M_4^2 in einem Gebiet sechster Stufe, d. i. in einem projektiven Kontinuum R_5 von fünf komplexen Dimensionen, und stellen sie dar durch eine Gleichung der besonderen Form

$$\mathfrak{z}_0^2 - \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 - \mathfrak{z}_3^2 + \mathfrak{z}_4^2 - \mathfrak{z}_5^2 = 0. \tag{1}$$

Verstehen wir dann unter $A_{00}, A_{11} \ldots A_{33}$ und $B_{00}, B_{11} \ldots B_{33}$ die Koeffizientensysteme zweier ternärer eigentlicher homogener orthogonaler Transformationen, so wird jedes der beiden Gleichungssysteme

$$(2, \text{l.}) \qquad \begin{aligned} A_{00}\mathfrak{x}_1 &= A_{11}\mathfrak{x}_0 + A_{12}\mathfrak{x}_2 + A_{13}\mathfrak{x}_4\,, \\ A_{00}\mathfrak{x}_3 &= A_{21}\mathfrak{x}_0 + A_{22}\mathfrak{x}_2 + A_{23}\mathfrak{x}_4\,, \\ A_{00}\mathfrak{x}_5 &= A_{31}\mathfrak{x}_0 + A_{32}\mathfrak{x}_2 + A_{33}\mathfrak{x}_4\,; \end{aligned}$$

$$(2, \text{r.}) \qquad \begin{aligned} -B_{00}\mathfrak{y}_1 &= B_{11}\mathfrak{y}_0 + B_{12}\mathfrak{y}_2 + B_{13}\mathfrak{y}_4\,, \\ -B_{00}\mathfrak{y}_3 &= B_{21}\mathfrak{y}_0 + B_{22}\mathfrak{y}_2 + B_{23}\mathfrak{y}_4\,, \\ -B_{00}\mathfrak{y}_5 &= B_{31}\mathfrak{y}_0 + B_{32}\mathfrak{y}_2 + B_{33}\mathfrak{y}_4 \end{aligned}$$

eine der $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ auf M_4^2 gelegenen Ebenen liefern, und zwar erhalten wir im ersten Falle — wie wir sagen wollen — eine linkseitige Ebene $E_{\mathfrak{x}}$ und im zweiten eine rechtseitige Ebene $E_{\mathfrak{y}}$. Die Grassmannschen Koordinaten dieser Ebenen, deren Herstellung für alles Folgende wesentlich ist, lassen sich nun ohne weiteres berechnen. Sie sind im ersten Falle paarweise einander gleich und im zweiten paarweise entgegengesetzt-gleich[1], und zwar erhalten wir als Koordinaten von $E_{\mathfrak{x}}$ die Verhältnisgrößen[2]

---

[1] Dieser Satz erstreckt sich offenbar auf eine unbestimmte gerade Zahl von Veränderlichen, wovon gelegentlich noch Anwendungen zu machen sein werden.

[2] Wegen des Bildungsgesetzes dieser Formeln siehe Abhandlungen über die Kummersche Konfiguration und über das Pascalsche Sechseck, Leipziger Berichte, 1892 und 1895.

$$
(3,\text{l.})\quad
\begin{array}{|ccc|}
\hline
& \mathfrak{X}_{024} = A_{\infty} = \mathfrak{X}_{135}\,, & \\
\mathfrak{X}_{124} = A_{11} = \mathfrak{X}_{035}\,, & \mathfrak{X}_{014} = A_{12} = \mathfrak{X}_{235}\,, & \mathfrak{X}_{021} = A_{13} = \mathfrak{X}_{435}\,, \\
\mathfrak{X}_{324} = A_{21} = \mathfrak{X}_{105}\,, & \mathfrak{X}_{034} = A_{22} = \mathfrak{X}_{125}\,, & \mathfrak{X}_{023} = A_{23} = \mathfrak{X}_{145}\,, \\
\mathfrak{X}_{524} = A_{31} = \mathfrak{X}_{130}\,, & \mathfrak{X}_{054} = A_{32} = \mathfrak{X}_{132}\,, & \mathfrak{X}_{025} = A_{33} = \mathfrak{X}_{134}\,. \\
\hline
\end{array}
$$

Ebenso findet sich, wenn der besseren Übersicht halber vorübergehend $\overline{\mathfrak{Y}}_{ikl}$ an Stelle von $-\mathfrak{Y}_{ikl}$ gesetzt wird, das System der Koordinaten von E_{ϕ}:

$$
(3,\text{r.})\quad
\begin{array}{|ccc|}
\hline
& \mathfrak{Y}_{024} = B_{\infty} = \overline{\mathfrak{Y}}_{135}\,, & \\
\overline{\mathfrak{Y}}_{124} = B_{11} = \mathfrak{Y}_{035}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{014} = B_{12} = \mathfrak{Y}_{235}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{021} = B_{13} = \mathfrak{Y}_{435}\,, \\
\overline{\mathfrak{Y}}_{324} = B_{21} = \mathfrak{Y}_{105}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{034} = B_{22} = \mathfrak{Y}_{125}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{023} = B_{23} = \mathfrak{Y}_{145}\,, \\
\overline{\mathfrak{Y}}_{524} = B_{31} = \mathfrak{Y}_{130}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{054} = B_{32} = \mathfrak{Y}_{132}\,, & \overline{\mathfrak{Y}}_{025} = B_{33} = \mathfrak{Y}_{134}\,. \\
\hline
\end{array}
$$

Reduzieren wir also die zwanzig Grassmannschen Koordinaten einer Ebene E_{ξ} oder E_{ϕ} auf die halbe Zahl, indem wir entweder nur die in (3) links stehenden oder nur die rechts stehenden Zeichen benutzen, so haben wir den Satz, daß im Falle der linkseitigen (rechtseitigen) Ebenen E_{ξ} (E_{ϕ}) diese Koordinaten der Reihe nach den Koeffizienten einer eigentlichen (uneigentlichen) homogenen ternären orthogonalen Transformation gleich sind[1].

Vorausgesetzt ist hier das Nichtverschwinden der Größen A_{∞}, B_{∞}, was zur Folge hat, daß die Gleichungssysteme (2) je ein nicht-abgeschlossenes Kontinuum von Ebenen E_{ξ} und E_{ϕ} auf M_4^2 definieren, daß sie also die Gesamtheit dieser Ebenen nicht erschöpfen. Die aus (2) abgeleiteten Gleichungen (3) aber sind an diese Einschränkung nicht gebunden. Es besteht vielmehr der Satz:

Zwischen den Grassmannschen Koordinaten einer linkseitigen (rechtseitigen) Ebene auf der quadratischen Mannigfaltigkeit M_4^2 bestehen dieselben Gleichungen (zwanzig linear-unabhängige quadratische Gleichungen) wie zwischen den Koeffizienten einer homogenen ternären eigentlichen (uneigentlichen) orthogonalen Transformation und keinerlei weitere Abhängigkeiten.

Zugleich mit dem Beweis hierfür geben wir unserer Behauptung einen reicheren Inhalt. Wir können ja, mit Hilfe der bekannten Formeln Eulers, die Größen A_{∞}, A_{ik} und B_{∞}, B_{ik}, im wesentlichen nur auf eine Weise, durch zwei Systeme homogener Parameter

$$(4)\qquad \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3\,, \quad \phi_0 : \phi_1 : \phi_2 : \phi_3$$

ausdrücken:

---

[1] Auch dieses und noch einiges andere läßt sich, mutatis mutandis, auf eine unbestimmte gerade Zahl von Veränderlichen, d. i. auf die Theorie einer nicht-singulären M_{2m}^2 ausdehnen. Weiteres Math. Annalen, Bd. 91, 1924, S. 102 (Anmerkung). Übrigens ist es natürlich gleichgültig, welche Schar von Ebenen auf M_4^2 man den eigentlichen orthogonalen Transformationen entsprechen lassen will.

$$
(5,\text{l.})\qquad
\begin{aligned}
A_{00} &= \xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\,,\\
A_{11} &= \xi_0^2+\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2\,,\\
&\cdots\cdots\\
A_{23} = 2\,(\xi_2\xi_3+\xi_0\xi_1)\,,&\quad A_{32} = 2\,(\xi_2\xi_3-\xi_0\xi_1)\,,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
(5,\text{r.})\qquad
\begin{aligned}
B_{00} &= \phi_0^2+\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2\,,\\
B_{11} &= \phi_0^2+\phi_1^2-\phi_2^2-\phi_3^2\,,\\
&\cdots\cdots\\
B_{23} = 2\,(\phi_2\phi_3+\phi_0\phi_1)\,,&\quad B_{32} = 2\,(\phi_2\phi_3-\phi_0\phi_1)\,,\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun die Parameter ξ_i, ϕ_k als homogene Koordinaten eines Punktes und einer Ebene in einem projektiven Kontinuum R_3, das weiterhin Bildraum genannt werden soll. Wir berechnen sodann zu zwei Punkten ξ, ξ' und zwei Ebenen ϕ, ϕ' die (sogenanten Plückerschen) Koordinaten ihrer Verbindungs- und Schnittgeraden, z. B.

$$
\begin{aligned}
\Xi_{01} &= \xi_0\xi_1'-\xi_1\xi_0' = \Phi_{23}\,, \quad & \Xi_{23} &= \xi_2\xi_3'-\xi_3\xi_2' = \Phi_{01}\,,\\
\mathrm{H}_{01} &= \phi_2\phi_3'-\phi_3\phi_2' = \Psi_{23}\,, \quad & \mathrm{H}_{23} &= \phi_0\phi_1'-\phi_1\phi_0' = \Psi_{01}\,.
\end{aligned}
$$

Wir bringen sodann die zwischen solchen Linienkoordinaten bestehende (Plückersche) Gleichung:

$$Z_{01}Z_{23}+Z_{02}Z_{31}+Z_{03}Z_{12} = 0$$

durch die Substitutionen

$$
(6)\qquad
\boxed{
\begin{aligned}
\mathfrak{z}_0 &= Z_{01}+Z_{23}\,, & \mathfrak{z}_2 &= Z_{02}+Z_{31}\,, & \mathfrak{z}_4 &= Z_{03}+Z_{12}\\
\mathfrak{z}_1 &= Z_{01}-Z_{23}\,, & \mathfrak{z}_3 &= Z_{02}-Z_{31}\,, & \mathfrak{z}_5 &= Z_{03}-Z_{12}
\end{aligned}
}
$$

in die Form (1). Dem Geradenbündel durch einen Punkt ξ wird dann immer eine Ebene E_ξ auf M_4^2 entsprechen, und ebenso dem Geradenfeld in einer Ebene ϕ eine Ebene E_ϕ. Um die Grassmannschen Koordinaten etwa der Ebene E_ξ zu finden, braucht man nur den Punkt ξ mit drei Ecken des benutzten Koordinatentetraeders durch Geraden zu verbinden, und, nach Anweisung der Formeln (6), die entsprechenden Punkte $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$, $\mathfrak{z}'''$ der Mannigfaltigkeit M_4^2 aufzusuchen. Waren die benutzten Ecken etwa $(0:1:0:0)$, $(0:0:1:0)$, $(0:0:0:1)$, so erhält man als Koordinaten der Verbindungsebene E_ξ von $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$, $\mathfrak{z}'''$ eben die Ausdrücke (5, l.) mit dem Faktor ξ_0. Dieselben Ausdrücke, mit Faktoren ξ_1 oder ξ_2 oder ξ_3, ergeben sich, wenn man eines der anderen Eckentripel des Koordinatentetraeders benutzt. Da aber die Größen ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 als homogene Koordinaten nicht alle zugleich den Wert Null haben dürfen, so ist die Allgemeingültigkeit der Formeln (3, l.) erwiesen, und ebenso ergibt sich die der Formeln (3, r.).

Nunmehr ist klar, daß einem Punkt ξ und einer Ebene ϕ, die nicht vereinigt liegen, auf M_4^2 Ebenen E_ξ und E_ϕ entsprechen werden, die keinen

Punkt gemein haben, und daß bei vereinigter Lage von ξ und ϕ die Ebenen E_ξ und E_ϕ einander in einer Geraden schneiden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für diese »vereinigte Lage« von E_ϕ und E_ξ ist also das Bestehen der Gleichung

$$(\xi\phi) = \xi_0\phi_0 + \xi_1\phi_1 + \xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3 = 0\,. \tag{7}$$

Ebenso leuchtet ein, daß irgend zwei linkseitige Ebenen E_ξ und E_η sich in dem Punkt schneiden, der der Verbindungsgeraden von ξ und η entspricht, und daß das Entsprechende auch für zwei rechtseitige Ebenen E_ϕ und E_χ gilt.

Nunmehr ergibt sich eine Frage.

Der Punkt ξ und die Ebene ϕ in vereinigter Lage bilden eine Figur mit fünf komplexen Konstanten, die (nach Lie Flächenelement oder kurz Element) nach Bianchi Facette heißt, und sie bestimmen zusammen ein Büschel von Geraden, das auf M_4^2 als eine Gerade $\mathfrak{Z}$ abgebildet wird. Umgekehrt entspricht natürlich auch jeder Geraden $\mathfrak{Z}$ auf M_4^2 eine Facette, die Bild der Figur von zwei Ebenen E_ξ und E_ϕ in vereinigter Lage und damit zugleich auch ihrer Schnittlinie $\mathfrak{Z}$ ist. Wir verlangen, die Grassmannschen Koordinaten der Geraden $\mathfrak{Z}$ zu berechnen, wenn die Facette (ξ, ϕ) gegeben ist, und umgekehrt die Koordinaten der Facette (ξ, ϕ) zu finden, wenn die Koordinaten von $\mathfrak{Z}$ gegeben sind.

Diese Aufgabe ist ähnlich der zuvor behandelten, in der es auf die Abhängigkeiten $\xi \longleftrightarrow E_\xi$, $\phi \longleftrightarrow E_\phi$ ankam, und sie ist ebenso elementar. Nur ist die nötige Rechnung in dem jetzt vorliegenden Fall umständlicher.

Um mich kurz fassen zu können, führe ich zunächst das folgende System von Zeichen ein:

$$\begin{aligned}
C_{00} &= \xi_0\phi_0 + \xi_1\phi_1 + \xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3 = \Omega_{\infty\infty}\,, \\[4pt]
C_{01} &= -\xi_0\phi_1 + \xi_1\phi_0 - \xi_2\phi_3 + \xi_3\phi_2 = \Omega_{24}\,, \\
C_{02} &= -\xi_0\phi_2 + \xi_1\phi_3 + \xi_2\phi_0 - \xi_3\phi_1 = \Omega_{40}\,, \\
C_{03} &= -\xi_0\phi_3 - \xi_1\phi_2 + \xi_2\phi_1 + \xi_3\phi_0 = \Omega_{02}\,, \\[4pt]
C_{10} &= \xi_0\phi_1 - \xi_1\phi_0 - \xi_2\phi_3 + \xi_3\phi_2 = \Omega_{35}\,, \\
C_{20} &= \xi_0\phi_2 + \xi_1\phi_3 - \xi_2\phi_0 - \xi_3\phi_1 = \Omega_{51}\,, \\
C_{30} &= \xi_0\phi_3 - \xi_1\phi_2 + \xi_2\phi_1 - \xi_3\phi_0 = \Omega_{13}\,, \\[4pt]
C_{11} &= \xi_0\phi_0 + \xi_1\phi_1 - \xi_2\phi_2 - \xi_3\phi_3 = \Omega_{01}\,, \\
C_{12} &= \xi_0\phi_3 + \xi_1\phi_2 + \xi_2\phi_1 + \xi_3\phi_0 = \Omega_{21}\,, \\
C_{13} &= -\xi_0\phi_2 + \xi_1\phi_3 - \xi_2\phi_0 + \xi_3\phi_1 = \Omega_{41}\,, \\
C_{21} &= -\xi_0\phi_3 + \xi_1\phi_2 + \xi_2\phi_1 - \xi_3\phi_0 = \Omega_{03}\,, \\
C_{22} &= \xi_0\phi_0 - \xi_1\phi_1 + \xi_2\phi_2 - \xi_3\phi_3 = \Omega_{23}\,, \\
C_{23} &= \xi_0\phi_1 + \xi_1\phi_0 + \xi_2\phi_3 + \xi_3\phi_2 = \Omega_{43}\,. \\
C_{31} &= \xi_0\phi_2 + \xi_1\phi_3 + \xi_2\phi_0 + \xi_3\phi_1 = \Omega_{05}\,. \\
C_{32} &= -\xi_0\phi_1 - \xi_1\phi_0 + \xi_2\phi_3 + \xi_3\phi_2 = \Omega_{25}\,; \\
C_{33} &= \xi_0\phi_0 - \xi_1\phi_1 - \xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3 = \Omega_{45}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Hierzu sei sogleich bemerkt, daß diese Gleichungen nach den Produkten $\xi_i \phi_k$ aufgelöst werden können. Zum Beispiel ist

$$C_{00} + C_{11} + C_{22} + C_{33} = 4\,\xi_0 \phi_0 .$$

Die zwischen den sechzehn Größen C_{ik} bestehenden Abhängigkeiten (36 linear-unabhängige quadratische Gleichungen) sind also lineare Transformationen derer, die zwischen den Produkten $\xi_i \phi_k$ bestehen. Sie sind demnach von diesen letzten nur in der Form verschieden. Sind sie erfüllt, so kann man aus ihnen immer die homogenen Koordinaten eines Punktes ξ und einer Ebene ϕ berechnen, und wenn überdies die Gleichung $C_{00} = 0$ besteht, so bilden diese Figuren zusammen eine Facette.

Die hier wichtigste Eigenschaft der Größen C_{ik} aber wird in dem Satz ausgesprochen:

Die Größen C_{ik} bilden, wenn die Wurzelgröße

$$\sqrt{N\xi}\cdot\sqrt{N\phi} = \sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\,\sqrt{\phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}$$

von Null verschieden ist, zusammen mit dem einen oder anderen der Werte von $\sqrt{N\xi}\cdot\sqrt{N\phi}$ das Koeffizientensystem irgendeiner quaternären eigentlichen homogenen orthogonalen Transformation. Allgemein aber werden durch die zwischen den Koeffizienten einer solchen Transformation bestehenden homogenen Gleichungen die Abhängigkeiten zwischen den Größen C_{ik} erschöpft.

In der Tat liefert die Quaternionenformel

$$\sqrt{N\xi}\cdot\sqrt{N\phi}\cdot\omega^* = \xi\,\omega\,\phi ,$$

durch die man ja jede eigentliche orthogonale Transformation in vier Veränderlichen ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 ausdrücken kann, gerade dieses Koeffizientensystem[1]. Ist $N\xi\cdot N\phi = 0$, so erhält man ebenfalls noch ein weiterhin brauchbares System von Größen C_{ik}, das dann aber nicht mehr zu einer Transformation gehört. Ob das eine oder andere eintritt, ist hier nebensächlich.

Bemerkt sei noch, daß man immer dann, wenn $N\xi \neq 0$, $N\phi \neq 0$ ist, die Verhältnisgrößen A_{00}, A_{ik} und B_{00}, B_{ik}, d. i. die Koeffizientensysteme der mit der quaternären Transformation invariant-verbundenen ternären Transformationen

$$N\xi\cdot\lambda^* = \bar{\xi}\,\lambda\,\xi\,, \quad N\phi\cdot\varrho^* = \bar{\phi}\,\varrho\,\phi$$

auch berechnen kann, ohne den Weg über die Produkte $\xi_i \phi_k$ zu nehmen. Es sind nämlich je zwei komplementäre zweireihige Determinanten aus der Matrix der Größen C_{ik} einander gleich. Wählt man nun auf die neun möglichen Arten zwei Paare solcher Determinanten so aus, daß alle sechzehn Größen C_{ik} dabei benutzt werden, so werden Summen und Differenzen von ihnen gleich den mit Faktoren $N\phi$ oder $N\xi$ multiplizierten Größen $A_{11} \dots A_{33}$, $B_{11} \dots B_{33}$. Zum Beispiel ist

$$N\phi\cdot A_{11} = B_{00}\cdot A_{11} = \begin{vmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{02} & C_{03} \\ C_{12} & C_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{20} & C_{21} \\ C_{30} & C_{31} \end{vmatrix},$$

$$N\xi\cdot B_{11} = A_{00}\cdot B_{11} = \begin{vmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_{02} & C_{03} \\ C_{12} & C_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_{20} & C_{21} \\ C_{30} & C_{31} \end{vmatrix}.$$

[1] Das Auftreten quaternärer orthogonaler Transformationen in diesem Zusammenhang läßt sich von vornherein erschließen. Ich verzichte aber auf eine Darlegung darüber, die immerhin ziemlich viele Worte nötig machen würde und hier nicht unerläßlich ist.

Wir werden diesen Lehrsatz und was damit zusammenhängt[1] hier übrigens nicht benutzen. Auch eine andere Eigenschaft der Größen C_{ik} kann nur anhangsweise erwähnt werden:

Die Gleichungen $C_{ik} = 0$ oder $\Omega_{\alpha\beta} = 0$ stellen, einzeln betrachtet und im projektiven Kontinuum R_3 gedeutet, die Gruppe von sechzehn zweiseitigen Kollineationen dar, die mit irgendeiner KUMMERschen Konfiguration und folglich mit $\infty^{2 \cdot 3}$ solchen verbunden ist[2].

In der vorliegenden Untersuchung werden nun die Größen C_{ik} als Verhältnisgrößen betrachtet und zur Darstellung der fünfzehn GRASSMANNschen Koordinaten von irgendwelchen Geraden auf M_4^2 gebraucht. C_{∞} ist dann gleich Null zu setzen, was zur Wirkung hat, daß sich die Größen C_{11}, C_{22}, C_{33} noch ein wenig einfacher schreiben lassen, z. B.:

$$C_{11} = 2(\xi_0\phi_0 + \xi_1\phi_1) = -2(\xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3)\,.$$

Man erhält nach elementarer Rechnung, ähnlich wie oben, die gesuchten Koordinaten in folgender Zusammenstellung:

(10)

		(0)	(2)	(4)
	0	$\mathfrak{Z}_{24} = C_{01} = -\mathfrak{U}_{24}$	$\mathfrak{Z}_{40} = C_{02} = -\mathfrak{U}_{40}$	$\mathfrak{Z}_{02} = C_{03} = -\mathfrak{U}_{02}$
(1)	$-\mathfrak{Z}_{35} = C_{10} = \mathfrak{U}_{35}$	$\mathfrak{Z}_{01} = C_{11} = \mathfrak{U}_{01}$	$\mathfrak{Z}_{21} = C_{12} = \mathfrak{U}_{21}$	$\mathfrak{Z}_{41} = C_{13} = \mathfrak{U}_{41}$
(3)	$-\mathfrak{Z}_{51} = C_{20} = \mathfrak{U}_{51}$	$\mathfrak{Z}_{03} = C_{21} = \mathfrak{U}_{03}$	$\mathfrak{Z}_{23} = C_{22} = \mathfrak{U}_{23}$	$\mathfrak{Z}_{43} = C_{23} = \mathfrak{U}_{43}$
(5)	$-\mathfrak{Z}_{13} = C_{30} = \mathfrak{U}_{13}$	$\mathfrak{Z}_{05} = C_{31} = \mathfrak{U}_{05}$	$\mathfrak{Z}_{25} = C_{32} = \mathfrak{U}_{25}$	$\mathfrak{Z}_{45} = C_{33} = \mathfrak{U}_{45}$

Die hinzugefügten Zeichen $\mathfrak{U}_{ik}$, die natürlich z. B. auch durch die Zeichen $-\mathfrak{U}_{ik}$ ersetzt werden können, bedeuten die GRASSMANNschen Koordinaten der Polarfigur der Geraden $\mathfrak{Z}$ in bezug auf die Mannigfaltigkeit M_4^2, mithin die Koordinaten eines gewissen linearen Raumes $\mathfrak{R}_3$. Sie sind der Einfachheit halber mit zwei statt mit vier Indizes geschrieben. ($\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathfrak{U}_{\varepsilon\zeta}$, wenn $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ eine gerade Permutation von 0 1 2 3 4 5 ist.) Von den Größen $\mathfrak{Z}_{ik}$ (und ebenso von den Größen $\mathfrak{U}_{ik}$) genügen fünfzehnmal sechs, die dieselben vier Indizes enthalten, der PLÜCKERschen Gleichung, und außerdem bestehen zwischen ihnen, wie im Falle $C_{\infty} \neq 0$, noch einundzwanzig von jenen und voneinander linear-unabhängige quadratische Gleichungen.

Es ist bewiesen:

Die fünfzehn Verhältnisgrößen $\mathfrak{Z}_{ik}$ ($= \pm\Omega_{\alpha\beta}$) sind die Koordinaten der Schnittgeraden der Ebenen E_ξ und E_ϕ, und die fünfzehn Verhältnisgrößen $\mathfrak{U}_{ik}$ die Koordinaten der Polare von $\mathfrak{Z}$, also des linearen Raumes $\mathfrak{R}_3$, der die Ebenen E_ξ und E_ϕ verbindet.

Die Zuordnung der im Raume R_5 gelegenen Figuren E_ξ, E_ϕ und $\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{U}$ zu den Figuren ξ, ϕ und (ξ, ϕ) des Bildraumes R_3 ist **birational und völlig frei von singulären Stellen.**

---

[1] Vgl. American Journal of Mathematics, Bd. 29, 1906 oder 1907.

[2] Siehe den schon erwähnten Aufsatz, Leipziger Berichte 1892. Weitere Gruppen von ähnlicher Struktur (die sich alle in ähnlicher Weise darstellen lassen) werden erschöpfend bestimmt in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1912.



Diese letzte Tatsache ist offenbar sehr wesentlich. Auf ihr beruht die Einfachheit der folgenden Entwickelungen.

Führt man im Bildraume eine Kollineation oder Korrelation aus, so wird dadurch eine eigentliche oder uneigentliche Kollineation der Mannigfaltigkeit M_4^2 induziert, und ebenso gilt das Umgekehrte. Die in Betracht kommenden Gruppen Γ_{15}, H_{15} und $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ sind holomorph. Da die Kollineationen und Korrelationen im R_3 zweier wesentlich-verschiedener Darstellungen durch Matrizen von sechzehn Größen fähig sind, so gilt das gleiche von den automorphen Kollineationen von M_4^2. Unsere Untersuchung hat aber nicht nur dieses geliefert — das bekannt genug ist —, sondern einen weiter ausgebildeten Formelapparat, den wir fernerhin brauchen werden[1].

2.

Die Mannigfaltigkeit M_3^2.

Aus der zuletzt betrachteten Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ können wir nunmehr eine weitere Gruppe G_{15}, H_{15}, und zwar eine Gruppe nicht-projektiver Transformationen ableiten, einfach dadurch, daß wir im Raume R_5 irgendeinen linearen Raum R_4 annehmen, der die M_4^2 nicht berührt, und dann die Ebenen E_ξ und E_ϕ mit diesem R_4 zum Schnitt bringen. Die Schnittfiguren oder Spuren von E_ξ und E_ϕ sind Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, die auf dem Schnitt von R_4 und M_4^2, also auf einer nicht-singulären M_3^2 liegen, und eindeutig-umkehrbar und überall stetig den Ebenen E_ξ und E_ϕ zugeordnet sind. Werden dann die Ebenen E_ξ und E_ϕ durch eine Transformation von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ untereinander vertauscht, so werden die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ entsprechend vertauscht, und auf diese Art entsteht eben die Gruppe G_{15}, H_{15}, als deren (einfachste) Raumelemente die $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ erscheinen. Die Mannigfaltigkeit M_3^2 wird somit als Ort der auf ihr gelegenen Geraden doppelt — mit zwei Schichten — überdeckt, indem jede ihrer Geraden die Rolle einer $\mathfrak{X}$-Geraden oder auch die Rolle einer $\mathfrak{Y}$-Geraden übernehmen kann[2]. Durch die Transformationen von G_{15} werden dann die $\mathfrak{X}$-Geraden und die $\mathfrak{Y}$-Geraden, jede Schicht für sich, untereinander vertauscht, aber beide Schichten in der Regel auf verschiedene Art — wie wir sagen wollen: kontragradient. Es entspricht nämlich, wie man ohne weiteres sieht, jeder Transformation von G_{15} und der durch sie bewirkten Vertauschung der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden im Bildraume R_3 eine Kollineation, die die Punkte ξ und Ebenen ϕ entsprechend vertauscht. Ähnlich wird eine Transformation der Schar $\mathfrak{H}_{15}$ auf M_3^2 eine Transformation der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden bewirken, die beide Schichten von Geraden miteinander vertauscht ($\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}^*$, $\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}^*$), und diese Transformation

---

[1] Die der projektiven Geometrie zu entlehnende Darstellung der automorphen Kollineationen unserer M_4^2 liefert übrigens noch nicht deren formal-einfachste Ausdrücke. Siehe Journal für Mathematik, Bd. 157, 1926, S. 58, 59.

Wegen der in diesem Zusammenhang auftretenden Antikollineationen und Antikorrelationen siehe Math. Annalen, Bd. 91, 1924.

[2] Ähnliches ist nötig in der radial-projektiven Geometrie. (Geometrie der Dynamen 1903, dritter Abschnitt.)

wird im R_3 zum Bilde eine Korrelation ($\xi \to \varphi^*$, $\varphi \to \xi^*$) haben. Natürlich ist auf diese Weise auch die Gruppe G_{15}, H_{15} auf die Gruppe Γ_{15}, H_{15} holomorph bezogen.

Wir erklären nun einen Begriff »vereinigte Lage einer $\mathfrak{X}$- und einer $\mathfrak{Y}$-Geraden« durch die vereinigte Lage der zugehörigen Ebenen E_ξ und E_φ. Da dann E_ξ und E_φ einander in einer Geraden $\mathfrak{Z}$ schneiden, so sind für die vereinigten Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei Lagenbeziehungen möglich: Sie können entweder einen eindeutig-bestimmten Punkt $\mathfrak{z}$ gemein haben, oder einander überdecken. Das letzte tritt ein, wenn $\mathfrak{Z}$ in R_4 liegt und also mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zusammenfällt. Ohne weiteres ist deutlich: Die vereinigte Lage einer $\mathfrak{X}$- und einer $\mathfrak{Y}$-Geraden ist eine gegenüber Transformationen von G_{15}, H_{15} invariante Eigenschaft, das Übereinanderliegen von zwei solchen Geraden (aus verschiedenen Schichten) aber nicht. Vielmehr wird durch die weitere Forderung, daß auch noch das Übereinanderliegen von zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ invariant sein soll, eine Untergruppe G_{10}, H_{10} von G_{15}, H_{15} definiert, die sich bei Nichtunterscheidung der zwei Schichten auf die zu ihr meromorphe Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ der automorphen Kollineationen von M_3^2 reduziert.

Ferner folgt unmittelbar:

Zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in vereinigter Lage haben zum Bilde im projektiven Kontinuum R_3 eine bestimmte Facette (ξ, φ), und insbesondere haben zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, die einander überdecken, zum Bilde eine Facette, deren Punkt ξ und Ebene φ als Nullpunkt und Nullebene in bezug auf einen gewissen linearen Komplex oder auf das mit ihm verbundene Nullsystem zusammengehören.

Natürlich entspricht vermöge dieser Zuordnung oder Abbildung der Gruppe G_{10}, H_{10} die Gruppe Γ_{10}, H_{10} der automorphen Kollineationen und Korrelationen des Komplexes oder Nullsystems, und insbesondere entspricht der Vertauschung beider Schichten ($\mathfrak{X} \longleftrightarrow \mathfrak{Y}$) die korrelative Spiegelung ($\xi \longleftrightarrow \varphi$) an dem Komplex, die Paarung von ξ und φ durch das zugehörige Nullsystem. Wir denken uns den linearen Komplex bestimmt gewählt, und nennen ihn dann den Hauptkomplex des Bildraumes R_3.

Es entsteht nunmehr die Aufgabe, das, was soeben begrifflich entwickelt wurde, durch algebraische Rechnung zu verfolgen. Das aber ist eine leichte Sache auf Grund der Darlegung des § 1.

Wir nehmen an, der bei unserer Konstruktion benutzte R_4 sei durch die Gleichung

$$\boxed{\mathfrak{z}_0 = Z_{01} + Z_{23} = 0} \tag{11}$$

gegeben, was lediglich eine Spezialisierung des Koordinatensystems bedeutet. Wir haben damit die Gleichung unserer M_3^2:

$$* \; -\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 - \mathfrak{z}_3^2 + \mathfrak{z}_4^2 - \mathfrak{z}_5^2 = 0 \tag{12}$$

und zugleich den zugehörigen Hauptkomplex, sowie das mit ihm verbundene Nullsystem:

$$\boxed{\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \varphi_1 : -\varphi_0 : \varphi_3 : -\varphi_2 .} \tag{13a}$$

Wegen des Nachfolgenden drücken wir diese Zuordnung, also die **korrelative Spiegelung am Hauptkomplex**, auch noch in Linienkoordinaten aus:

$$(13\text{b}) \qquad \Xi_{01} : \Xi_{02} : \Xi_{03} : \Xi_{23} : \Xi_{31} : \Xi_{12} = \mathrm{H}_{23} : -\mathrm{H}_{02} : -\mathrm{H}_{03} : \mathrm{H}_{01} : -\mathrm{H}_{31} : -\mathrm{H}_{12}\,.$$

Von dem Koordinatenhexatop des Raumes R_5 gehört nun nur der Grundpunkt (1:0:0:0:0:0) nicht dem Raume R_4 an. Daher liefern die Verhältnisgrößen $\mathfrak{X}_{0\alpha\beta}$ und $\mathfrak{Y}_{0\alpha\beta}$, nach Unterdrückung des Index 0, unmittelbar die Koordinaten der Spuren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ von E_ξ und E_φ:

$$(14, \text{l.}) \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & \mathfrak{X}_{24} = A_{00}\,, & \\ \mathfrak{X}_{35} = A_{11}\,, & \mathfrak{X}_{14} = A_{12}\,, & \mathfrak{X}_{21} = A_{13}\,, \\ \mathfrak{X}_{51} = A_{21}\,, & \mathfrak{X}_{34} = A_{22}\,, & \mathfrak{X}_{23} = A_{23}\,, \\ \mathfrak{X}_{13} = A_{31}\,, & \mathfrak{X}_{54} = A_{32}\,, & \mathfrak{X}_{25} = A_{33}\,, \end{array}}$$

$$(14, \text{r.}) \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Y}_{24} = B_{00}\,, & \\ \mathfrak{Y}_{35} = B_{11}\,, & \mathfrak{Y}_{14} = -B_{12}\,, & \mathfrak{Y}_{21} = -B_{13}\,, \\ \mathfrak{Y}_{51} = B_{21}\,, & \mathfrak{Y}_{34} = -B_{22}\,, & \mathfrak{Y}_{23} = -B_{23}\,, \\ \mathfrak{Y}_{13} = B_{31}\,, & \mathfrak{Y}_{54} = -B_{32}\,, & \mathfrak{Y}_{25} = -B_{33}\,. \end{array}}$$

Nunmehr haben wir es also, wenn A_{00} und B_{00} nicht verschwinden, mit zwei eigentlichen orthogonalen Transformationen zu tun.

Die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ liegen vereinigt, wenn $(\xi\varphi) = 0$ ist (7), und wenn dann die Proportion (13a) nicht besteht, so haben sie einen bestimmten Schnittpunkt $\mathfrak{z}$, dessen Koordinaten man den Gleichungen (10) entnimmt:

(15)

0	*	$\mathfrak{z}_4 = -C_{02}$	$\mathfrak{z}_2 = C_{03}$
*	$\mathfrak{z}_1 = C_{11}$	*	*
*	$\mathfrak{z}_3 = C_{21}$	*	*
*	$\mathfrak{z}_5 = C_{31}$	*	*

Die Verbindungsebene der Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bleibt auch in dem hier ausgeschlossenen Fall bestimmt: Wenn die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ einander überlagern, so wird sie zur Berührungsebene von M_3^2 längs $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{Y}$, also zur Polare der beiden einander überdeckenden Geraden in bezug auf M_3^2. Sie ist die Schnittebene oder Spur des linearen R_3 oder »Flachs« $\mathfrak{U}$ der Formeln (10); ihre — durch zwei statt durch drei Indizes bezeichneten — Koordinaten sind also derselben Tafel (10) zu entnehmen:

(16)

0	$\mathfrak{U}_{24} = -C_{01}$	*	*
$\mathfrak{U}_{35} = C_{10}$	*	$\mathfrak{U}_{21} = C_{12}$	$\mathfrak{U}_{41} = C_{13}$
$\mathfrak{U}_{51} = C_{20}$	*	$\mathfrak{U}_{23} = C_{22}$	$\mathfrak{U}_{43} = C_{23}$
$\mathfrak{U}_{13} = C_{30}$	*	$\mathfrak{U}_{25} = C_{32}$	$\mathfrak{U}_{45} = C_{33}$

Zwischen den sechzehn Größen

(17)

0	$-\mathfrak{U}_{24}$	$-\mathfrak{z}_4$	$\mathfrak{z}_2$
$\mathfrak{U}_{35}$	$\mathfrak{z}_1$	$\mathfrak{U}_{21}$	$\mathfrak{U}_{41}$
$\mathfrak{U}_{51}$	$\mathfrak{z}_3$	$\mathfrak{U}_{23}$	$\mathfrak{U}_{43}$
$\mathfrak{U}_{13}$	$\mathfrak{z}_5$	$\mathfrak{U}_{25}$	$\mathfrak{U}_{45}$

bestehen also dieselben sechsunddreißig homogenen quadratischen Gleichungen, wie zwischen den Koeffizienten C_{ik} einer durch die Annahme $C_{\infty} = 0$ spezialisierten quaternären eigentlichen orthogonalen Transformation. Wir brauchen davon aber nur solche, die in $\mathfrak{z}$ sowohl als in $\mathfrak{U}$ homogen sind. Das sind zunächst Gleichungen zwischen den $\mathfrak{U}$ allein: Fünf PLÜCKERsche Gleichungen, und eine weitere, die aussagt, daß die Ebene $\mathfrak{U}$ die Mannigfaltigkeit M_3^2 berührt:

$$(18)\qquad \begin{array}{c} \mathfrak{U}_{24}^2 + \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 \\ - \mathfrak{U}_{21}^2 - \mathfrak{U}_{23}^2 - \mathfrak{U}_{25}^2 - \mathfrak{U}_{41}^2 - \mathfrak{U}_{43}^2 - \mathfrak{U}_{45}^2 = 0 . \end{array}$$

Ferner ist darin enthalten die Gleichung (12). Von den übrigen Gleichungen sind fünf bilinear in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{U}$ und viergliedrig; diese sagen aus, daß $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{U}$ liegt. Weitere zehn Gleichungen sind in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{U}$ bilinear und dreigliedrig; ihnen zufolge ist $\mathfrak{z}$ der Berührungspunkt oder im Grenzfall, der hier einbezogen werden kann, einer der Berührungspunkte von $\mathfrak{U}$ mit M_3^2.

Ist nach der hierin enthaltenen Vorschrift eine Ebene $\mathfrak{U}$ des Raumes R_4 gegeben, so ist damit immer auch das Paar der Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bestimmt, in denen sie die Mannigfaltigkeit M_3^2 durchdringt. Diese Geraden sind aber in der Regel nicht rational-trennbar. Es fragt sich also, wie man sie einzeln finden kann.

Auch hierüber geben uns unsere Formeln Auskunft.

Es kann zunächst sein, daß $\mathfrak{U}$ eine singuläre Berührungsebene von M_3^2 ist, daß also ihre Schnittgeraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ einander überdecken. $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ werden dann, abgesehen von ihrer Verteilung auf die zwei Schichten, identisch mit der Polare von $\mathfrak{U}$ in bezug auf M_3^2. Man entnimmt ihre Koordinaten (abgesehen natürlich von Proportionalitätsfaktoren, auf die es nicht ankommt) der folgenden Tafel, in der $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ durch das mit ihnen zusammenfallende $\mathfrak{Z}$ ersetzt sind:

(19)

0	$\mathfrak{Z}_{24} = -\mathfrak{U}_{24}$	*	*
$\mathfrak{Z}_{35} = -\mathfrak{U}_{35}$	*	$\mathfrak{Z}_{21} = \mathfrak{U}_{21}$	$\mathfrak{Z}_{41} = \mathfrak{U}_{41}$
$\mathfrak{Z}_{51} = -\mathfrak{U}_{51}$	*	$\mathfrak{Z}_{23} = \mathfrak{U}_{23}$	$\mathfrak{Z}_{42} = \mathfrak{U}_{43}$
$\mathfrak{Z}_{12} = -\mathfrak{U}_{13}$	*	$\mathfrak{Z}_{25} = \mathfrak{U}_{25}$	$\mathfrak{Z}_{45} = \mathfrak{U}_{45}$

In der Tat erhält man, wenn die eine oder andere der beiden entgegengesetzten Substitutionen

$$\varphi_0 \longleftrightarrow -\xi_1\,, \quad \varphi_1 \longleftrightarrow \xi_0\,, \quad \varphi_2 \longleftrightarrow -\xi_3\,, \quad \varphi_3 \longleftrightarrow \xi_2$$

ausgeführt wird, aus den unter (16) aufgezählten Größen $\mathfrak{U}_{ik}$ oder $-\mathfrak{U}_{ik}$ gerade die entsprechenden Verhältnisgrößen $\mathfrak{X}_{ik} = \mathfrak{Y}_{ik}$ (14). Zugleich erhalten die übrigen Koordinaten des zu $\mathfrak{U}$ gehörigen linearen $\mathfrak{R}_3$ des Raumes R_5 — deren Stellen in (19) durch Sterne bezeichnet sind — alle den Wert Null,

$$\boxed{\mathfrak{U}_{01} = \mathfrak{U}_{02} = \mathfrak{U}_{03} = \mathfrak{U}_{04} = \mathfrak{U}_{05} = 0\,,} \tag{20}$$

und umgekehrt tritt der jetzt behandelte Fall eben dann ein, wenn die Gleichungen (20) bestehen. Durch Elimination der Größen $\mathfrak{U}_{0k}$ ergibt sich:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine vorgeschriebene Ebene $\mathfrak{U}$ des Raumes R_4 eine singuläre Berührungsebene von M_3^2 ist, besteht darin, dass ihre Koordinaten die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}_{24}^2 &= \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 = \mathfrak{U}_{21}^2 + \mathfrak{U}_{23}^2 + \mathfrak{U}_{25}^2 = \mathfrak{U}_{41}^2 + \mathfrak{U}_{43}^2 + \mathfrak{U}_{45}^2\,, \\ \mathfrak{U}_{24}^2 &= \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{21}^2 + \mathfrak{U}_{41}^2 = \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{23}^2 + \mathfrak{U}_{43}^2 = \mathfrak{U}_{13}^2 + \mathfrak{U}_{25}^2 + \mathfrak{U}_{45}^2 \end{aligned}} \tag{21}$$

erfüllen.

Die Ebene $\mathfrak{U}$ wird dann durch einen $\mathfrak{R}_3$ des Raumes R_5 ausgeschnitten, der die Mannigfaltigkeit M_4^2 in einer Geraden $\mathfrak{Z}$ des Raumes R_4 berührt.

Im allgemeinen werden jedoch die beiden Schnittlinien einer Berührungsebene $\mathfrak{U}$ von M_3^2 voneinanander verschieden sein. $\mathfrak{U}$ ist dann Spur zweier linearer Räume $\mathfrak{R}_3'$, $\mathfrak{R}_3''$, deren jeder die Mannigfaltigkeit in allen Punkten einer Geraden ($\mathfrak{Z}'$; $\mathfrak{Z}''$) berührt und sie in einem Paar von Ebenen (E_ξ', E_φ'; E_ξ'', E_φ'') durchsetzt. (In dem soeben besprochenen Grenzfall rücken die beiden Ebenenpaare zusammen, $E_\xi' = E_\xi''$, $E_\varphi' = E_\varphi''$.) Sind die zwei Schnittlinien bekannt und auf die zwei Schichten von Geraden auf M_3^2 verteilt, also einzeln mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bezeichnet, so erscheint die eine als Spur einer bestimmten Ebene E_ξ und die andere als Spur einer bestimmten Ebene E_φ. Die Trennung der linearen Räume $\mathfrak{R}_3'$, $\mathfrak{R}_3''$, also die Entscheidung für einen bestimmten singulären Berührungs-$\mathfrak{R}_3$ von M_4^2 aber wird dadurch bewirkt, daß man die Lücken (*) des Koordinatenschemas (19), die in der Regel nicht mit Nullen besetzt sind, nach Anweisung der Tafel (10) auszufüllen sucht. Da

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 - \mathfrak{U}_{21}^2 - \mathfrak{U}_{23}^2 - \mathfrak{U}_{25}^2 &= \mathfrak{U}_{40}^2\,, \\ \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 - \mathfrak{U}_{41}^2 - \mathfrak{U}_{42}^2 - \mathfrak{U}_{45}^2 &= \mathfrak{U}_{02}^2\,, \\ \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 - \mathfrak{U}_{21}^2 - \mathfrak{U}_{41}^2 &= \mathfrak{U}_{01}^2\,, \\ \mathfrak{U}_{13}^2 + \mathfrak{U}_{35}^2 - \mathfrak{U}_{23}^2 - \mathfrak{U}_{43}^2 &= \mathfrak{U}_{03}^2\,, \\ \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 - \mathfrak{U}_{25}^2 - \mathfrak{U}_{45}^2 &= \mathfrak{U}_{05}^2 \end{aligned} \tag{22}$$

werden muß, so sind die Quadrate der fünf Größen $\mathfrak{U}_{0k}$ schon bekannt. Sind sie alle gleich Null, so liegt der besprochene Spezialfall vor. Ist aber wenigstens

eines der $\mathfrak{U}_{ok}^2$ von Null verschieden, so sind, vermöge der zwischen den $\mathfrak{U}_{ik}$ bestehenden bilinearen Gleichungen, nach Entscheidung über einen einzigen Wurzelwert alle Größen $\mathfrak{U}_{ok}$ eindeutig bestimmt. Hiermit ist ein bestimmter Raum $\mathfrak{R}_3$ unter den beiden linearen Räumen $\mathfrak{R}_3'$, $\mathfrak{R}_3''$ ausgewählt.

Sind alle fünfzehn Größen $\mathfrak{U}_{ik}$ bekannt, so sind es, wie wir gesehen haben, auch die Produkte $\xi_i \phi_k$ und mit ihnen die zweierlei Verhältnisgrößen ξ_i, ϕ_k, ferner die Verhältnisgrößen A_{∞}, A_{ik} und B_{∞}, B_{ik}, also schließlich auch die Ebenen E_{ξ} und E_{ϕ}, deren Spuren die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ sind. Ein Vorzeichenwechsel aller Größen $\mathfrak{U}_{ok}$ bedeutet offenbar die projektive Spiegelung am Raume R_4 und seinem Pol (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), mithin die Vertauschung von $E_{\xi} = E_{\xi}'$ und $E_{\phi} = E_{\phi}'$ mit E_{ϕ}'' und E_{ξ}'', also die Vertauschung von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$.

Schließlich liefert uns die Tafel (15) auch die Spur der Geraden $\mathfrak{Z}$, mithin den Berührungspunkt der Ebene $\mathfrak{U}$ und Schnittpunkt von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, falls er bestimmt ist:

$$(23) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3 : \mathfrak{z}_4 : \mathfrak{z}_5 \\ &= \mathfrak{U}_{01} : -\mathfrak{U}_{02} : \mathfrak{U}_{03} : -\mathfrak{U}_{04} : \mathfrak{U}_{05}\,. \end{aligned}}$$

In der Tat hat dieser Punkt, wenn er bestimmt ist, zum Bilde die dann ebenfalls bestimmte Gerade

$$\begin{aligned} \Xi_{01} &= \xi_0\phi_0 + \xi_1\phi_1\,, & \Xi_{02} &= -\xi_0\phi_3 + \xi_2\phi_1\,, & \Xi_{03} &= \xi_0\phi_2 + \xi_3\phi_1\,, \\ \Xi_{23} &= \xi_2\phi_2 + \xi_3\phi_3\,, & \Xi_{31} &= \xi_3\phi_0 - \xi_1\phi_2\,, & \Xi_{12} &= -\xi_1\phi_3 - \xi_2\phi_0\,, \end{aligned}$$

die der Facette (ξ, ϕ) angehört und im Hauptkomplex $\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0$ liegt.

Nennen wir nunmehr Blatt die Figur der Ebene $\mathfrak{U}$ und ihrer nach dem Schema Links, Rechts geordneten, also mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bezeichneten Schnittlinien mit M_3^2, so können wir das Bewiesene wie folgt zusammenfassen:

Zu jeder Ebene $\mathfrak{U}$, die die Mannigfaltigkeit M_3^2 berührt, gehören zwei Blätter, die nur im Falle einer singulären Ebene $\mathfrak{U}$ (die M_3^2 in einer Geraden berührt) nicht voneinander verschieden sind. Die singulären Berührungsebenen bilden also die Verzweigungsfigur für die doppelte Überdeckung der Berührungsebenen von M_3^2 mit Blättern.

Jedem Blatt entspricht im Bildraume R_3 eine bestimmte Facette, und umgekehrt[1].

---

[1] Math. Ann. 1924, S. 107, Lehrsatz XXVII.

S. LIE ließ »jedem« Element (jeder Facette) des Bildraumes »ein« Element des Kugelraumes entsprechen, und umgekehrt. Bei KLEIN-BLASCHKE tritt im Kugelraume an Stelle des Elementes, wenn auch nicht folgerecht, ein orientiertes (»gerichtetes«) Element, was dem Wortlaut nach ebenfalls auf den »Gesamtraum« bezogen werden muß, und wiederum einen falschen Satz gibt. Für diesen werden nicht weniger als drei sogenannte Beweise vorgetragen, in denen sehr merkwürdige Dinge vorkommen (so die Geraden-Kugeltransformation als »Flächentransformation«).

Von mir wird gesagt, ich hätte eine »nähere Ausführung« zu diesen »Verhältnissen« geliefert. Das bedeutet eine Irreführung des Lesers, der natürlich nicht erraten kann, daß ich mich zu Hrn. BLASCHKE im Gegensatz befinde, und zwar, wie es mir scheint, in sehr wesentlichen Punkten.

Übereinanderliegenden Blättern entsprechen im Bildraume Facetten, die durch das Nullsystem des Hauptkomplexes gepaart sind, und umgekehrt.

Ist die Ebene $\mathfrak{U}$ durch die Verhältnisse ihrer zehn Koordinaten $\mathfrak{U}_{ik}$ gegeben (die der Gleichung (18) genügen müssen), so erfolgt die Trennung der zugehörigen Blätter durch Bestimmung der Werte von fünf weiteren Größen $\mathfrak{U}_{0k}$, die mithin zusammen mit den zehn gegebenen Größen als **Koordinaten eines Blattes** gelten können.

Jede einzelne der Größen $\mathfrak{U}_{0k}$ ist Wurzel einer reinen quadratischen Gleichung. Zwischen diesen fünf Wurzelgrößen bestehen rationale Abhängigkeiten derart, daß jede der Größen $\mathfrak{U}_{0k}$, die von Null verschieden ist, die übrigen eindeutig bestimmt. Sind alle Größen $\mathfrak{U}_{0k}$ gleich Null, so gehört zu der Ebene $\mathfrak{U}$ nur ein einziges (dann singuläres) Blatt.

Ferner geht aus dem Gesagten noch hervor, daß es unmöglich ist, bei Bestimmung der zu einer Ebene $\mathfrak{U}$ gehörigen Blätter immer mit derselben unter den genannten Wurzelgrößen auszukommen, oder auch nur sie alle durch eine einzige Quadratwurzel zu ersetzen.

Wir ordnen einem Blatt zur Unterscheidung von seiner Ebene $\mathfrak{U}$ nunmehr das Zeichen $\underline{\mathfrak{U}}$ zu, und nennen Umkehrung des Blattes den Übergang zu dem darüberliegenden und in der Regel von ihm verschiedenen Blatt, dessen Koordinaten die Werte $\mathfrak{U}_{ik}, -\mathfrak{U}_{0k}$ haben oder doch zu ihnen proportional sind. Der Umkehrung entspricht die korrelative Spiegelung am Hauptkomplex.

Statt durch Koordinaten kann man die Geraden $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ auch durch Systeme linearer Gleichungen darstellen. Man hat dazu nur auszudrücken, daß im Bildraume eine Gerade Z des Hauptkomplexes $Z_{01} + Z_{23} = 0$ mit einem Punkt oder einer Ebene vereinigt liegt und dann die Punktkoordinaten des Raumes R_5, $\mathfrak{z}_0(=0)$, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{z}_5$ einzuführen. So entstehen Gleichungen der Form

$$(24, \text{l.}) \qquad \begin{array}{|rrrrl|} * & z_4\xi_1 & +z_1\xi_2 & -z_3\xi_3 & =0, \\ -z_4\xi_0 & * & -z_2\xi_2 & +z_0\xi_3 & =0, \\ -z_1\xi_0 & +z_2\xi_1 & * & -z_4\xi_3 & =0, \\ z_3\xi_0 & -z_0\xi_1 & +z_4\xi_2 & * & =0, \end{array} \qquad (z = x)$$

$$(24, \text{r.}) \qquad \begin{array}{|rrrrl|} * & z_4\phi_1 & +z_0\phi_2 & +z_2\phi_3 & =0, \\ -z_4\phi_0 & * & +z_3\phi_2 & +z_1\phi_3 & =0, \\ -z_0\phi_0 & -z_3\phi_1 & * & -z_4\phi_3 & =0, \\ -z_2\phi_0 & -z_1\phi_1 & +z_4\phi_2 & * & =0, \end{array} \qquad (z = y)$$

worin (bei geeigneter Bestimmung eines Proportionalitätsfaktors) die Koordinaten z_k (oder x_k, y_k) mit den Koordinaten $\mathfrak{z}_k$ (oder $\mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_k$) durch die Gleichungen

$$(25)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{z}_1 = 2z_4, \quad \mathfrak{z}_2 = z_0 - z_1, \quad \mathfrak{z}_3 = z_0 + z_1, \\ &\mathfrak{z}_4 = z_2 + z_3, \quad \mathfrak{z}_5 = z_2 - z_3 \end{aligned}}$$

zusammenhängen.

Sind die Figuren ξ und ϕ gegeben, so liefern die Gleichungen (24, l.) und (24, r.) die zugehörigen Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ (oder hier X und Y) als Örter von Punkten $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$ (oder $z = x$ und $z = y$), wobei zu beachten ist, daß sich unter diesen Gleichungen, trotz ihrer Überzahl, keine entbehrliche befindet[1]. Die Gleichungen (25) enthalten auch schon die entsprechenden Abhängigkeiten zwischen den zu den zwei Koordinatensystemen $\{z\}$ und $\{\mathfrak{z}\}$ gehörigen Linienkoordinaten X_{ik} und $\mathfrak{X}_{ik}$, Y_{ik} und $\mathfrak{Y}_{ik}$, und damit liefern sie uns nochmals die Formeln (14). Ist ferner ein Punkt z (oder $\mathfrak{z}$) des Raumes R_4 gegeben, so verlangen die Gleichungen (24) nur dann nichts Widerspruchsvolles, wenn ihre gemeinsame Determinante oder die Quadratwurzel daraus,

$$(26)\qquad \begin{aligned} &z_0 z_1 - z_2 z_3 + z_4^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\{\mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 - \mathfrak{z}_4^2 + \mathfrak{z}_5^2\} \end{aligned}$$

den Wert Null hat, wenn also der Punkt $\mathfrak{z}$ (oder z) auf M_3^2 liegt. Beide Gleichungssysteme liefern dann das Bild des gegebenen Punktes, nämlich eine Gerade des Hauptkomplexes, einmal als Ort ihrer Punkte, das andere Mal als Ort ihrer Ebenen.

Die Gleichungen (12) liefern Ebenenkoordinaten $U_{\alpha\beta}$, die mit den hier benutzten Koordinaten $\mathfrak{U}_{ik}$ natürlich ebenfalls durch eine lineare Transformation zusammenhängen[2].

3.

Kugeln und orientierte Kugeln.

Wir haben zuvor gesehen, was für Figuren des »Kugelraumes« M_3^2 Punkte und Ebenen des projektiven Kontinuums R_3 zu Bildern haben. Nunmehr kommen wir zu den »Kugeln« selbst. Hier handelt es sich um noch Einfacheres, das aber doch (wie alle Mathematik) eine aufmerksame Behandlung verlangt.

Die Mannigfaltigkeiten M_4^2 und M_3^2 unterscheiden sich von reellen sphärischen Mannigfaltigkeiten eines (Euklidischen oder Nichteuklidischen) Raumes R_5 oder R_4 nur durch die ungewöhnliche Wahl der Koordinaten, also im Grunde gar nicht. Daher können z. B. die Schnitte von M_3^2 mit Ebenen sach-

[1] Bei S. LIE und einigen neueren Autoren erscheint nur eine Art von grotesker Verstümmelung des Gleichungssystems (24, l.),

$$(X+iY)+xZ+z=0, \quad z(X-iY)-Z-y=0.$$

[2] Vgl. Math. Ann. Bd. 91 (1924), S. 113.

gemäß Kreise genannt werden (reguläre, einfach- und doppelt-singuläre Kreise). Die Schnitte von $\mathfrak{M}_3^2$ mit linearen $\mathfrak{R}_3$ oder »Flachen« des Raumes R_4 werden dann Kugeln zu nennen sein. Eine Kugel $\mathfrak{u}$ ist mithin durch eine lineare Gleichung in Punktkoordinaten $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_5$ definiert,

$$\mathfrak{u}_1 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{u}_4 \mathfrak{x}_4 + \mathfrak{u}_5 \mathfrak{x}_5 = 0 .$$

Da zwischen Punkten und Flachen des R_4 die Beziehung von Pol und Polare in bezug auf $\mathfrak{M}_3^2$ besteht, so kann man — wohl noch etwas zweckmäßiger — die letzte Gleichung auch in folgender Schreibart ansetzen:

$$(27) \qquad * \; -\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{z}_3 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{z}_4 \mathfrak{x}_4 - \mathfrak{z}_5 \mathfrak{x}_5 = 0 .$$
$$\{\mathfrak{z}_1 = -\mathfrak{u}_1 , \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{u}_2 , \quad \text{usw.}\}$$

Wie alle nichtsingulären Flächen zweiter Ordnung tragen auch diese unsere »Kugeln« zwei Scharen von je $\infty^{2 \cdot 1}$ Geraden, und diese werden auf zwei Arten auf die Schichten der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden verteilt werden können. Neben den Begriff der Kugel stellt sich daher noch ein weiterer Begriff, der als orientierte Kugel bezeichnet werden soll. Ich will hier einer erst später zu gebenden Darlegung ein wenig vorgreifen und einstweilen für gewisse Mannigfaltigkeiten von Blättern den Terminus Verein gebrauchen. Ich erkläre:

Wenn jede von $\infty^{2 \cdot 1}$ $\mathfrak{X}$-Geraden mit jeder von $\infty^{2 \cdot 1}$ $\mathfrak{Y}$-Geraden[1] vereinigt liegt, so bilden die daraus abzuleitenden $\infty^{2 \cdot 2}$ Blätter $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ einen Verein, der »orientierte Kugel« genannt werden soll.

Hieraus folgt erstens, daß aus jeder orientierten Kugel durch jede Transformation der Gruppe G_{15}, H_{15} wieder eine solche hervorgeht. Zweitens ergibt sich, daß zwei Arten orientierte Kugeln vorhanden sind. Die einen, die regulär zu nennen sein werden, überlagern zu zweien eine nicht-orientierte Kugel. Die der anderen Art, die wir singulär nennen werden, sind nichts anderes als die Punkte von $\mathfrak{M}_3^2$, wenn diese ebenfalls als Örter (Vereine) von $\infty^{2 \cdot 2}$ Blättern betrachtet werden. Man kann nämlich jedem Punkt z alle $\infty^{2 \cdot 2}$ Blätter zuordnen, die, wenn sie regulär sind, ihren eigenen Punkt in z haben, oder, wenn sie singulär sind, einen ihrer Punkte. Drittens sieht man, daß die Vereine der zweiten Art Grenzfälle sind von denen der ersten und in ihrer Gesamtheit die zur doppelten Überdeckung der regulären Kugeln gehörige Verzweigungsmannigfaltigkeit bilden. Viertens folgt, daß nicht nur mit den regulären orientierten Kugeln Mannigfaltigkeiten von $\infty^{2 \cdot 2}$ Punkten verbunden sind, eben die zugehörigen nicht-orientierten Kugeln, sondern auch mit den singulären: die Nullkugeln. Jedes singuläre Blatt einer singulären Kugel hat ja $\infty^{2 \cdot 1}$ Punkte, und diese bilden in ihrer Gesamtheit einen Kegel, die zugehörige Nullkugel.

Es empfiehlt sich unter diesen Umständen, neben dem Wort Nullkugel noch den Terminus Punktkugel einzuführen. Das Wort Punktkugel bedeutet dann genau dasselbe wie das Wort Punkt (auf $\mathfrak{M}_3^2$), sofern dieses letzte Wort

[1] Gemeint sind natürlich analytische Kontinua von $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden.

eben — wie es hier sachgemäß ist — zur Bezeichnung des zugehörigen Vereins von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern benutzt wird. Der Terminus Punktkugel bringt dann zum Ausdruck, daß der Punkt, als Verein, einen besonderen Fall der orientierten Kugel bedeutet. Als Nullkugel wird dann fernerhin (nur) der Verein von $\infty^{2\cdot 1}$ singulären Blättern zu bezeichnen sein, die Punkte im Punkt z haben; womit dann der sonst als Nullkugel bezeichnete Ort von $\infty^{2\cdot 2}$ Punkten verbunden ist.

Die Punktkugel hat also $\infty^{2\cdot 2}$ Blätter, wie eine reguläre Kugel, und auch diese Blätter bilden ein einziges analytisches Kontinuum, in dem aber zugleich mit jedem Blatt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ auch das umgekehrte Blatt $(\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X})$ vorkommt. Sie unterscheidet sich dadurch von der regulären orientierten Kugel. Als Verzweigungsmannigfaltigkeit fungieren dann in dieser Figur die $\infty^{2\cdot 1}$ singulären Blätter der zugehörigen Nullkugel. Auch dadurch schon ist die Punktkugel von der regulären orientierten Kugel unterschieden, daß sie singuläre Blätter enthält. Die Bedingung für das Vorliegen einer Punktkugel ist offenbar

$$(28)\qquad \mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 - \mathfrak{z}_4^2 + \mathfrak{z}_5^2 = 0\,.$$

Und ebenso offenbar gilt der Satz:

Jede orientierte Kugel hat zum Bilde eine Gerade des Raumes R_3, und umgekehrt entspricht jeder dieser Geraden eine orientierte Kugel.

Den Punktkugeln oder Punkten entsprechen die Geraden im Hauptkomplex.

Wir gelangen also hier nochmals zu der Zuordnung, die wir bereits durch die Gleichungen (24) und (25) zum Ausdruck gebracht hatten.

Es bleiben noch den regulären orientierten Kugeln Koordinaten zuzuordnen. Diese ergeben sich aus der Bemerkung, daß das Flach (27) durch zwei Räume $\mathfrak{R}_4'$, $\mathfrak{R}_4''$ ausgeschnitten wird, die M_4^2 berühren. Die Berührungspunkte erhalten wir ohne weiteres durch Ausziehen einer Quadratwurzel,

$$(29)\qquad \boxed{\mathfrak{z}_0 = \sqrt{\mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 - \mathfrak{z}_4^2 + \mathfrak{z}_5^2}\,.}$$

Die hiermit erklärten Verhältnisgrößen

$$(30)\qquad \mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3 : \mathfrak{z}_4 : \mathfrak{z}_5$$

betrachten wir allgemein als Koordinaten einer orientierten Kugel.

Tatsächlich können wir mit ihrer Hilfe die beiden übereinander liegenden orientierten Kugeln unterscheiden. Wir kennen nämlich auf Grund der Gleichungen (6), oder also auf Grund der Gleichungen

$$(31)\qquad \boxed{\begin{array}{lll} 2Z_{01} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1\,, & 2Z_{02} = \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3\,, & 2Z_{03} = \mathfrak{z}_4 + \mathfrak{z}_5\,, \\ 2Z_{23} = \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_1\,, & 2Z_{31} = \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3\,, & 2Z_{12} = \mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_5 \end{array}}$$

bereits das Bild des Punktes $\mathfrak{z}$ des Raumes R_5. Ferner sind bekannt die Bedingungen dafür, daß ein Punkt ξ oder eine Ebene ϕ mit der Geraden Z ver-

einigt liegt. Damit haben wir aber auch die Bedingungen dafür, daß eine gegebene Gerade auf M_3^2 als $\mathfrak{X}$- oder $\mathfrak{Y}$-Gerade der orientierten Kugel $\mathfrak{z}$ angehört: *Wir haben die zwei Geradenscharen auf einer zuerst nichtorientierten Kugel durch Bestimmung der Wurzelgröße* $\mathfrak{z}_0$ *getrennt.*

Wir sagen nunmehr, daß *zwei orientierte Kugeln einander berühren*, wenn sie ein Blatt miteinander gemein haben. Sagen wir entsprechend, daß *zwei Geraden im Bildraume einander berühren*, wenn sie, als Vereine von Facetten (ξ, ϕ) eine Facette miteinander gemein haben, wenn sie also einander schneiden, so folgt:

Orientierte Kugeln, die einander berühren, haben zu Bildern Geraden, die einander berühren (schneiden).

Die Bedingung für diese Lagenbeziehung orientierter Kugeln $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$ kennen wir schon. Sie besteht nämlich darin, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$ eine auf M_4^2 verlaufende Gerade $\mathfrak{Z}$ ist:

Die Bedingung für die Lagenbeziehung des letzten Satzes ist

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{z}_0'\mathfrak{z}_0'' - \mathfrak{z}_1'\mathfrak{z}_1'' + \mathfrak{z}_2'\mathfrak{z}_2'' - \mathfrak{z}_3'\mathfrak{z}_3'' + \mathfrak{z}_4'\mathfrak{z}_4'' - \mathfrak{z}_5'\mathfrak{z}_5'' \\ &= 2\left\{\begin{array}{l} Z_{01}'Z_{23}'' + Z_{02}'Z_{31}'' + Z_{03}'Z_{12}'' \\ + Z_{23}'Z_{01}'' + Z_{31}'Z_{02}'' + Z_{12}'Z_{03}'' \end{array}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Je zwei verschiedene einander berührende Kugeln berühren einander also in einem einzigen Blatt, und sie sind enthalten in einem durch sie bestimmten *Büschel orientierter Kugeln*, die einander paarweise berühren. Diese Büschel sind in $\infty^{2\cdot 5}$ Exemplaren vorhanden, wie die ebenen Büschel von Geraden im R_3, die ihre Bilder sind. Sie liegen aber, wie die zugehörigen $\infty^{2\cdot 5}$ Blätter, zu zweien übereinander, wobei wieder eine *Verzweigungsmannigfaltigkeit* auftritt, die den $\infty^{2\cdot 3}$ Facetten im Hauptkomplex entspricht. Jedes der zugehörigen *singulären* Büschel besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ Punktkugeln, und es hat zum Bilde ein ebenes Büschel im Hauptkomplex. Ferner ergibt sich noch (selbstverständlicherweise):

Damit zwei (oder mehr) orientierte Kugeln einander berühren, ist bereits hinreichend, daß sie eine $\mathfrak{X}$*-Gerade* **oder** *eine* $\mathfrak{Y}$*-Gerade miteinander gemein haben.*

Hiermit glaube ich die elementaren Tatsachen festgestellt zu haben, auf denen jede weitere Entwickelung der Kugelgeometrie beruhen muß. Hiervon, und besonders von dem allgemeinen *Begriff des Vereins von Blättern*, und von der Auffassung der Geraden-Kugeltransformation als einer Art von *Berührungstransformation*[1] soll in einem zweiten Aufsatz die Rede sein.

Zunächst aber werden wir gut tun, uns noch den großen Unterschied klarzumachen, der zwischen dem Begriff der Berührung orientierter Kugeln und dem Begriff der Berührung von Kugeln schlechthin besteht.

[1] Nicht genau nach den von Lie gegebenen Erklärungen.

Liegen zwei nicht orientierte Kugeln, d. h. Schnitte von M_3^2 mit linearen Räumen $\mathfrak{R}_3'$ und $\mathfrak{R}_3''$ vor, so haben wir zweierlei Büschel $\lambda' \mathfrak{u}' + \lambda'' \mathfrak{u}''$ und drei Arten der Berührung zu unterscheiden:

(a.) Die Schnittebene $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{u}''$ kann M_3^2 in einem Paar von verschiedenen Geraden treffen. *Das Büschel $\lambda \mathfrak{u}' + \lambda'' \mathfrak{u}''$ enthält dann zwei zusammenfallende Nullkugeln.* Die regulären Kugeln des Büschels können auf zwei Arten orientiert werden, und sie liefern so zwei analytisch nicht zusammenhängende übereinanderliegende Büschel orientierter Kugeln. *Beide Büschel enthalten, je einmal, dieselbe Nullkugel.* Es kann dann noch sein, daß (a_1) die gegebenen Kugeln beide regulär sind, oder daß (a_2) eine von ihnen die Nullkugel des Büschels ist. Im zweiten Fall liegt eine »*uneigentliche Berührung*« vor, die darin besteht, daß der Scheitel der Nullkugel auf der anderen Kugel enthalten ist.

(b.) Die unter (a) genannten Geraden fallen zusammen. *Dann besteht das ganze Büschel aus Nullkugeln, und je zwei von diesen berühren einander unendlich vielfach. Die zugehörigen Punktkugeln dagegen berühren einander nur einfach.* Eine Punktkugel ist nun dasselbe wie ein Punkt, als Verein von Blättern:

Wir sehen, daß zwei verschiedene Punkte des Kugelraumes einander berühren können. Sie tun es nämlich immer dann, wenn ihre Verbindungsgerade eine Nullgerade ist (auf M_3^2 liegt).

Hier zeigt sich also ein weiterer sehr wesentlicher Unterschied von Begriffen, die mit dem Wort Berührung verbunden werden. In der projektiven Geometrie können zwei verschiedene Punkte einander niemals berühren.

Die Bedingung dafür, daß zwei nicht-orientierte Kugeln einander berühren, kennen wir auch schon. Sie besteht darin, daß ihre Schnittebene die M_3^2 berührt. So kommen wir zu dem Satz:

Der algebraische Ausdruck, dessen Verschwinden die Berührung zweier Kugeln anzeigt, wird durch den Orientierungsprozeß in zwei Faktoren zerlegt.

In der Tat wird auf Grund unserer Festsetzungen

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{U}_{24}^2 + \mathfrak{U}_{35}^2 + \mathfrak{U}_{51}^2 + \mathfrak{U}_{13}^2 \\
& - \mathfrak{U}_{21}^2 - \mathfrak{U}_{23}^2 - \mathfrak{U}_{25}^2 - \mathfrak{U}_{41}^2 - \mathfrak{U}_{43}^2 - \mathfrak{U}_{45}^2 \\
= {} & \mathfrak{Z}_{24}^2 + \mathfrak{Z}_{35}^2 + \mathfrak{Z}_{51}^2 + \mathfrak{Z}_{13}^2 \\
& - \mathfrak{Z}_{21}^2 - \mathfrak{Z}_{23}^2 - \mathfrak{Z}_{25}^2 - \mathfrak{Z}_{41}^2 - \mathfrak{Z}_{43}^2 - \mathfrak{Z}_{45}^2 \\
= {} & \left\{ \mathfrak{z}_0' \mathfrak{z}_0'' - \mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1'' + \mathfrak{z}_2' \mathfrak{z}_2'' - \mathfrak{z}_3' \mathfrak{z}_3'' + \mathfrak{z}_4' \mathfrak{z}_4'' - \mathfrak{z}_5' \mathfrak{z}_5'' \right\} \\
& \cdot \left\{ \mathfrak{z}_0' \mathfrak{z}_0'' + \mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1'' - \mathfrak{z}_2' \mathfrak{z}_2'' + \mathfrak{z}_3' \mathfrak{z}_3'' - \mathfrak{z}_4' \mathfrak{z}_4'' + \mathfrak{z}_5' \mathfrak{z}_5'' \right\} \\
= {} & 2 \left\{ \begin{aligned} & Z_{01}' Z_{23}'' + Z_{02}' Z_{31}'' + Z_{03}' Z_{12}'' \\ & + Z_{23}' Z_{01}'' + Z_{31}' Z_{02}'' + Z_{12}' Z_{03}'' \end{aligned} \right\} \\
& \cdot 2 \left\{ \begin{aligned} & Z_{01}' Z_{01}'' - Z_{02}' Z_{31}'' - Z_{03}' Z_{12}'' \\ & + Z_{23}' Z_{23}'' - Z_{31}' Z_{02}'' - Z_{12}' Z_{03}'' \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

(vgl. Nr. 13b). Was das Verschwinden des zweiten dieser Faktoren zu bedeuten hat, liegt auf der Hand.

Schließlich mag noch auf folgenden Umstand aufmerksam gemacht werden:

Während von nicht-orientierten Kugeln bis zu fünf einander wechselweise so berühren können, daß keine zwei der zehn Berührungspunkte auf einer Nullgeraden liegen[1], müssen bei mehr als zwei orientierten Kugeln, die einander paarweise berühren, die Berührungspunkte immer auf derselben 𝔛-Geraden oder auf derselben 𝔜-Geraden enthalten sein, oder es muß beides zugleich eintreten.

Schon Tripel einander berührender Kugeln können daher nicht immer so orientiert werden, daß auch nach ihrer Orientierung noch Berührung stattfindet.

So einfach das zuletzt Vorgetragene auch ist, so haben doch andere Autoren, von S. Lie angefangen, auch in diesem Falle eine Verwirrung angerichtet, die nicht ohne Folgen bleiben konnte. Richtig hatte man erkannt, daß orientierten oder nicht-orientierten regulären Kugeln eine oder zwei Geraden im Bildraume entsprechen müssen. Diese Kugeln wurden aber nicht als Vereine von Blättern aufgefaßt (deren Begriff fehlte), sondern als Vereine von orientierten oder nicht-orientierten »Elementen«. Als solche sind nun die Nullkugeln in beiden Fällen reduzibele Figuren; die ihnen angeblich entsprechenden Geraden des Bildraumes müßten also ebenfalls in zwei Stücke zerfallen! Statt hieraus die Folgerung zu ziehen, daß irgend etwas in Unordnung war, hat man den Kegel, aus dem die Nullkugel besteht, fast ganz weggeworfen und lediglich seinen Scheitel auf der Bildfläche erscheinen lassen; was einem Taschenspielertrick wirklich sehr ähnlich sieht. Daß dieser Fehler solange nicht an den Tag kam, lag wohl zumeist an der Unvollständigkeit des algebraischen Apparats, die jede wirksame Kontrolle ausschloß. (Siehe z. B. Klein-Blaschke, §§ 70, 71.) Außerdem wäre noch zu bedenken gewesen, daß nach der elementaren Definition des Kugelbegriffs schon zwei beliebige Kugeln einander berühren, sogar mindestens doppelt, unter Umständen auch unendlich vielfach, und daß auch diese Art von Berührung nicht einfach hinweggezaubert werden darf.

Nicht besser steht es um ein anderes Verfahren, mit dem man diesem Stoff zu Leibe gegangen ist. (Siehe z. B. Klein-Blaschke, §§ 65, 66.) Auch in diesem Falle hat man das Pferd von hinten aufgezäumt. Der Keim eines brauchbaren Gedankens ist indessen auch diesmal vorhanden. Er kann etwa so gefaßt werden:

Statt zuerst die Mannigfaltigkeit M_4^2 mit einem linearen R_4 zum Schnitt zu bringen und dann durch Projektion der erhaltenen M_3^2 die Kugelgeometrie mit der Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Geometrie in Verbindung zu setzen, kann man, ohne Änderung des Ergebnisses, die Reihenfolge der Operationen des Schneidens und Projizierens auch umkehren.

Man gelangt auf diese Art zuerst zu einem Möbiusschen Punktkontinuum $\mathfrak{M}_4^2$, mit einer Gruppe G'_{15}, H'_{15} konformer Transformationen[2], und dann zum Kugelraum, der ebenfalls als Möbiussches Kontinuum $\mathfrak{M}_3^2$ zu fassen ist. Z. B. hat die Euklidische Geometrie darin ebensogut Platz wie innerhalb der projektiven Geometrie. Nur ergeben sich da Unterschiede, die eben aus der verschiedenen Ergänzung der »eigentlichen Punkte« zu je einem abgeschlossenen Kontinuum entspringen. Z. B. ist eine Ebene in $\mathfrak{M}_3^2$ etwas ganz anderes als eine Ebene im projektiven Kontinuum R_3, wiewohl beide Begriffe im Gebiet der eigentlichen Punkte einander vollkommen decken. Diese Figuren sind schon topologisch verschieden: Als Punktörter haben nicht-isotrope Ebenen der Kugelgeometrie denselben Zusammenhang wie reguläre Kugeln, isotrope Ebenen denselben Zusammenhang wie Nullkugeln. (Die zugehörigen Vereine von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern haben jedoch denselben Zusammenhang, den einer regulären Kugel.) Das Chaslessche Abbildungsverfahren (die »isotrope Projektion«), das nach üblicher Darstellung eine Kugel (x, y, z, r) »des Raumes« (R_3) aus einem Punkte (x, y, z, ir) des Raumes R_4 ableitet, leistet nur für Bruchstücke der Kontinua $\mathfrak{M}_4^2$ und $\mathfrak{M}_3^4$ das, was es soll. Z. B. können Ebenen nicht mit Hilfe ihrer »Radien« orientiert werden.

[1] Die entsprechenden 2.5 Geraden im R_3 bilden eine »Doppelfünf« mit einer Kollineationsgruppe vom Ikosaedertypus.

[2] Math. Zeitschrift, Bände 18, 21, 1923—1924. Journal für Mathematik, Bd. 157, 1926, S. 35—39.

Zusatz zu der vorausgehenden Abhandlung

von E. A. WEISS in Bonn.

In seiner Abhandlung hat Hr. E. STUDY die Elemente orthogonaler Matrizen zu Parameterdarstellungen in der Theorie der Geraden-Kugeltransformation verwandt. Im folgenden soll auf eine Anwendung der STUDYschen Formeln in der Theorie der zweifach-unendlichen Thetareihen hingewiesen werden.

Wir benutzen die WEBERsche Bezeichnung, nennen die ungeraden Thetacharakteristiken in deren sogenannter natürlicher Reihenfolge [3], [4], [0], [5], [1], [2] und setzen $\vartheta[ikl]((u))$, $\vartheta(ik)((u))$ für Thetafunktionen mit den zu $[ikl]$ und (ik) gehörigen Normalcharakteristiken. Es sei: $[ikl] = \vartheta[ikl]((0))$. Die Funktionen Θ seien Thetafunktionen mit doppelten Moduln.

Im Anschluß an eine Arbeit von CASPARY[1] über die Darstellung orthogonaler Matrizen mittels Thetafunktionen setzen wir jetzt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi_0 &= \Theta[024]((u+v)). & \varphi_0 &= \Theta[024]((u-v)). \\ \xi_1 &= \Theta[023]((u+v)). & \varphi_1 &= \Theta[023]((u-v)). \\ \xi_2 &= \Theta[013]((u+v)). & \varphi_2 &= \Theta[013]((u-v)). \\ \xi_3 &= \Theta[014]((u+v)). & \varphi_3 &= \Theta[014]((u-v)). \end{aligned}$$

Diese Formeln sind Parameterdarstellungen einer KUMMERschen Fläche als Ort von Punkten ξ und Ebenen φ. Bildet man nun mit STUDY die Elemente der entsprechenden[2] orthogonalen Matrix und geht man in den CASPARYschen Formeln (5) von der WEIERSTRASSschen zur WEBERschen Bezeichnung über, so erhält man das Resultat:

I. Die Gleichungen:

(2)

*	$\mathfrak{Z}_{24} = -(24) = -\mathfrak{U}_{24}$	$\mathfrak{Z}_{40} = -(40) = -\mathfrak{U}_{40}$	$\mathfrak{Z}_{02} = -(02) = -\mathfrak{U}_{02}$
$-\mathfrak{Z}_{35} = +(35) = \mathfrak{U}_{35}$	$\mathfrak{Z}_{01} = +(01) = \mathfrak{U}_{01}$	$\mathfrak{Z}_{21} = +(21) = \mathfrak{U}_{21}$	$\mathfrak{Z}_{41} = -(41) = \mathfrak{U}_{41}$
$-\mathfrak{Z}_{51} = +(51) = \mathfrak{U}_{51}$	$\mathfrak{Z}_{03} = -(03) = \mathfrak{U}_{03}$	$\mathfrak{Z}_{23} = +(23) = \mathfrak{U}_{23}$	$\mathfrak{Z}_{43} = +(43) = \mathfrak{U}_{43}$
$-\mathfrak{Z}_{13} = +(13) = \mathfrak{U}_{13}$	$\mathfrak{Z}_{05} = +(05) = \mathfrak{U}_{05}$	$\mathfrak{Z}_{25} = -(25) = \mathfrak{U}_{25}$	$\mathfrak{Z}_{45} = +(45) = \mathfrak{U}_{45}$

in welchen zur Abkürzung:

$$(3)\qquad \vartheta(ik)((u))\cdot\vartheta(ik)((v)) = (ik)$$

gesetzt ist, geben unter der Voraussetzung:

$$(*)\qquad \vartheta(0)((u))\cdot\vartheta(0)((v)) = 0$$

eine Parameterdarstellung der $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden $\mathfrak{Z}$ und ihrer Polarräume $\mathfrak{U}$ auf M_4^2, welche den Facetten der KUMMERschen Fläche (1) entsprechen. Verschwin-

[1] F. CASPARY, Zur Theorie der Thetafunktionen mit zwei Veränderlichen. CRELLES Journal Bd. 94 (1883).

[2] E. STUDY, Vereinfachte Begründung von S. LIES Kugelgeometrie. I. Formeln (8) und (10).

den in (*) beide Faktoren gleichzeitig, so berührt die Ebene der Facette die KUMMERsche Fläche im Punkte der Facette.

Für $((v)) = ((0))$ folgt[1] aus (2):

II. Die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}(4,\text{l.}) & \mathfrak{X}_{ikl} = (+1)^{i+k+l} \cdot [ikl] \cdot \vartheta[ikl]((2\xi)),\\ (4,\text{r.}) & \mathfrak{Y}_{ikl} = (-1)^{i+k+l} \cdot [ikl] \cdot \vartheta[ikl]((2\phi)),\end{array}$$

in denen i, k, l drei der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 in der natürlichen Reihenfolge bezeichnen, geben eine Parameterdarstellung der Ebenen E_ξ und E_ϕ, die den Punkten $\Theta((2\xi))$ und Ebenen $\Theta((2\phi))$ der KUMMERschen Fläche (1) entsprechen.

Bringen wir diese Ebenen mit dem Raume $\mathfrak{z}_0 = 0$ zum Schnitt, so erhalten wir ihre Spuren $\mathfrak{X}_{kl}$ und $\mathfrak{Y}_{kl}$ auf M_3^2, die Bildgeraden der Facetten der KUMMERschen Fläche, die ihrem Fundamentalkomplex, dem Hauptkomplex $Z_{01} + Z_{23} = 0$ angehören:

III. Die Gleichungen[2]:

$$\begin{array}{ll}(5,\text{l.}) & \mathfrak{X}_{kl} = (+1)^{k+l} \cdot [0kl] \cdot \vartheta[0kl]((2\xi)),\\ (5,\text{r.}) & \mathfrak{Y}_{kl} = (-1)^{k+l} \cdot [0kl] \cdot \vartheta[0kl]((2\phi)),\end{array} \qquad \text{(A.)}$$

in denen k, l zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in der natürlichen Reihenfolge bezeichnen, geben eine Parameterdarstellung der Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf M_3^2, die den Punkten $\Theta((2\xi))$ und Ebenen $\Theta((2\phi))$ der KUMMERschen Fläche entsprechen.

Zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ schneiden sich, wenn

$$(6) \qquad \vartheta(0)((\xi+\phi)) \cdot \vartheta(0)((\xi-\phi)) = 0.$$

In diesem Falle gibt (2), falls sich die Geraden nicht überdecken, für:

$$(7) \qquad u = \xi + \phi, \qquad v = \xi - \phi$$

ihre Verbindungsebene[3] (B.)	ihren Schnittpunkt[4]:
(8) $\mathfrak{U}_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$.	$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{Z}_{0i}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Verschwinden in (6) beide Faktoren gleichzeitig, so gibt (8):

das Bildblatt einer Tangentialfacette der KUMMERschen Fläche. (C.)	den Bildpunkt einer zum Hauptkomplex gehörigen Doppeltangente der KUMMERschen Fläche. (D.)

Die Spiegelung am Hauptkomplex wird durch die Gleichung:

$$(9) \qquad \xi + \phi = [0]$$

[1] CASPARY, S. 78. STUDY, Formeln (3).
[2] STUDY, Formeln (14).
[3] STUDY, Formeln (16).
[4] Formeln (15).

vermittelt, wenn [o] das Paar halber Perioden mit dieser Charakteristik bezeichnet.

Zwei Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ überdecken sich unter der Voraussetzung (9). In diesem Falle enthält das singuläre Blatt $\mathfrak{U}_{ik}$ die doppeltzählende Gerade $\mathfrak{Z}_{ik}$. Soll die zugehörige Facette eine Tangentialfacette der KUMMERschen Fläche sein, wird also neben dem Bestehen der Gleichung (9) das gleichzeitige Verschwinden der beiden Faktoren (6) gefordert, so folgt:

$$(10) \qquad \vartheta[o]((2\xi)) = 0, \qquad \vartheta[o]((2\phi)) = 0. \qquad (E.)$$

Diese Facetten gehören dem ausgezeichneten Schmiegungsstreifen der Fläche im Hauptkomplex an. Insbesondere können dabei ϕ und ξ Paaren halber Perioden gleich sein, die sich zum Paare mit der Charakteristik [o] ergänzen. Dies vorausgesetzt gibt (2) die Koordinaten:

der 16 singulären Blätter $\mathfrak{U}_{ik}$ $(i, k = 1 \cdots 5)$, die den singulären Facetten der KUMMERschen Fläche im Hauptkomplex entsprechen. (G.)

der 16 Geraden $\mathfrak{Z}_{ik}$ $(i, k = 1 \cdots 5)$, die den singulären Büscheln der quadratischen Kongruenz [o] entsprechen.

Gebrauchen wir für die Bild-M_2^4 dieser Kongruenz den Namen Zyklide, so können wir sagen:

IV. Die angeführten Gleichungen geben Parameterdarstellungen der Zyklide als Ort ihrer Nulltangenten (A.), Blätter (B.), Tangentialblätter (C.) und Punkte (D.). (E.) gibt die ausgezeichnete Krümmungslinie der Zyklide. (F.) und (G.) geben die 16 Geraden der Zyklide mit den zugehörigen singulären Blättern.

Die regulären und singulären Schmiegungsstreifen der KUMMERschen Fläche (Asymptotenlinien als Örter von Facetten, singuläre Ebenen mit ihren Punkten, singuläre Punkte mit ihren Ebenen) können in der üblichen Weise[1] bestimmt werden. Auf die in IV angedeutete Abbildung braucht nicht weiter eingegangen zu werden[2]. Es kam mir darauf an, zu zeigen, wie die Systeme von Thetafunktionen (2), (4), (5) (nicht nur, wie bisher, Teile von ihnen) als Koordinaten geometrischer Figuren im Zusammenhang mit der Theorie der KUMMERschen Fläche gedeutet werden können.

---

[1] Vgl. z. B. HUDSON, Kummer's Quartic Surface (1905) S. 194. Der Gedanke stammt bekanntlich von F. KLEIN.

[2] Vgl. z. B. P. DOMSCH. Diss. Leipzig 1885.

Die Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen.

Von Max Rubner.

(Vorgetragen am 11. Februar 1926 [s. oben S. 38].)

I.

Ziele und Aufgaben.

Vor einigen Jahren habe ich über den Nahrungsverbrauch einiger Nationen als Ganzes genommen berichtet und auf die weitgehende Übereinstimmung des Nahrungsverbrauchs im allgemeinen und des Eiweißverbrauchs im besonderen hingewiesen, der trotz der Verschiedenheit der Nahrungsmittel einzelner Völker und dem wechselnden Anteil animalischer und vegetabilischer Nahrungsquellen besteht. Völker als Ganzes beherrscht die Einheitlichkeit des Nahrungsbedarfes; in schroffem Gegensatz dazu steht die Ernährung der einzelnen Menschen. Die Nahrung ist ein Widerspiel der wechselnden Lebensbedingungen. Ohne Nahrung kein normaler Verlauf der Funktionen. Und da, wo die Nahrung nicht reicht, schießt vorübergehend unser eigener Körper zu, wie er andererseits beim Überschuß dem Körper dienende Stoffe zurückhält und aufspeichert. So laufen Leistungen des Organismus und ihre Befriedigung nebeneinander her, ohne sich in jeder kurzen Spanne Zeit zu decken.

Bei der Fülle der wechselnden Bedürfnisse des Lebens scheint es unfaßlich, dauernde Richtlinien zu finden. Die Leistungen der Organe jedes einzelnen sind teils selbstgewollte, willkürliche oder von der Umwelt erzwungene oder aus dem Wechsel der Körpereigenschaften heraus sich entwickelnde. Unser Wille zu Leistungen erscheint keineswegs frei, sondern abhängig von psychischen Einflüssen. Seelenzustände und Nahrungslust stehen in engster Beziehung zueinander: depressorische Zustände und Zustände freudiger Erregung wechseln miteinander ab; die Konstitution selbst wird zu einem Faktor verschiedener Leistungslust und Leistungsfähigkeit. Irgendein Alter umfassen Triebe von verschiedenster Kraft; klimatische Einflüsse, zum Teil noch unerforscht, greifen in das Tätigkeitsfeld des Normalen in mächtiger Weise ein; der Beruf ist ein Zwang der Betätigung, den uns das Leben auferlegt. Trotz dieser unendlichen Schwankungsbreite individueller Verhältnisse tritt uns, rein praktisch betrachtet, doch die Möglichkeit ent-

gegen, wenigstens berufsmäßig geordnete Leistungen in Gruppen zusammenzufassen. Geleitet von hygienischen und sozialen Erwägungen heraus, hat man schon vor Jahrzehnten Erhebungen über den Nahrungsbedarf aus dem rein quantitativen Bedürfnis der öffentlichen Nahrungsversorgung heraus gemacht und damit wichtige praktische Dienste geleistet. Die Säuglingsernährung, Soldatenernährung, Krankenernährung, Ernährung einiger Berufsklassen sind so festgestellt worden. Aber wenn man die verschiedenen Möglichkeiten des praktischen Lebens bedenkt, so sind dies sozusagen erst Stichproben, und es wird Aufgabe späterer Forschung sein, die bestehenden Lücken auszufüllen.

Die Art der Untersuchung verfolgt im allgemeinen den Weg, durch länger fortgesetzte Erhebung der verzehrten Nahrungsmittel, bei gleichbleibendem Gewicht der Personen, den wirklichen Bedarf festzustellen.

Für die Physiologie liegt die Aufgabe nicht nur in einer lückenlosen Kenntnis der Varianten des Alltagslebens. Die Befriedigung dieser Bedürfnisse durch das Studium der Individualernährung kann aber vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus gewertet werden und zu einer Reihe wichtiger Ergebnisse führen.

Doch ist auch die soziale Seite des Problems beachtenswert und einiges Wichtige soll in dem folgenden mit einbegriffen werden, um so lieber, als ja in diesem Jahrzehnt Fragen mit sozialem Inhalt mehr in dem öffentlichen Gedankengang Platz gegriffen haben, was bei dem Zusammenhang zwischen Ernährung und Volkskrankheiten durch die Wirkungen der Blockade noch in lebhafter Erinnerung sein dürfte.

Den Verlauf des Ernährungsprozesses sieht man gemeinhin als einen Akt der Zufuhr von Energie und von Stoffen, die zum Leben unentbehrlich sind, an. Man begnügt sich mit der Feststellung einer geordneten Bilanz, d. i. dem Gleichgewicht zwischen Ein- und Ausfuhr, als Voraussetzung eines normalen Ernährungszustandes, wenigstens bei den Erwachsenen. Das Zustandekommen der Bilanz beruht, wie man annimmt, auf der Befriedigung der Bedürfnisse der Gesamtmasse der Zellen. Eine nähere Überlegung gibt uns aber das Mittel an die Hand, ohne Vernachlässigung des quantitativen Elementes den inneren Vorgängen der Ernährung näherzukommen. Dieser Versuch ist von großer Bedeutung für theoretische Fragen wie auch für praktische Betrachtungen. Wenn wir den Ernährungsprozeß als etwas Einheitliches, d. h. die Summe der Zellarbeit, auffassen, gehen wir an wichtigen Tatsachen vorbei. Der Ernährungsprozeß läßt sich in einzelne Faktoren zerlegen. Darunter meine ich aber nicht generell eine Analyse der Vorgänge, die sich auf die einzelnen Organe und ihre Mitwirkung erstreckt, als vielmehr koordinierte Vorgänge und die Arbeit von Gruppierungen von Organen. Man kennt sie schon lange, ohne daß man entweder daran gedacht hat, sie in ihrer Bedeutung zu verfolgen und auszunutzen oder sich bemüht hat, die Gruppen von Leistungen in ihren gegenseitigen Beziehungen erst einmal festzulegen.

Vielleicht spricht man am besten von Teilfaktoren des Stoffwechsels. Wir haben sie zunächst abzugrenzen und sie auf Selbständigkeit und Bedeutung zu untersuchen.



II.

Der Stoffwechsel und seine Teilfaktoren.

Man kann diese Teilprozesse ohne weiteres in zwei Unterabteilungen zerlegen:

a) in Prozesse, bei denen ein Gleichgewicht der Aufnahmen und Ausgaben besteht;

b) in Prozesse, bei denen entweder eine Mehrung oder Minderung der Körpermaße gegeben ist.

Von den Prozessen unter b hat das Wachstum die größte Bedeutung: es hängt namentlich in seinem Organaufbau und dem Verbrauch N-haltigen Materials von bestimmten angeborenen Eigenschaften ab, die mit der Zunahme der Körpermaße sich im Verlauf der Entwicklung eines Individiums von selbst ändern. Bei dem Wiederaufbau der Organe nach einem vorhergegangenen Verfall (Hunger) wird Größe des Bedarfs und Nutzeffekt des Aufbaues auch durch besondere Eigenschaften der Gewebe bedingt. Jede Zelle hat ein Optimum ihres Materialbestandes; je weiter sie von diesem entfernt ist, um so lebhafter strebt sie der Regeneration und dem Wiederaufbau zu, und mit um so größerem Nutzeffekt wertet sie die Nahrung (N-haltige Stoffe) aus.

Über Wachstum und Wiederersatz habe ich zahlreiche Mitteilungen an anderer Stelle gemacht, es erübrigt sich, hier weiter darauf einzugehen. Von dem Verlust an Körperstoffen (Hunger) ist auch bekannt, daß Nahrungsmangel die Vorratsstoffe (Glykogen, Fett) und die bestehende Masse der echten Zellteile (Eiweißstoffe) angreift.

Als einen dritten Vorgang haben wir das dauernde Zugrundegehen eines Teiles der Zellmasse zu betrachten und deren Wiederersetzung (Abnutzungsquote), ein Prozeß, der quantitativ nicht sehr in die Wagschale fällt, aber von höchster physiologischer Bedeutung ist.

Wachstum, Regeneration, Wiederersatz der Abnutzungsquote sind alles Prozesse, welche auf Zelleigenschaften beruhen; sie verlaufen auch nebeneinander unabhängig und die Nahrung kann sie wohl befriedigen, nicht aber die optimale Größe verändern. Das Hauptinteresse nehmen aber jene Prozesse in Anspruch, die im Gleichgewichtszustand ablaufen (oder unter Umständen durch Abgabe von Stoffen vom Körper unterhalten werden), also der sogenannte Betriebsstoffwechsel.

Der Stoffverbrauch unter diesen Umständen kann bedingt sein:

a) durch die chemische Wärmeregulation. Sie wurde zuerst von Pflüger und C. Voit als solche nachgewiesen, indes meine Untersuchungen erst die Grenzen des Umfangs, der Abhängigkeit dieser Grenzen von der körperlichen Beschaffenheit (Fettreichtum, Haarbekleidung bei Tieren) gezeigt haben. Sie kann ein gewaltig wirkender Faktor des Stoffwechsels sein, der letzteren nicht minder erhöht wie körperliche Arbeit. Wie wir heute wissen, liegen

[1] Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1885 S. 453 u. Rubners Gesetze des Energieverbrauchs 1902 S. 70.

für die Regulation bestimmte Zentren im Gehirn und Rückenmark vor. Die gesteigerte Verbrennung wird sich nicht auf die Mitarbeit des Muskelsystems allein zurückführen lassen. Auch der Mensch verfügt über diese Regulationsform, wenn auch dieselbe durch reiches Fettpolster und auskömmliche Bekleidung zumeist sehr eingeschränkt wird.

Es ist schwer begreiflich, wie auch heute noch immer, wenn auch selten in der Literatur dem Gedanken Ausdruck gegeben wird, daß eine so fein abgestufte regulatorische Einrichtung nicht bestehe, während doch der experimentelle Beweis dafür so höchst einfach ist.

b) Ein zweiter Stoffwechselfaktor ist die spezifisch dynamische Wirkung der Nährstoffe, die ich zuerst nachgewiesen und in ihrem vollen Umfang festgestellt habe.

Sie besteht darin, daß die Hauptnährstoffe eine Steigerung der Wärmebildung hervorrufen können, die bei Eiweißstoffen (auch bei Leim) außerordentlich groß ist. Neben ihr verschwinden die ähnlichen Wirkungen von Fetten oder Kohlehydraten fast ganz. Ich habe das angesehen als einen Vorgang der Umwandlung der Nährstoffe und ihren Übergang in geeignete Zellnahrung. Wärme hat keinen Wert zur Erhaltung des Lebensprozesses der Zelle. Es muß die Nahrung erst eine Umformung erreichen, ehe sie die Zelle verwerten kann, wobei Umlagerungen mit Energieverlust eintreten müssen; dieser Energieanteil geht verloren. In Vorgängen dieser Art habe ich hauptsächlich den Grund der spezifisch dynamischen Wirkung vermutet. Umfangreich sind Umformungen bei den Eiweißstoffen.

Auch bei Fetten und Kohlehydraten mögen Verluste eintreten, bis das Material der Zelle als Nahrung dienen kann. Man hat außerordentlich viele Versuche angestellt, die eine andere Erklärung der spezifisch dynamischen Wirkung zu ermöglichen schienen, ist aber in neuerer Zeit meiner ersten Anschauung offenbar nähergekommen.

c) Am bekanntesten ist als besonderer Stoffwechselfaktor die Leistung der willkürlichen Muskeln, worüber wohl nichts weiter anzufügen ist.

d) Der Zustand in dem keinerlei willkürliche Bewegungen gemacht werden, praktisch die Nachtruhe, zeigt den letzten Faktor, der den Umsatz irgendeines Ernährungsvorganges ergänzt. Den Zustand absoluter Ruhe, den ich bei Tierversuchen durch Dressur erreichen konnte, habe ich seinerzeit Energieminimum genannt, falls auch jede chemische Wärmeregulation ausgeschlossen war. Beim Menschen geht man nicht von längeren Ruheversuchen oder vom Schlaf aus, sondern bestimmt den Energieverbrauch bei kurzdauernder möglichster Ruhe, und dafür hat man einen neuen Namen, Basalstoffwechsel, gewählt.

Die in dem letzten Jahrzehnt fast allgemeine Annahme eines schwankungslosen Basalstoffwechsels beruht auf einer Verkennung wichtiger Tatsachen. Abgesehen von der erst in neuester Zeit nachgewiesenen verschiedenen Einstellung im Sommer und Winter, übt auf den Basalstoffwechsel die verschiedene Größe des Eiweißumsatzes, gleichgültig, ob er durch die Nahrung oder durch Zerfall von körpereigenem Eiweiß bedingt ist, eine der spezifisch

[1] Ges. d. Energieverbr. S. 395 u. 377.

dynamischen Wirkung entsprechende Rückwirkung aus (l. Rubner, Ges. d. Energieverbr. S. 373). Die üblich angewandte Verlegung einer Mahlzeit geraume Zeit vor die Bestimmung des Basalstoffwechsels allein genügt nicht für zuverlässige Resultate, noch weniger die bloße respiratorische Bestimmung ohne Kenntnis des Eiweißstoffwechsels. Nur für die Fälle gemischter Kost mit wenig Eiweiß oder ohne »starken Eiweißverlust« vom Körper mag man als Durchschnittswerte des Basalstoffwechsels anwenden. Die Beteiligung von Organen ist bei den einzelnen Teilfaktoren sicher eine verschiedene, und außerdem bedingen diese verschiedenen Tätigkeiten Änderungen in dem Blutkreislauf und der Blutversorgung, weshalb man durchaus berechtigt ist, die Frage aufzuwerfen, ob und inwieweit die gleichzeitige Wirkung mehrerer Teilfaktoren nicht eine gegenseitige Beeinflussung zur Folge hat. Über diese Verhältnisse habe ich eingehende experimentelle Untersuchungen schon vor vielen Jahren angestellt[1], noch ehe die Verwertung dieser Ergebnisse für allgemeine Stoffwechselfragen in Betracht kam.

Am eingehendsten ist von mir seinerzeit die chemische Wärmeregulation untersucht worden. Sie zeigt eine ausgesprochene Kompensierbarkeit mit allen Prozessen, welche die Wärmeerzeugung eines Organismus ändern. So schaltet z. B. die spezifisch dynamische Wirkung die Tätigkeit der Wärmeregulation genau in wärmeäquivalenten Größen aus.

Für die bei Arbeitsleistung erzeugte Wärme liegt nur ein Versuch vor, der die Ausschaltung eines entsprechenden Anteils der wärmeregulatorischen Tätigkeit experimentell nachweist. Ich glaube aber, es kann wohl die tägliche Erfahrung keinen Zweifel zulassen, daß wir hier kompensierende Wirkungen anzunehmen haben.

Die Einsparung regulatorischer Wärmeproduktion ist für die Tiere im Kampfe mit der Kälte von enormer Bedeutung, da sie jede Vergeudung an Energie[2] auszuschließen in der Lage sind. Der Nutzeffekt einer Muskelleistung kann auf diese Weise fast auf die äußere Arbeit allein beschränkt werden. Das bedeutet eine Einrichtung von enormer Tragweite für die Verbreitungsmöglichkeit der Tiere vor allem in polarem Klima. Die Frage nach dem Nutzeffekt der tierischen Arbeitsleistung ist also hier ganz anders zu beurteilen: der wärmeregulatorisch eingerichtete Organismus ist eine Maschine, welche alle »Abfallwärme« quantitativ für ihre Zwecke ausnutzt. Die chemische Wärmeregulation kann aber durch Erhöhung der Wärme der Umgebung vollkommen ausgeschaltet werden. Es bleiben dann als Teilfaktoren nur noch Basalstoffwechsel, spezifisch dynamische Wirkung und willkürliche Muskeltätigkeit übrig. In den meisten Fällen, und in unseren Klimaten vor allem, wird man bei mittleren Temperaturen der Umgebung des Menschen bei letzterem die Ausschaltung der chemischen Wärmeregulation annehmen können. In Einzelfällen wäre wohl immer zu erwägen, ob diese Ausnahme des Fehlens der chemischen Wärmeregulation auch zutrifft. Die vollkommene Beiseitelassung der Beachtung der chemischen Wärmeregulation, wie es heute sooft geschieht, ist nicht zu billigen.

[1] Sitzungsber. d. phys.-math. Klasse 1910, S. 316. [2] Ges. d. Energieverbrauchs S. 152 ff.

Der Arbeitsstoffwechsel, d. h. die Wärmebildung bei der Muskeltätigkeit scheint den Basalstoffwechsel oder Ruhestoffwechsel selbst unberührt zu lassen. Dies ist eine höchst merkwürdige Tatsache, denn auch im Basalstoffwechsel rührt ein großer Teil der Wärmeerzeugung aus den Muskeln her. Also haben wir in demselben Organ und in den nämlichen Zellen zwei Lebensprozesse nebeneinander: einen Ruhestoffwechsel, auch wenn andere Teile der Zelle, auf das Zehnfache des Ruhestoffwechsels sich steigernd, Arbeit leisten. Den Beweis für das Gleichbleiben des Basalstoffwechsels neben dem Arbeitsstoffwechsel glaubt man damit zu erbringen, daß bei einer Variation der Arbeitsleistung der auf letztere treffende Stoffumsatz der Arbeit proportional sich zeigt, wenn man eine gleichbleibende Größe des Basalstoffwechsels in allen Versuchen zum Abzug bringt. Der Ruhestoffwechsel hat andere Eigenschaften wie der Arbeitsstoffwechsel. Ich habe schon an anderer Stelle einmal aufmerksam gemacht, daß der gesamte Eiweißstoffwechsel im Gebiet des Basalstoffwechsels verläuft[1] und da in manchen Fällen bis 80% und mehr des Basalstoffwechsels vom Eiweiß gedeckt werden, die Muskeln aber bis 50% der Körpermasse ausmachen, muß doch sicher im Ruhestoffwechsel der Muskeln auch Eiweiß verbraucht werden, während dies bei der Arbeit nur ausnahmsweise geschieht. Die spezifisch dynamische Wirkung ist ein Vorgang, der nur mit Veränderungen der Nahrungsstoffe, nach meinen Untersuchungen, zusammenhängt. Es ändern sich wohl bei Nahrungsaufnahme die Gesamtsumme der verausgabten Kalorien, nicht aber die Prozesse, die während des Energieminimums (Basalstoffwechsel) im Körper ablaufen. Eingehende Versuche habe ich auch hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Stoffwechselvorgängen bei Arbeit unter gleichzeitiger Änderung der Nährstoffe ausgeführt und vor Jahren mitgeteilt[2]. Sie sind in der Literatur wenig bekannt geworden, obschon sie zur Beurteilung vieler Fragen von Wichtigkeit sind. Es hat sich gezeigt, daß spezifisch dynamische Wirkung und Chemismus bei Arbeitsleistung zwei von einander völlig unabhängige Prozesse sind. Weiter habe ich nachgewiesen, daß in Mischungen von Eiweiß und Fett oder Kohlehydraten die einzelnen spezifisch dynamischen Wirkungen sich nicht gegenseitig beeinflussen[3].

Nehmen wir an, daß in einem gegebenen Falle ein Individium im Gebiet der physikalischen Wärmeregulation sich befinde, was bei praktischer Beobachtung in unseren klimatischen Verhältnissen zumeist der Fall sein wird, so ist die Summe der entwickelten Gesamtkalorien abhängig:

a) vom Energieminimum,
b) von der spezifisch dynamischen Wirkung der zugeführten Nahrung,
c) von der willkürlichen Muskeltätigkeit.

Allerdings muß man, wie es nach neueren Untersuchungen erscheint, damit rechnen, daß der Basalstoffwechsel in der Sommerperiode etwas niedriger ist wie im Winter. Bei allen bisherigen Erhebungen über den Nahrungsverbrauch bei verschiedenen Berufen haben wir es aber mit Fällen zu

[1] Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. d. phys.-math. Klasse 1920, S. 341.
[2] Ebenda 1910, S. 316.
[3] RUBNER, Ges. d. Energieverbr. S. 416.

tun, in denen auf die klimatischen Verhältnisse keinerlei Rücksicht genommen worden war, so daß ein großer Teil aller solchen Beobachtungen mangelhaft und einer nachträglichen Korrektur aber nicht zugängig ist.

Die vorstehenden Betrachtungen über die Teilfaktoren des Stoffwechsels erlauben eine Zergliederung des praktischen Befunds des menschlichen Nahrungsverbrauchs. Von den drei wichtigsten Teilfaktoren sind zwei uns bekannt, zunächst der Basalstoffwechsel vom Gesunden. Die zahlreichen Beobachtungen verschiedener Autoren wie auch die umfangreichen meines Laboratoriums stimmen darin überein, daß man unter den üblichen Voraussetzungen und Lebensbedingungen pro 70 kg und 1 Stunde 68—70 Kal. als Standardzahl annehmen darf (= 1650 Kal. pro 24 Stunden).

Weiteres kann man dem Einfluß der spezifisch dynamischen Wirkung aus den Nahrungsweisen ableiten. da diese aber gerade hinsichtlich des Eiweißgehalts in mäßigen Grenzen schwanken, so genügt auch hier, wie bei dem Basalstoffwechsel, die Anwendung eines mittleren Wertes. Zieht man von dem Gesamtstoffwechsel die auf Basalstoffwechsel und spezifisch dynamische Wirkung treffenden Kalorien ab, so bleibt der durch alle willkürlichen Bewegungen bedingte Umsatz. Ich nenne das im folgenden kurzweg »motorische Kalorien«.

Eine solche analytische Zergliederung des Stoffwechsels hat nach verschiedenen Richtungen hin einen Wert. Zunächst für die Kenntnisse der Größe des Eiweißstoffwechsels, der ganz in den Basalstoffwechsel hineinfällt und dessen Bedeutung bei der üblichen Berechnung auf die Gesamtkalorien häufig verschleiert wird. Die motorischen Kalorien, die wir aus dem Verband des Gesamtstoffwechsels auslösen, geben uns ein Gesamtbild aller willkürlichen Muskeltätigkeit, also nicht allein der berufsmäßigen Arbeit. Aber gerade diese Trennung der vollen Muskeltätigkeit wird uns zu einem wichtigen Kriterium des sanitären Zustandes eines Individiums. Die »motorischen Kalorien« bieten ein Mittel zur Klassifikation der Gesamtarbeit eines Menschen und auch eine kritisch verwendbare Methode zur Aufklärung mancher fehlerhaften Angaben in der Literatur über Arbeitsleistungen, die bei ausnehmend geringer Nahrung geleistet worden sein sollen. Es erlaubt aber ein einfaches Verfahren, den wirklichen Arbeitsaufwand zu finden, wenn dies notwendig sein sollte; das Nötige läßt sich erst aus den folgenden Darlegungen entnehmen.

Die eben entwickelten Grundsätze analytischer Auflösung eines gegebenen Gesamtstoffwechsels lassen sich andererseits, und das ist bedeutungsvoll, zu einer Synthese des Gesamtstoffwechsels aus anderen gegebenen Elementen verwenden. Ich bin vorhin darauf ausgegangen, die motorischen Kalorien festzustellen. Man kann umgekehrt da, wo die Arbeitsleistung als solche genau bekannt ist, die anderen wichtigen Elemente zufügen, um zum motorischen Stoffwechsel und dann unter Berücksichtigung der spezifisch dynamischen Wirkung und des Basalstoffwechsels zum Gesamtstoffwechsel kommen.

Bestimmungen über den Stoffumsatz und Energieverbrauch bei der Arbeit sind für gewerbliche Leistungen in der Literatur auch einige Jahrzehnte zurück schon gemacht worden, in den letzten Jahren haben sich kurzdauernde Experimente unter einfacher Prüfung des Gasaustausches bei beruflicher Tätig-

keit und Sportleistungen gemehrt, deren Verwertung für die vorliegende Aufgabe des Vergleichs der Arbeitsleistung mit dem Nahrungsaufwand wegen der allzu kurzen Beobachtungsperiode nur bedingt zulässig ist und die Nachwirkungsperiode der Arbeit außer Betracht läßt.

Es ist aber nicht zulässig, wie von den einzelnen Autoren versucht worden ist, einfach den Arbeitsstoffwechsel dem Basalstoffwechsel zuzuzählen. Bei keinem Menschen füllt die Berufsarbeit den ganzen Tag abzüglich der Schlafzeit aus, vielmehr kommt je nach den Umständen an motorischen Leistungen ein Teil auf die berufsfreie Zeit, auf die sogenannte Ruhezeit, die man in der Wohnung zubringt oder mit kleinen Besorgungen und ähnlichen Dingen im praktischen Leben auszufüllen hat. Kennt man die Zeiten, welche für die verschiedenen Leistungen am Tag aufgewendet werden, also Schlafzeit, Arbeitszeit, arbeitsfreie Zeit und die Art der Benutzung dieser freien Zeit, so läßt sich eine Synthese des Nahrungsverbrauches befriedigend vornehmen. Nach einigen längeren Beobachtungen nehme ich als Verbrauch an Kalorien pro Stunde für den Basalstoffwechsel (s. o.) 68 Kal., bei Zimmerruhe (einschl. Basalstoffwechsel) 98 Kal., bei freier Bewegung ohne spezielle Arbeit und häuslichen Besorgungen 114 Kal. an.

Es stehen uns also zwei Methoden zur Verfügung, welche den Nahrungsverbrauch des Menschen festzustellen erlauben. Die zuerst angewandte statistische Methode prüft in längeren Perioden bei bestimmter Arbeit den Nahrungskonsum. Sie wurde leider sehr häufig dadurch etwas unsicher, daß die Nebenbedingungen des Berufs kaum berücksichtigt wurden und dann nicht immer die Erhebungen so lange gedauert haben, um sicher zu entscheiden, ob die beobachtete Ernährung weder zu reichlich noch auch ungenügend war. Ein guter Teil aller solcher Beobachtungen scheidet von der weiteren Verwertung dadurch aus, daß man weder Alter noch Gewicht der Versuchspersonen festgestellt hatte.

Geht man synthetisch zu Werke, so ist kaum eine Gefahr vorhanden, daß der Nahrungsbedarf zu hoch oder zu niedrig genommen wird, aber eine gewisse Unsicherheit bleibt nur hinsichtlich der Berechnung der Leistungen in der sogenannten freien Zeit. Doch bedingen diese Einwände nicht einen erheblichen Fehler.

Von den Arbeitsversuchen sind jene die besten, bei denen Leute bestimmten Berufes in einer dem letzteren angepaßten Weise und in längeren Zeiten Verwendung gefunden haben. Für manche Versuche könnte man Bedenken erheben, daß berufsfremde Persönlichkeiten gewählt worden sind, weil hier die persönliche Berufswahl wegfällt, im übrigen kann genügendes Training das Bedenken beseitigen.

Im folgenden werde ich einzelne wichtige Ergebnisse der statistischen Erhebung und synthetisch errechneten Werte zu einem Gesamtüberblick über die Arbeitsbreite der Menschen zusammenfassen. Eine bestimmte beschränkte Auswahl der Zahlenwerte scheint mir dabei wichtiger als ein Zusammentragen aller möglichen Angaben.

III.

Motorische Gesamtleistungen des Menschen nach analytischer und synthetischer Betrachtung.

Aus der Literatur und eigenen Beobachtungen gebe ich nun Beispiele der Stoffwechselverhältnisse und motorischen Kalorien nach sorgfältiger Auslese in der Anordnung, daß die Grenzwerte für Dauerleistungen verschiedener Berufsarten erkennbar sind. Der Energieverbrauch ist aber stets für den Mann auf einheitliches Gewicht von 70 kg berechnet und für den Tag. Zunächst folgen Berechnungen statistischer Erhebungen, d. h. auf Grund der Feststellung des Nahrungsverbrauches über viele Wochen und meist nach Gruppenbeobachtungen vieler Personen, also keine Einzelversuche.

Tabelle 1.

Beruf	Gesamtkal.	Motor. Kal.	Die motor. Kal. machen in % der Gesamtkal.
Bureauarbeiter	2594	602	23.8
Schneider	2719	839	30.8
Hauswart	2895	973	33.6
Schreiner	3257	1274	38.5
Schwere Arbeit	3776	1724	45.6
Erntearbeit	4338	2279	52.6
Holzfäller	5600	3360	60.0

Als kleinsten Berufsverbrauch eines Gesunden können wir den bei sitzender Lebensweise, wie dies im Bureaudienst erfolgt, ansehen. Es gibt aber auch im Handwerk und in der Fabrik und bei der Heimarbeit Berufe, die sich von dem Bureauleben kaum oder auch gar nicht unterscheiden, wie die Tabelle zeigt.

Als höchstes Extrem einer beruflichen Dauerarbeit habe ich den Umsatz der Holzfäller im Gebirge aufgeführt, als Grenzwert ist dies berechtigt, da die gewaltigen Nahrungsmengen für den Darmkanal solcher Leute, d. h. für die Verdauungsmöglichkeit, bereits nahezu schon eine Überlastung darstellen.

Was uns auffällt, ist die geringe Breite des Nahrungsverbrauchs zwischen der niedersten Grenze der beruflichen Leistung und der höchsten; sie beträgt etwas mehr als eine Verdoppelung.

Im täglichen Leben erscheinen uns die Unterschiede viel größer, weil der Schneider klein oder schmächtig ist und wegen der geringen Körpermasse weniger ißt als kräftige Personen, welche die schwersten Arbeiten leisten.

Die Leistungsgrenze ergibt sich als abhängig von der Ernährungsfähigkeit der Körper.

Deutlicher prägen sich die Unterschiede in der Arbeitsmöglichkeit aus, wenn man nun die »motorischen Kalorien« vergleicht. Hier weicht Minimum und Maximum menschlicher Leistung schon um das Fünffache ab, eine für biologische Funktionen sehr große Schwankungsbreite. Noch augenfälliger

wird die Leistung der menschlichen Muskelmaschine, wenn man es wägt, daß bei der Bureauarbeit und Ähnlichem die motorische Tätigkeit sich auf die gesamte »schlaffreie« Zeit verteilt, also einen niedrigen Stundenwert zeigt, während sie bei anstrengender Arbeit auf den Zeitraum von 8 Stunden, manchmal auf eine noch kürzere Periode, sich zusammendrängt.

Auch bei der motorisch geringsten Leistung der Bureauarbeit u. dgl. entfallen doch schon 24—30 % aller Kalorien auf die motorische Quote, bei den extremsten beruflichen Leistungen aber 60%. In der eigentlichen Arbeitsperiode selbst tritt der übrige Stoffwechsel dem Muskel gegenüber noch weiter zurück, am höchsten, wenn auch noch nach Nahrungsaufnahme die spezifisch dynamische Wirkung schon abgelaufen war.

Es ist wohl anzunehmen, daß bei den Personen mit geringer mechanischer Arbeitsleistung die Temperamente manche Unterschiede ergeben werden; leider hat man auf Einflüsse dieser Art noch nicht geachtet. Bei den Leuten mit schwerer Arbeit verwischen sich natürlich solche Einflüsse der Affekte.

Zur Ergänzung der Zahlen für Berufe mit geringer Leistung gebe ich noch folgende synthetisch errechneten Werte.

Tabelle 2.

Beruf	Mann pro 70 kg, 8 Stunden Arbeitszeit pro Tag		
	Gesamtkal.	Motor. Kal.	Die motor. Kal. machen in % der Gesamtkal.
Schreiber	2519	642	25.5
Schneider	2644	754	28.4
Lithograph	2662	771	28.9
Zeichner	2836	928	32.7
Damenschuster	2881	966	33.5
Mechaniker	3189	1247	39.3
Herrenschuhmacher	3427	1461	42.6

Die Zahlen, aus längeren eigenen Versuchen an berufsmäßig ausgebildeten Personen abgeleitet, entsprechen den kleineren Werten der Tabelle 1; als Zeitraum wird für die Arbeit 8 Stunden angenommen. Schreiber oder Zeichner geben keinen Unterschied. Der Schneider der Tabelle 2 stimmt mit den Werten in Tabelle 1 fast ganz überein. Der Mechaniker arbeitet hauptsächlich an der Drehbank. Das zu bearbeitende Material macht, wie man sieht, für den Schuster einigen Unterschied in dem Energieverbrauch. Bei allen Berufen der aufgeführten Art handelt es sich um Arbeiten, die im Sitzen ausgeführt werden, den Mechaniker ausgenommen, der im Stehen zu arbeiten pflegt.

Im Gegensatz zu den »sitzenden« Berufen bringen alle Berufe, die mit einer Fortbewegung des Körpers verbunden sind, größeren Nahrungsverbrauch. Dies ergibt sich schon aus der großen Muskelmasse, die dabei in Tätigkeit gesetzt wird.

Insoweit das Gehen als Arbeitsleistung in Betracht kommt, kann man sagen, daß es die bestgekannte Leistung ist, wenn auch noch manche wichtige



Aufklärung fehlt, wie z. B. die genauen Kenntnisse der Leistung bei verschiedenen Formen unebenen Terrains. Die praktische Beobachtung im täglichen Leben lehrt uns, daß im Gang sehr ausgeprägte individuelle Eigentümlichkeiten gegeben sind. Wir erkennen einen Bekannten von weitem schon an seinen Besonderheiten des Gehens. Der Bauer geht anders als der Städter, der Gebirgsbewohner anders als der Bewohner der Ebene, die Frau anders als der Mann, der Ermüdete anders als ein Mann mit frischen Kräften. Der mechanische Nutzeffekt für das Gehen läßt sich trotz aller bisherigen Versuche noch nicht ganz exakt angeben; immerhin steht so viel sicher, daß das Gehen, d. h. die Fortbewegung der eigenen Last eine Arbeitsform von großem Nutzeffekt ist.

Die Leistung, d. h. der Energieaufwand beim Gehen, wird gewöhnlich auf den horizontalen Kilogrammeter als Einheit berechnet. Wenn man alle bisherigen Versuche von Zuntz, Durig und anderen kritisch betrachtet, so erhält man: 0.535 gr/cal. für einen horizontalen Kilogrammeter, oder für ein Kilogramm Körpergewicht bei der Bewegung über die Strecke von einem Kilometer 0.535 kg/cal. Dieser Wert ist gültig etwa für eine Geschwindigkeit von 100 m pro Minute, wobei in der Stunde 6 km zurückgelegt werden, ein gutes Marschtempo kräftiger jüngerer Personen. Wird diese Grenze überschritten, so werden für den horizontalen Kilogrammeter mehr als 0.535 gr/cal. gefordert. Die Gehart ist das Charakteristische; es ergibt sich aus dem Umstand, daß die bloße Steigerung der Arbeitsgröße, z. B. durch Belastung außerhalb weiterer Grenzen keine Änderung des Wertes des horizontalen Kilogrammeters ergibt. Die Angaben in der Literatur sind etwas unvollkommen, außer einer Angabe von Zuntz bei schwacher Belastung hat Löwy-Schrötter vor kurzem eine Angabe bei starker Belastung eines Mannes gemacht[1]. In der französischen Literatur findet sich eine Mitteilung vor, die, wie sie vorliegt, unverwertbar ist[2]. Ich habe aber, von den Grundzahlen ausgehend, durch Umrechnung doch Ergebnisse gefunden, die benutzbar scheinen.

Pro 1 horizontalen Kilogrammeter werden verbraucht:

Unbelastet	....	0.535 gr/cal.
mit Last 25 kg	.....	0.535 » »
» » 45 »	.....	0.573 » »
» » 60 »	.....	0.538 » »
» » 65 »	.....	1.010 » »

Die Versuche mit 45 und 60 kg waren langdauernde Versuche. Bei 45 kg Last wurden von Trainierten 5 Stunden Wegs geleistet, bei 60 kg 4.2 Stunden. Das vorliegende Material gibt zunächst nur eine Orientierung in dieser Frage. Das Ergebnis würde sein, daß eine Belastung bis 86% des eigenen Gewichts innerhalb der Grenzen rationeller Leistung hineinfällt. Die praktische Erfahrung lehrt, daß berufliche Leistungen von Lastträgern innerhalb der ge-

[1] Wien. med. Wochenschrift Nr. 27, 1925.

[2] I. Amar, Le Rendement de la machine humaine 1520.

gegebenen günstigen Grenzen sich halten. Die Beziehung zwischen Last und Körpergewicht gilt nur für magere muskulöse Personen und günstige klimatische Verhältnisse. Leider werden Angaben über die näheren Versuchsbedingungen bei Arbeits- und Sportleistungen meist ganz vernachlässigt; so daß manches auf diesem Gebiet korrekturbedürftig ist[1].

Für die Beschäftigungen im praktischen Leben kommt das Steigen, Auf- und Abwärtsgehen täglich zur Anwendung, für die meisten Städte zum mindesten das Treppensteigen, in hügligen Lagen mehr oder minder Terrainunterschiede oder auch das berufsmäßige Steigen. Über die drei möglichen Varianten: a) Geschwindigkeit des Auf- und Abstiegs, b) Belastung, c) Neigung des Weges sind hauptsächlich von Durig vorläufige Ergebnisse erzielt.

Der Energieaufwand nimmt für die gleiche Wegstrecke gegenüber dem horizontalen Weg rasch zu. Die Geschwindigkeit aber nimmt mit der Steilheit des Weges ab. Bei starker Belastung, etwa der Grenzwert S. 394, braucht man für den Kilometerweg beim Steigen an 70 Minuten. Die im praktischen Leben gegebenen Möglichkeiten der Größe des Energieaufwandes sind wegen der wechselnden Bedingungen der Gehweise und Steigerungen außerordentlich verschieden. Sie lassen sich für verschiedene Berufe besser als durch Beobachtungen der wechselnden Einzelergebnisse und Synthese aus dem Gesamtergebnis des Stoffverbrauchs an Tagesleistungen beurteilen. Nur dort, wo ein und dieselbe Arbeit den Tag über gleichmäßig geleistet wird, kann man die synthetische Methode der Berechnung des Stoffverbrauchs, ausgehend von der Arbeitsaufwendung bzw. dem respiratorischen Stoffwechsel, berechnen.

Die Steigarbeit gilt als eine Arbeit mit hohem Nutzeffekt. Gemeinhin wird dieselbe heute aus der Wegstrecke, nach Maßgabe der für das horizontale Gehen berechneten Werte und der Hubleistung abgeleitet. Aber die Einzelangaben differieren recht erheblich. Durig nimmt als Wert der Hubleistung pro Kilogrammeter 7.8 gr/cal. an. Aus den Versuchen von Löwy-Schrötter ergeben sich knapp 6 gr/cal., nach anderen Experimenten noch weniger, so daß Nutzeffekte von 31—39% sich berechnen. Für die vorliegende Aufgabe lege ich keinen Wert auf diese Frage des Nutzeffektes, wahrscheinlich ist die Annahme für die Wegleistung nicht zutreffend, zumal die Art der Bewegung bergauf wesentlich von der Gehweise auf horizontalem Boden verschieden ist. Das Gesamtresultat der Leistung bergauf läßt sich aber wohl berechnen, unzutreffend ist nur die Aufteilung auf die horizontale und vertikale Komponente.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Gehen, Steigen, Lasttragen ist es uns verständlich, daß alle Berufe, welche teilweise oder ganz auf diese Bewegungsformen angewiesen sind, recht erhebliche Umsätze der Nahrung repräsentieren können. Ich gebe zur Ergänzung der Tabelle 1 noch einige synthetisch berechnete Arbeitsgrößen, die auch zur Erläuterung landwirtschaftlicher Arbeiten dienen können.

[1] RUBNER, Festschrift der Kais.-Wilh.-Ges. 1921.

Beruf	Gesamtkal.	Motor. Kal.	Motor. Kal. in % der Gesamtkal.
Lastträger (45 kg Last).....	3370	1409	44.7
Lastträger (65 kg Last).....	3492	1509	43.5
Heutragen (8 Stunden).....	3910	1898	48.2
Soldat im Manöver (25 kg Last, 5 Stunden Marsch).......	3960	2018	50.9
Erntearbeiter Durchschnitt..	4388	2279	52.6
Mähen (8 Stunden)........	4836	2846	58.9
Lasttragen (65 kg Last, 5 Stunden bergauf)............	5012	2120	42.4
Holzfäller (Winterarbeit)....	5600	3360	60.0

Unter die Gruppe der hier aufgeführten Personen gehören also Berufe wie Postboten, Briefträger, Lastträger, Transportarbeiter und Dockarbeiter; weiter die landwirtschaftlichen Betriebe auch bei der Gebirgsbevölkerung, wo die Hubleistung eine so große Rolle spielt. Ich habe einige Zahlen nach synthetischer Berechnung in die Tabelle aufgenommen, welche wichtige Ergänzungen zu den anderen Beobachtungen liefern. Dabei ist aber folgendes zu bemerken: Der Transportarbeiter und Docker trägt die Last nicht während der ganzen Arbeitszeit; er kehrt nach Ablieferung der Last unbelastet zurück; genau so ist es in der Landwirtschaft beim Heuaufladen usw.; der Träger in den Bergen kehrt von der Arbeit meist unbelastet zurück. Dies habe ich bei der Synthese des Stoffverbrauchs berücksichtigt. Angenommen wurde weiter, daß keine besonderen Terrainschwierigkeiten vorhanden sind.

Eine Dauerbelastung haben wir nur beim Militär. Schon ein Gepäckmarsch von 5 Stunden ist eine gute Leistung. Wird der Marsch auf 8 Stunden ausgedehnt, so steigt der Kalorienbedarf auf 4750 kg/cal. pro Tag mit 2675 motor. Kalorien = 56.32 aller Kalorien.

Die Tabelle zeigt, daß keine der neuaufgeführten Berufskategorien über die schon in Tabelle 1 gegebene Endgrenze hinausgeht. Die Variationen der »Gehberufe« sind zu mannigfaltig, um sie hier auch nur annähernd zu treffen. Auch aus dem Fabrikbetrieb wäre die eine oder andere Arbeit als große Leistung zu erwähnen, doch liegen hier geeignete Unterlagen nicht vor. Im übrigen ist die »Fabrik« eben differenziertes Handwerk mit reichlicher maschineller Beihilfe.

Wo nichts anderes bemerkt ist, habe ich bei der Synthese den Achtstundenarbeitstag angenommen. Was den 8stündigen Arbeitstag anlangt, so hat man vielfach behauptet, die Kürzung der Arbeitszeit verringere die Produktion deshalb nicht, weil der Arbeiter energischer schaffe, wenn er nicht mehr so ermüdet würde wie bei der 10stündigen Zeit.

Derartiges hat sich nur in Ausnahmefällen bewahrheitet, im übrigen ist überall eine Kürzung der Produktion mit Verringerung der Arbeitsleistung also auch des Energieverbrauchs eingetreten.

Verlängerung der Arbeitszeit wirkt ganz ungleich; bei den sitzenden Berufen nimmt der Energieverbrauch mit Verlängerung der Arbeitszeit ab, während die Ermüdung, die hier gar keine muskulöse ist, fortschreitet.

Große Nahrungsumsätze und motorische Leistungen wurden früher, als die Arbeitszeit noch frei war, in der Hausindustrie, z. B. bei den sächsischen Hauswebern, erreicht. Die Stundenleistung war keine allzu große, aber die lange Dauer der Arbeit steigerte den täglichen Nahrungsumsatz sehr erheblich. Zur Vervollständigung des Überblickes, der bisher nur den Männern gegolten hat, mag noch eine Übersicht über den Arbeitsaufwand im häuslichen Beruf der Frau gegeben sein.

Die Arbeitsfähigkeit der Frau wurde im Laufe der Zeit sehr verschieden beurteilt. Physiologisch ist uns selbstverständlich, daß man die Frauen, ohne auf ihr geringes Durchschnittsgewicht Rücksicht zu nehmen, nicht mit den Männern gleichen Alters vergleichen darf. Hinsichtlich des Basalstoffwechsels darf man nach neuen Untersuchungen wohl sagen, daß Mann und Frau gleichen Gewichts keine Unterschiede zeigen. Nur hinsichtlich maximalster Leistungen steht die Natur der Frau hinter dem Mann zurück, ihre absolute Muskelkraft beträgt etwa die Hälfte jener des Mannes.

Beruf	Frauenarbeit im Hause (pro 70 kg und 8 Stunden Arbeit)		
	Gesamtkal.	Motor. Kal.	Die motor. Kal. machen in % der Gesamtkal.
Handnähen, Maschinennähen mit Motor	2348	506	21.5
Geschirrwaschen, Maschinennähen ohne Motor, Bügeln	2471	592	23.9
Berufsnäherin	2508	632	25.2
Bodenschrubben	2650	760	28.6
Berufsmäßiges Maschinennähen	2685	792	29.5
Waschen der Wäsche	2721	824	30.2

Vergleich.

Beruf	Gesamtkal.	Motor. Kal.
Ein Schneider	2644	754
Berufsschneiderin	2508	632

Die vorstehende Tabelle umfaßt die häuslichen Berufe der Frau; die gleiche Arbeitsfähigkeit von Mann und Frau, die in dem gleichen Berufe stehen, ergibt sich aus dem der Tabelle angegliederten Vergleich[1].

Die häusliche Tätigkeit ist, wie man sieht, nur mit mäßigem Kraftaufwand verbunden. Doch ändern sich die Verhältnisse dort, wo die Notwendigkeit besteht, öfter Treppen zu steigen, bisweilen mit Lasten, wie das in den hohen Mietshäusern der Großstädte der Fall ist; das ermüdende Moment der häuslichen Arbeit liegt bei den Hausfrauen in der lang dauernden Tätigkeit. das ja mit einer 8stündigen Anspannung nicht zu Ende ist.

Die Frauen werden aber häufig doch auch zu recht schweren Arbeiten verwendet. In manchen Ländern als Postboten oder im allgemeinen zur Feld-

[1] Die mit * bezeichneten beziehen sich auf längere eigene Arbeitsversuche, die übrigen sind nach Angaben von LANGWORTHY berechnet.



arbeit, die zu den anstrengendsten Leistungen führen kann. Die Gesetzgebung bietet bei uns für Frauen einen Schutz gegen Anforderungen, die gesundheitlich nicht zulässig sind. Dabei sei auch auf die Schutzgesetzgebung für jugendliche Arbeiter hingewiesen, während bei den Erwachsenen sich ein solcher Schutz nicht auf die Verhütung übermäßiger Anstrengung hinsichtlich Einzelleistung selbst bezieht, sondern auf die Dauer der Arbeit und vor allem auf die Arbeitsbedingungen.

Nach der Betrachtung einzelner Arbeitsgruppen gebe ich an folgenden eine Gesamtzusammenstellung, wobei einige früher gegebene Werte durch Zusammenlegen vereinfacht worden sind.

Beruf	Gesamtkal.	Motor. Kal.	Die motor. Kal. machen in % der Gesamtkal.
Bureauarbeiter	2556	622	24.6
Lithograph	2662	771	28.9
Schneider	2681	796	29.6
Zeichner	2836	928	32.7
Damenschneider	2881	966	33.5
Hauswart	2895	973	33.6
Mechaniker	3199	1247	39.3
Schreiner	3257	1274	38.5
Lasttragen (45 kg)	3370	1409	44.7
Herrenschuster	3437	1461	42.6
Lasttragen (65 kg)	3492	1519	43.5
Sogen. schwere Arbeit	3776	1724	45.6
Heutragen	3910	1898	48.2
Soldat, Manöver	3960	2018	50.9
Last 65 kg bergauf	5012	2120	42.4
Erntearbeit	4388	2279	52.6
Mähen	4836	2846	58.9
Holzfäller	5600	3360	60.0

Die Gruppierung ist nach der Höhe der motorischen Kalorien vorgenommen. Gruppe I Berufe unter 1000 motor. Kal., Gruppe II 1000—2000, Gruppe III 2000—3000, Gruppe IV über 3000. In den einzelnen Gruppen, besonders denen mit hohem motorischen Verbrauch ist die Anzahl der Beispiele eine relativ geringe. Von größeren Arbeitsgruppen fehlt der Bergbau, den man im allgemeinen auf die Höhe der landwirtschaftlichen Erntearbeit stellen kann. Bei letzteren darf man den Umstand nicht vergessen, daß es sich dabei um Saisonarbeit handelt, die hauptsächlich bei der Ackerbestellung und der Ernte geleistet wird.

Eine weitgehende Einzelbehandlung des Gegenstandes liegt hier fern. Nur einige Fragen von sozialer Bedeutung mögen noch gestreift sein. Der Fabrikarbeiter macht in Deutschland einen nicht unerheblichen Teil der Handarbeiter aus. Das Wort »Arbeiter« hat eine Verallgemeinerung und Auswertung

gerade auch in Ernährungsfragen gefunden, die sich gar nicht rechtfertigen läßt, indem man allgemein eine Größe der Nahrungsversorgung als erforderlich betrachtete, die dem einen zu wenig, dem andern viel zu viel bot. Die Gesundheit fordert eine Deckung des Nahrungsbedarfs, aber auf die Dauer kein Zuviel und kein Zuwenig. Von einem Schema ausgehend, verlangte man ein »Minimum«, das erheblich über dem Bedarf großer Gruppen lag, und sprach, wenn dieses nicht erreicht war, von einer weitgehenden Unterernährung. Gerade bei der Fabrikarbeit haben wir zahllose Fälle, bei denen wie beim Bureauarbeiter mechanische Kräfte des Körpers kaum nennenswert beansprucht werden. Die Scheidung von Hand- und Kopfarbeiter im Hinblick auf Körperleistung und Bedarf hat keinen allgemeinen Sinn. Sie ist nur eine allerdings weit verbreitete, aber ebenso irrtümliche Auslegung. Beide Gruppen mischen sich und haben keine scharfe Begrenzung. Die Ermüdungserscheinungen sind bei dem Bureauarbeiter und ihren äquivalenten Handarbeitern keine muskulär bedingten, sondern evtl. geistige oder Sinnes-Ermüdungen, d. h. solche allgemeiner Natur, die zum Ausgleich nur die Nachtruhe benötigen. Zahlreiche Berufe mit geistiger Arbeit bieten in ihrer charakteristischen Tätigkeit nebenbei einen erheblichen Aufwand motorischer Leistungen (Beruf im Handel, Ingenieure, Verwaltungsbeamte, Architekten, Ärzte usw.), die weit über den Bedarf von Millionen Handarbeitern hinausgehen.

Von diesen abgesehen, darf man die höhere geistige Arbeit nicht mit der Bureauarbeit und einfacheren Dienstbetrieben auf eine Stufe stellen. Bei ernster geistiger Arbeit liegen Einflüsse vor, die durch andere als motorische Triebe sowohl auf eine Steigerung des Nahrungsumsatzes als auch auf die Qualität der Ernährung Einfluß haben.

Die vorliegenden Tatsachen umfassen in den Extremen das ganze Gebiet menschlicher Tätigkeit, bleiben aber trotz der Mannigfaltigkeit der Tätigkeit im Nahrungsverbrauch in engen Grenzen. Diese immerhin auffallende Erscheinung erklärt sich aus der Gewohnheit der Menschen, die Leistungen weniger nach Tagesergebnissen als nach der Stundenarbeit oder nach den einzelnen, wenn auch vorübergehenden maximalen Kraftäußerungen einzuschätzen. Alles, was die Tabelle bringt, bezieht sich auf die Beobachtungen an kräftigen, gesunden Personen, insoweit es sich um erheblichere motorische Leistungen handelt. Für schwerere Arbeitsformen findet man auch beim Mann die besten Leistungen nur in einem engen Bezirk des Lebens zwischen dem 17.—35. Jahr; bei Frauen zwischen dem 20.—35. Jahr. Doch reichen in einzelnen Fällen gute Leistungen auch weiter als die Grenze der maximalsten Befähigung für die Arbeit. Das Alter setzt den schweren Arbeitsformen von selbst eine Grenze; auf zahlenmäßige Angabe sei verzichtet. Mit zunehmendem Alter wählt der Mensch von selbst die leichteren Arbeitsformen, die Abnahme der Leistungsfähigkeit liegt vielleicht weniger in einer Änderung der Muskeln als vielmehr in einer Veränderung der Gefäßwände, des Herzens, der Lunge. Beim Alternden scheint mir auch die Störung der physikalischen Wärmeregulation insofern gegeben, als die Schweißbildung leichter eintritt als bei Jugendlichen, deren frische Gefäßwände nach maximalster Erweiterung eine starke Hautdurchblutung und trockene Wärmeabgabe erlauben.

IV.

Durchschnittliche Arbeitsgröße.

In der Literatur über das Nahrungsbedürfnis bei mechanischer Arbeit haben die von C. Voit anfangs der 70er Jahre des vorigen Jahrhunderts aufgestellten Begriffe der »mittleren Arbeit« eine große Rolle gespielt und kehren ab und zu noch heute nach über einem halben Jahrhundert wieder. Der von Voit notierte Kostsatz ist von einer großen Zahl der Autoren mißverständlich kurzweg auf den »Arbeiter« in sozialem Sinne angewandt worden und die tatsächliche Ernährung gemäß dieser Forderung Voits gefordert worden. Die älteren Physiologen haben schon vor Voit einzelne ihnen typisch erscheinende »Arbeiter« auf ihren Nahrungsverbrauch untersucht, um damit zunächst eine quantitative Vorstellung zu gewinnen. Der Soldat, der Handwerker sind damals, als die Industrie noch kaum eine Rolle spielte, als Typen der Mannesernährung angesehen worden. Daraus hat sich dann etwas später der Ausdruck »mittlerer Arbeiter« geformt. Eine solche Generalisierung des Bedarfs gibt es nicht.

Wenn man die verschiedenen Arbeitsformen und ihren Stoffwechselbedarf vergleicht (s. Tabelle S. 398), so wird man in Verlegenheit kommen, was dann von allem die mittlere Arbeit sei.

Ein schlimmer Mißbrauch ist in der Zeit der Zwangswirtschaft mit den Ausdrücken »Schwerarbeiter« und »Schwerstarbeiter« getrieben worden, weil man ganz willkürliche Grenzen gezogen hat, nur um so die amtliche Nahrungsversorgung stärker in Anspruch nehmen zu können, als berechtigt war.

Wenn man eine Umschau nach Personen hält, zu deren Beruf eine besondere Selektion kräftiger Statur gerade nicht notwendig, ein frühzeitiges Versagen der Körperkraft nicht zu befürchten ist, so liegt uns das Handwerk im allgemeinen doch am nächsten, also die Gruppe der Schreiner, Schuster, Mechaniker, Schlosser, Installateure, Klempner, Heizer usw. Einige von diesen Handwerkern finden sich in den Tabellen aufgeführt.

Bei Leuten dieses Arbeitstyps wird man annehmen dürfen, daß ein motorischer Bedarf von 1300 kg/cal. täglich ihre Leistung vorstellt. Wenn man diese Annahme macht, so kommt auf die eigentliche berufliche Arbeitszeit rund 200 kg/cal. Energieverbrauch im ganzen.

Das ist etwa eine Gesamtleistung, die dem Energieaufwand beim Gehen des Menschen in üblicher Geschwindigkeit entspricht. Daher wird man in diese Gruppe auch die Postboten, Ausgeher u. dgl. mit hinzunehmen können. Vergleichen wir den Wert 200 kg/cal. mit der hochwertigen beruflichen Leistung. so wird man leicht erkennen, daß im Rahmen der aufgezählten Handwerker von einer starken Inanspruchnahme der Leistungsfähigkeit nicht die Rede sein kann.

Wieviel der einzelne dabei von seiner maximalen Arbeitsfähigkeit beansprucht, läßt sich ohne weiteres nicht sagen, da man ja geneigt sein wird. die individuelle Leistungsfähigkeit ganz verschieden groß anzunehmen. Das ist insofern sicher richtig, als die maximalen Leistungen im weitgehendsten Maße von der Willenskraft, der Stimmung usw. von physiologischen Eigentümlichkeiten des Körpers, vor allem auch von dem Alter abzuhängen pflegen.

Inwieweit solche Einflüsse maßgebend sind, kann man doch annähernd begrenzen, wenn man untersucht, wie sich denn bei Berufen mit sehr großen Leistungen der stündliche Verbrauch während der Arbeit verhält. Aus dem vorliegenden Material läßt sich für drei Fälle ein Mittelwert für schwerste Arbeit ableiten, der vorläufig ja als erste Annäherung zur Klärung der gestellten Fragen dienen kann. Die drei gefundenen hohen Werte betragen pro Stunde für den Gesamtstoffwechsel 487, 488, 451 kg/cal. Statt großer individueller Schwankungen findet man also Zahlen, deren Übereinstimmung wohl nicht auf einem Zufall beruhen; da die drei Arbeitsformen dabei keineswegs dieselben waren, so gewinnt es den Anschein, daß die maximalste Dauerleistung im Beruf nicht muskulär begrenzt ist, vielmehr auf andere physiologische Faktoren zurückgeführt werden muß. Als solche kommen Herztätigkeit und Atemtätigkeit in Betracht. Ich betone für diese Begrenzung, es sind Dauerleistungen, bei denen sie zutage tritt; in kurzen Zeiträumen vermag der Organismus weit größere Leistungen zu erzielen, was sich aus sportlichen Erfahrungen des Schnellaufs auf kurze Strecken usw. ergibt, oder wie sie bei einer Rettung aus Lebensgefahr in die Erscheinung treten. Ich kehre nun zu der vorgelegten Frage zurück, wie sich das Verhältnis des Handwerkers zu den maximalen beruflichen Dauerleistungen stellt. Nach den obigen Angaben würde die im Bereiche des Handwerks geleistete Arbeit etwas über $^4/_{10}$ der größten Dauerleistungen stellen. Die volle Ausbeutung der menschlichen Arbeitsfähigkeit beschränkt sich nur auf einzelne Berufe und offenbar auf eine relativ enge Zahl von Personen.

Wenn man den Begriff Schwerarbeiter beibehalten will, so würde er am ehesten noch berechtigt sein für das große Gebiet landwirtschaftlicher Tätigkeit (und wahrscheinlich für den Bergbau), wobei 2000—2800 motorische Kalorien in Frage kommen, aber die volle Ausnutzung der Arbeitsfähigkeit noch nicht eintritt. Die Grenze der Schwerarbeit würde also höher zu legen sein, als man früher angenommen hat.

Ich habe schon früher einmal beim Vergleich der Ernährung verschiedener Nationen mich dahin ausgesprochen, daß wir eigentlich größeren Unterschieden im gesamten Nahrungsbedarf, der ja großenteils durch Muskeltätigkeit bedingt ist, nicht begegnen. Von dieser Tatsache ausgehend ergeben sich ganz interessante Schlußfolgerungen.

Wie groß ist die durchschnittliche Leistung einer Bevölkerung, d. h. inwieweit vollzieht die Gesamtheit motorische Leistungen? Es hat sich der Nahrungsverbrauch von 400—500 Millionen Menschen so weit feststellen lassen, daß die Ergebnisse ernährungsphysiologisch zu verwerten waren mit dem Resultat einer weitgehenden Übereinstimmung ganzer Völker. Aus dem Mittel verschiedener Nationen, also einem Weltwert sozusagen, läßt sich auch der mittlere motorische Verbrauch pro Kopf eines Menschen ableiten = 890 kg/cal.

Dieses gilt für alle Menschen zusammengenommen, Kinder und Erwachsene, Alte, Frauen und Männer. Man kann etwa in runder Zahl annehmen, daß die Hälfte aller Menschen aus Jugendlichen sich zusammensetzt. Die Rechnung »pro Kopf« bedeutet außerdem keine Erwachsenen, sondern das Durchschnittsgewicht einer Nation, d. h. nur 43—45 kg.

Von dem Wert pro Kopf kann man die Umrechnung auf eine Person von 70 kg machen, indem man mit 1.28 multipliziert. Der nationale Durchschnittswert für motorischen Aufwand wird dadurch von 890 auf 1120 motorische Kalorien erhöht. In diesem sind aber Männer und Frauen zusammengerechnet, somit muß für den männlichen Teil der Bevölkerung die Zahl höher sein als 1120 motorische Kalorien. Das ist ein Ausdruck für die allgemeine Betätigung der Muskulatur. Natürlich erfolgt eine solche Betätigung nicht als geschäftlich verwertete Arbeitskraft. Ich habe schon vor Jahrzehnten darauf hingewiesen, daß bei Jugendlichen und Kindern durch ihr lebhaftes Wesen, Spiele und Bewegungslust der Nahrungsbedarf nicht kleiner ist als bei vielen Handwerkern.

Die Arbeitsteilung hat den Mißstand hervorgerufen, daß ein ziemlicher Teil namentlich der städtischen Bevölkerung im Muskelgebrauch unterwertig ist, d. h. in Berufen bei sitzender Lebensweise und in geschlossenen Räumen lebt. Was die große Masse der Menschheit an physiologischen Funktionen der Muskeltätigkeit leistet, muß auch das Normale und Zweckmäßige und Bekömmliche sein. Diese Grenze suchen wir, und finden wir sie wie gesagt für den Mann etwas höher liegend als 1120 motorische Kalorien. Das muß die Grenze des »Gesunden« sein, etwa also 1200—1300 kg/cal. Sehen wir uns die Tabelle S. 398 an, so sind viele Berufe unter dieser Zahl, fast alle solche Berufe, die wesentlich im geschlossenen Raum und ohne besondere Muskeltätigkeit ausgeführt werden. Der Begriff einer gesunden durchschnittlichen Leistung fällt zum Teil zusammen mit Gewerben, die nicht eine besondere Körperqualität zur Voraussetzung haben.

V.

Ergänzung unterwertiger motorischer Leistungen durch Muskeltätigkeit.

Die Muskeltätigkeit steht in engem Zusammenhang mit der Gesundheit; ist erstere zu gering, so bedarf sie weiterer Ergänzung durch irgendwelche Betätigung der Muskulatur. Eine durchschnittliche Betätigung bis etwa zur Höhe von 3200 Gesamtkalorien kann als angemessen betrachtet werden. Diese entsprechen etwa 1200—1300 motorischen Kalorien. Das einfachste Mittel, für eine schwache Betätigung der Muskeln einen Ausgleich zu verschaffen, ist das Gehen, das sich für alle Altersstufen eignet. Ein rein schematischer täglicher Ausgleich ist dabei keineswegs notwendig, an Ruhetagen mögen sich zeitweilige stärkere Anstrengungen als Ausgleich anschließen, was den Vorteil hat, den Körper auch für stärkere Leistungen zu üben.

Eine besondere Verstärkung der muskulösen Leistungen bringt dem Menschen das unebene Terrain vor allem im Gebirge. Hier können alle möglichen Formen des Gehens und Steigens und Kletterns und die Schwierigkeit des Terrains zu erschöpfender Arbeitsleistung führen. Eine stärkere Anstrengung trägt zweifellos durch das dadurch zu erreichende Training besonders zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit bei. Szigmondi hat einmal die Leistungsfähigkeit eines kräftigen, und man darf hinzufügen, jugendlichen

Alpinisten so definiert, daß ein solcher täglich 20 km horizontalen Wegs und 1700 m vertikaler Hebung in 8—10 Stunden Wanderschaft erreicht. Aus den Proviantangaben für solche Märsche rechne ich einen Aufwand von 3800 bis 3900 kg/cal. mit einer Stundenleistung während des Wanderns auf 370 kg/cal. Die Anforderungen dieser Art erreichen noch nicht die Größe, die ich oben als maximale Zahlen gesunder gewerbsmäßiger Leistungen bezeichnet habe (etwa 500 kg/cal.). An Stelle der Marsch- und Steigleistungen können natürlich auch Formen der häuslichen Beschäftigung, Gartenarbeit, Holzsägen und Holzzerkleinern usw. treten, oder die verschiedenen Formen des Sportes. Bei letzterem wird nicht nur die Steigerung der Muskeltätigkeit, sondern daneben eine systematische Ausbildung des Körpers angestrebt, deshalb haben sie auch da noch eine berechtigte Anwendung, wo die berufliche Tätigkeit in einseitigen Arbeitsformen den normalen Zustand des Körpers zu schädigen droht.

Bei den sportlichen Veranstaltungen werden besonders bei kurzdauernden Übungen oft erstaunlich große ernährungsphysiologische Leistungen vollbracht, die kaum anders als durch bereitliegende Vorratsstoffe ermöglicht werden können. Aber bald versiegt diese Quelle. Beim Lauf fällt die Leistung nach wenigen hundert Metern enorm ab.

Beim 15-Kilometer-Lauf im Olympiarennen wird $1^1/_2$ Stunden eine Geschwindigkeit von 4.1 m pro Sekunde innegehalten. Eine längere Laufdauer reduziert aber die mittlere Leistung noch erheblicher; es werden in einer Sekunde dann etwa 10 km gemacht = 2.6 m pro Sekunde.

Dieselbe Strecke wird im Schnellgehen in einer Stunde mit 7.6 km = 2.1 pro Sekunde bewältigt. Laufen und Gehen kommen sich bei Dauerleistungen also ziemlich nahe. Bei einem stundenlangen Dauerlauf berechnet sich der stündliche Gesamtumsatz auf 647 kg/cal. Bei einem 27 Stunden dauernden Wettmarsch über 202 km finde ich 478 kg/cal. pro Stunde. Die letzte Zahl entspricht sehr nahe den maximalsten gewerblichen Berufsleistungen, nur der Dauerlauf überschreitet den ungefähren Grenzwert, was vielleicht auf die kürzere Dauer des Laufes gegenüber dem Gehen zurückzuführen ist. Im übrigen eignen sich nur wenige Personen zu derart extremen Leistungen, weshalb die Annahme konstitutioneller Einflüsse nicht von der Hand zu weisen ist. Es handelt sich auch nicht um berufsmäßige Leistungen und Dauerleistungen für Wochen und Monate.

Trotz alledem bewegen sich die maximalen Werte noch nahe genug den früher gefundenen von 500 kg/cal. pro Stunde entsprechend. Auch diese Beobachtungen lassen vermuten, daß vor allem Herz- und Atemtätigkeit zu begrenzt sind, um gewisse Leistungen zu überschreiten.

Für die Ergänzung unterwertiger motorischer Leistungen durch Leibesübungen kommt nur die gesundheitliche Seite, nicht aber die Frage des Nutzeffektes und rationeller Verwendung der Kräfte in Frage.

Ausgegeben am 16. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXVIII. Gesamtsitzung. 11. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. von Harnack gab ein Referat seiner Abhandlung: Die Bezeichnung Jesu als »Knecht Gottes« und ihre Geschichte in der alten Kirche.

Die aus Jesajas stammende Bezeichnung Jesu als »Knecht [Ebed] Gottes«, die die Urgemeinde in die Abendmahlsgebete aufgenommen hat (»Durch Jesus Deinen Knecht«), konnte sich in der ältesten Kirche nur halten, weil das griechische Äquivalent »Pais« sowohl »Knecht« als auch »Kind« (»Sohn«) bedeutet. So aufgefaßt, behielt man zunächst die liturgische Formel bei, ja »Pais« drang an ein paar Stellen sogar in den dogmatischen Sprachgebrauch ein; aber die Bezeichnung ist immer nur spärlich verwendet worden (in den Inschriften fehlt sie ganz), und schon im 5. Jahrhundert verschwindet sie auch aus den Liturgien. Das Abendland war ihr noch ungünstiger, da »Puer« nicht so leicht wie »Pais« als »Kind« verstanden werden konnte. Mit der Bezeichnung Jesu als »das himmlische Kind« hat der liturgische Name »Pais« Gottes nichts zu tun, ebensowenig mit den Berichten von der Erscheinung Jesu als eines strahlenden »Puer« und mit den diesen Berichten verwandten monumentalen Darstellungen. Doch gibt es Stellen, an denen sich nicht entscheiden läßt, welche von diesen drei Möglichkeiten vom Verfasser gemeint ist.

*2. Hr. von Harnack las eine Abhandlung: »Zur Verfassungsgeschichte der Preußischen Akademie, ihre Leitung durch vier Sekretare betreffend.«

Die Entstehung der Einrichtung der vier, die Akademie leitenden Sekretare und des Sekretariats als eines Kollegiums sowie die Entwicklungsgeschichte des Sekretariats bis zur Gegenwart wurde kurz dargestellt.

3. Vorgelegt wurde von Veröffentlichungen der Akademie: die 4. Lieferung des 1. Bandes des »Nomenclator animalium generum et subgenerum« (Berlin 1926) und »Acta Borussica«: »Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung Preußens im 18. Jahrhundert« Bd. 12, bearbeitet von Martin Hass, Wolfgang Peters und Ernst Posner (Berlin 1926).

4. Vorgelegt wurden ferner die Veröffentlichungen der »Monumenta Germaniae historica«: Legum Sectio IV: »Constitutiones et acta publica imperatorum et regum« Tom. 8, bearbeitet von Karl Zeumer und Richard Salomon (Hannover 1910—1926); ferner »Diplomatum regum et imperatorum Germaniae« Tom. V, Pars I, bearbeitet von H. Wibel, P. E. Schramm und H. Bresslau (Berlin 1926); endlich »Epistolae selectae«, Tom. IV: »Die Aktenstücke zum Frieden von San Germano 1230«, herausgegeben von Karl Hampe (Berlin 1926).



5. Das ordentliche Mitglied der Akademie Hr. Gottlieb Haberlandt feierte am 11. November sein 50jähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat ihm eine Adresse gewidmet, die in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Harry Bresslau in Heidelberg am 27. Oktober durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Gottlieb Haberlandt zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 11. November 1926.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Die Doktorarbeit, mit der Sie vor 50 Jahren in Wien promovierten, zeigte schon jene Verbindung von anatomischer Untersuchung und physiologischem Experiment, die für Ihre ganze Arbeitsrichtung kennzeichnend blieb; Ihre Dissertation war der Auftakt zu einem weitumfassenden und gedankenreichen Lebenswerk. Denn dieser Verbindung von Anatomie und Physiologie sind Sie treu geblieben, wenn auch beider Rollen nicht gleichwertig waren. Was Ihr Auge unter dem Mikroskop gesehen hatte, war Ihnen zumeist erst der Anstoß zu den physiologischen Versuchen, obschon Sie sie ebenso souverän beherrschten wie das anatomische Messer. Das Experiment gab Ihnen immer wieder den Prüfstein ab, wie weit die Konzeptionen, die Sie geistvoll aus dem anatomischen Bilde abzuleiten wußten, der kühlen Kritik standhielten.

Als Sie promovierten, vollendete eben De Bary seine »Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane«, die mit größter Sorgfalt und Kritik alles bis dahin Bekannte zusammenfaßte, und die mit ihrer rein deskriptiv topographischen Anordnung des Stoffes ebenso schwerfällig wie gründlich war. Und doch hatte schon einige Jahre vorher unser unvergessener Kollege Hr. Schwendener in seinem »Mechanischen Prinzip im anatomischen Bau der Monocotylen« der Pflanzenanatomie eine neue Bahn gebrochen, indem er den Bau des Gewebes mit seiner physiologischen Leistung verknüpfte. Was Schwendener wohl vorschwebte, was er aber selbst nicht durchführen wollte oder konnte, die Übertragung dieses Prinzips von einem speziellen Gewebesystem, dem der Festigung, auf den ganzen anatomischen Bau der Pflanze, — Ihnen war dieser entscheidende Schritt vorbehalten.

Schon nach wenigen Jahren konnten Sie in Ihrer »Physiologischen Pflanzenanatomie«, auf eigenen eingehenden Untersuchungen fußend, den Stoff, den De Bary topographisch geordnet hatte, von physiologischen Gesichtspunkten aus gruppieren und neben Schwendeners mechanisches System noch acht weitere Gewebesysteme nach ihren Leistungen stellen. Seitdem haben Sie in fünf neuen Auflagen dieses Ihres Hauptwerkes, die immer rascher aufeinanderfolgten, die Fortschritte auf dem Gebiete der physiologischen Anatomie zusammenfassen können. Und stets war das, was Sie selbst in der Zwischenzeit erarbeitet hatten und einfügen mußten, das Wichtigste am Neuen. Die ersten aufgestellten neun Gewebesysteme waren so gut umschrieben, daß



sie von Auflage zu Auflage beibehalten wurden. Es kamen aber noch drei neue Systeme dazu, von denen das eine, das »Bewegungsgewebe«, zum guten Teil, die anderen, die »Sinnesorgane« und die »Reizleitenden Gewebe«, fast ausschließlich auf Ihren Entdeckungen beruhen.

Wie alle, die wirklich neue Bahnen brachen, hatten auch Sie, besonders im Anfang, den heftigen Widerstand derer zu fühlen bekommen, die weiter am Alten hingen. Aber kampfesfreudig und gewandt wußten Sie sich erfolgreich zu wehren; der Widerspruch verstummte mehr und mehr, und nun konnten Sie, nach gewonnener Schlacht, sich Ihres Sieges freuen und neue Probleme in Angriff nehmen. Sie haben in zahlreichen wichtigen Abhandlungen, die unsere Sitzungsberichte schmücken helfen, über die von Ihnen entdeckten verschiedenartigen Reizstoffe der pflanzlichen Gewebe, die Wund- und Teilungshormone, zu berichten gewußt.

Leider schienen dann eine Zeitlang körperliches Leiden und die Arbeitserschwerung, die nun einmal von der Emeritierung des experimentell arbeitenden Forschers untrennbar ist, Ihre Arbeitsfreudigkeit zu hemmen. Aber die drohenden Wolken haben sich zum Glück wieder verzogen, und die letzte Arbeit, die Sie der Akademie vor kurzem vorgelegt haben, zeigt auf einem überraschend neuen Gebiet ganz die alte Beobachtungsschärfe und die alte geniale Erfassung des Gesehenen, obwohl sie ohne den Apparat eines Institutes und mit den einfachsten Mitteln ausgeführt wurde.

Die Preußische Akademie wünscht bei Ihrem goldenen Doktorjubiläum von Herzen, daß es Ihnen vergönnt sein möge, noch manche reife Frucht zu ernten, und daß Sie sich in guter Gesundheit, von Altersbeschwerden wenig belästigt, neben der wissenschaftlichen Arbeit auch Ihre künstlerischen, musikalischen und literarischen Neigungen pflegend, noch lange eines freundlichen Alters erfreuen mögen!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 16. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 18. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Paschen sprach über Spektroskopische Lichtquellen.

Es wird diskutiert, unter welchen Bedingungen die ersten Spektren (Bogen- und erstes Funken-Spektrum) eines Atoms mit reicher Serienentwicklung auftreten. Das Glimmlicht im Innern einer zylindrischen Kathode entspricht in vieler Hinsicht den Forderungen. Verdampft das zu untersuchende Metall schwer, so besteht die Kathode aus ihm. Oder eine Kohlekathode enthält das Metall als Pulver im Inneren. Es verdampft durch Zerstäubung und ist als spärlich verteilter Fremdkörper zugegen, während die Entladung durch eine Edelgasatmosphäre geht. Die Wahl des Edelgases bestimmt die Anregungsstufe. Der Dampf leichter verdampfender Metalle kann außerdem selber Stromträger sein. Ein Kohlezylinder als Kathode kann in einer inerten Gasatmosphäre (Edelgas, Dämpfe einiger Metalle) so weit gereinigt werden, daß keine Banden oder Kohlelinien mehr auftreten. Die Kohlelinien entstammen wie die Banden stets gasförmigen Kohleverbindungen (z. B. CO), während die feste Kohle direkt nicht zerstäubt. Mit ihr bleibt auch die Selbstevakuierung aus. Ein Kohlezylinder offen oder nach H. Schüler fast geschlossen, ist daher die geeignetste Kathode für obige Zwecke.

2. Vorgelegt wurden die mit Unterstützung der Akademie erschienenen Arbeiten von Emmy Stein, Untersuchungen über die Radiomorphosen von Antirrhinum (Sonderabdruck 1926) und Otto Schmiedeknecht, Opuscula Ichneumonologica, Fasc. 43 (Blankenburg i. Thür. 1926).

Ausgegeben am 16. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXX. Gesamtsitzung. 25. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Wagner sprach über atmosphärische Störungen des drahtlosen Empfanges. (Ersch. später.)

Neben der gelegentlich beobachteten unmittelbaren Einwirkung elektrisch geladener Niederschläge, Sand- und Staubwolken auf die Antenne machen sich vor allem die Fernwirkungen von luftelektrischen Vorgängen bemerkbar, die selbst noch wenig erforscht sind. Man kann drei Haupttypen derartiger Störungen unterscheiden, die mit verschiedenen Wetterlagen zusammenhängen. Ein erheblicher Teil der Störungen ist entsprechend seiner Entstehung aus lokalen Witterungsverhältnissen von begrenzter Reichweite: doch hat Bäumler nachgewiesen, daß die Langwellenkomponenten starker Störungen gleichzeitig an weit entfernten Punkten in Abständen von Tausenden von Kilometern wahrnehmbar sind.

Für die quantitative Festlegung des Störungsspiegels wird der Vergleich der Störwirkung mit einem wohldefinierten und dosierbaren Normalgeräusch vorgeschlagen. Die Apparatur zur Erzeugung des Normalgeräuschs wurde vorgeführt.

Tieferen Einblick in die Natur der Störungen wird die Untersuchung des Verlaufs der einzelnen Störung, etwa durch die systematische Aufnahme des Frequenzspektrums, gewähren.

2. Hr. von Laue überreichte die von ihm gemeinsam mit R. von Mises herausgegebenen Stereoskopbilder von Kristallgittern (Berlin 1926).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Freiburg i. Br. Hrn. Dr. Ernst Fabricius zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Wilhelm Braune in Heidelberg am 10. November durch den Tod verloren.



Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen.

Von Dr. Richard Brauer
in Königsberg.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 4. November 1926 [s. oben S. 359].)

Enthält ein Zahlkörper K den Charakter einer irreduziblen Gruppe $\mathfrak{H}$ von linearen Substitutionen in f Veränderlichen, so versteht man nach Hrn. I. Schur[1] unter dem Index m von $\mathfrak{H}$ in bezug auf K den kleinsten Wert unter den Graden derjenigen algebraischen Körper über K, in denen $\mathfrak{H}$ bei geeigneter Koordinatenwahl rational darstellbar ist[2]; m ist ein Teiler von f. $\mathfrak{H}$ habe genau a linear unabhängige Invarianten n-ten Grades. Dann soll gezeigt werden, daß m nur durch Primzahlen teilbar ist, die in $a \cdot n$ aufgehen. Dieser Satz erleichtert die meist schwierige Berechnung von m, da die Invariantenanzahlen bei allen endlichen und vielen unendlichen Gruppen bekanntlich allein aus dem Charakter von $\mathfrak{H}$ berechnet werden können. Im § 1 der folgenden Arbeit beweise ich Ergebnisse des Hrn. Speiser[3] in anderer Weise. Übrigens ergeben sich die Speiserschen Sätze über endliche Gruppen mit reellem Charakter fast unmittelbar aus dem genannten Satze.

§ 1.

Der Zahlkörper K enthalte den Charakter der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade f, $\mathfrak{H}$ sei in dem algebraischen Körper r-ten Grades K (ϑ) über K rational. Die Konjugierten zu ϑ seien $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$; $\mathfrak{G}$ sei die Galoissche Gruppe von K (ϑ) in bezug auf K. Gibt es in $\mathfrak{G}$ eine Permutation, die ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$ überführt, so nennen wir die Indexpaare α, β und γ, δ äquivalent. Alle Indexpaare zerfallen dann in Klassen von äquivalenten.

[1] Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1906, S. 164; Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Trans. of the Am. Math. Soc. Ser. 2, Vol. XV. 1909, S. 159. Diese Arbeiten zitiere ich mit A und B.

[2] Die Voraussetzung, daß K den Charakter enthält, bedeutet für das Problem keine Einschränkung. Bei unendlichen Gruppen muß man die Existenz eines algebraischen Körpers über K, in dem sich $\mathfrak{H}$ rational darstellen läßt, voraussetzen.

[3] A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie, Math. Zeitschrift 5. 1919, S. 1; Bemerkungen des Hrn. I. Schur zu dieser Arbeit ebendort S. 7.

Drückt man in $\mathfrak{H}$ alle Elemente rational durch ϑ mit Koeffizienten aus K aus und ersetzt ϑ durch ϑ_ϱ, so geht $\mathfrak{H}$ in eine isomorphe irreduzible, in K (ϑ_ϱ) rationale Gruppe $\mathfrak{H}_\varrho$ über, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Alle Gruppen $\mathfrak{H}_\varrho$ haben denselben Charakter, sind also ähnlich[1]. Aus jeder Klasse von Indexpaaren werde ein Repräsentant α, β herausgegriffen. Dann gibt es eine in K $(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ rationale Matrix $P_{\alpha\beta}$, so daß

$$(1) \qquad \mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} \mathfrak{H}_\beta, \quad |P_{\alpha\beta}| \neq 0$$

ist. Wendet man auf (1) eine Permutation aus $\mathfrak{G}$ an, die ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ überführt — α, β und γ, δ sind also äquivalent — und geht dabei $P_{\alpha\beta}$ in eine gewisse in K $(\vartheta_\gamma, \vartheta_\delta)$ rationale Matrix $P_{\gamma\delta}$ über, so ist $|P_{\gamma\delta}| \neq 0$ und $P_{\gamma\delta}$ transformiert $\mathfrak{H}_\gamma$ in $\mathfrak{H}_\delta$. Die Matrizen $P_{\alpha\beta}$ sind jetzt nicht nur für die Repräsentanten, sondern für alle Indexpaare α, β definiert, derart, daß (1) allgemein gilt und Matrizen mit äquivalenten Indexpaaren entsprechend algebraisch konjugiert sind. Wir können annehmen, daß $P_{\alpha\alpha}$ die Einheitsmatrix ist.

$\mathfrak{H}^*$ sei die Gruppe, die vollständig in die Bestandteile $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$ zerfällt, P^* sei die aus r^2 Matrizen f-ten Grades zusammengesetzte Matrix $(P_{\alpha\beta})$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$. Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \mathfrak{H}^* P^* = P^* \mathfrak{H}^* .$$

Bekanntlich[2] kann man durch Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{H}^*$ in eine in K rationale Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ überführen; wir zeigen, daß P^* bei derselben Transformation in eine in K rationale Matrix $\overline{P}$ übergeht. Es sei etwa $P_{\alpha\beta} = (p_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)})$, ($\varkappa$ Zeilen-, λ Spaltenindex; $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, f$). Zuerst permutieren wir in P^* Zeilen und Spalten in gleicher Weise, wir bringen die $((\alpha - 1) f + \varkappa)$te Zeile und Spalte an die $((\varkappa - 1) r + \alpha)$te Stelle ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, f$). Ist $Q_{\varkappa\lambda} = (p_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)})$ (α Zeilen-, β Spaltenindex; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$), so geht dabei P^* in die aus f^2 Matrizen r-ten Grades zusammengesetzte Matrix $M = (Q_{\varkappa\lambda})$, $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, f)$ über. Es sei

$$R = (\vartheta_\sigma^{r-\varrho})_{\varrho,\sigma} = \begin{pmatrix} \vartheta_1^{r-1} & \vartheta_2^{r-1} & \ldots & \vartheta_r^{r-1} \\ \vartheta_1^{r-2} & \vartheta_2^{r-2} & \ldots & \vartheta_r^{r-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} R & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R \end{pmatrix},$$

wo T genau f-mal R enthält. Dann wird $TMT^{-1} = (R Q_{\varkappa\lambda} R^{-1})$. Bekanntlich[3] hat R^{-1} die Form $(\varphi_\sigma(\vartheta_\varrho))$, ($\varrho$ Zeilen-, σ Spaltenindex; $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r$),

[1] Vgl. Frobenius und Schur, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1906, S. 209.

[2] Vgl. dazu B, S. 162.

[3] Vgl. etwa E. Hecke, Göttinger Nachrichten 1917, S. 81. Ist

$$F(x) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2) \ldots (x - \vartheta_r),$$

so kann man φ_σ einführen durch

$$\frac{1}{F'(y)} \cdot \frac{F(x) - F(y)}{x - y} = \sum_{\sigma=1}^{r} \varphi_\sigma(y) x^{r-\sigma}.$$

wo die ϕ_σ rationale Funktionen mit Koeffizienten aus K sind. Dann wird das Element mit den Indizes ϱ, σ in $RQ_{\varkappa\lambda}R^{-1}$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \vartheta_\alpha^{r-\varrho} p_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)} \phi_\sigma(\vartheta_\beta) = a_{\varrho\sigma}.$$

Wendet man auf $a_{\varrho\sigma}$ irgendeine Permutation G von $\mathfrak{G}$ an, bei der etwa ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ übergeht, (wo also α, β und γ, δ äquivalent sind), so geht. da $P_{\alpha\beta}$ in $P_{\gamma\delta}$ übergeht, $p_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ in $p_{\varkappa\lambda}^{(\gamma,\delta)}$ über. Da $\gamma.\delta$ mit $\alpha.\beta$ alle Indexpaare durchläuft, geht $a_{\varrho\sigma}$ in

$$\sum_{\gamma,\delta=1}^{r} \vartheta_\gamma^{r-\varrho} p_{\varkappa\lambda}^{(\gamma,\delta)} \phi_\sigma(\vartheta_\delta)$$

über, bleibt also bei allen G ungeändert und gehört daher zu K. Daher ist $RQ_{\varkappa\lambda}R^{-1}$ und also auch $TMT^{-1} = \bar{P}$ in K rational. Die Umformung, durch die P^* in $\bar{P}$ übergeführt wurde, bedeutet eine Ähnlichkeitstransformation. bei Anwendung derselben Transformation geht $\mathfrak{H}^*$ nach B S. 162 in eine in K rationale Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ über; man kann das auch analog wie bei P^* schließen. Aus (2) folgt

$$\bar{\mathfrak{H}}\bar{P} = \bar{P}\bar{\mathfrak{H}}. \tag{3}$$

$P_{\alpha\beta}$ transformiert $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_\beta$, $P_{\beta\gamma}$ ebenso $\mathfrak{H}_\beta$ in $\mathfrak{H}_\gamma$; $P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma}$ also $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_\gamma$. $P_{\alpha\gamma}$ transformiert ebenfalls $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_\gamma$; da eine derartige Transformation aber bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt ist, folgt

$$P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1.2.\ldots r) \tag{4}$$

wo die $c_{\alpha\beta\gamma}$ ein System von r^3 Zahlen, das Faktorensystem von $\mathfrak{H}$, sind[1]. Durch $\mathfrak{H}$ sind die $P_{\alpha\beta}$ und die $c_{\alpha\beta\gamma}$ nicht eindeutig bestimmt, man darf $P_{\alpha\beta}$ durch $k_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}$ ersetzen, wo die $k_{\alpha\beta}$ den folgenden Bedingungen (a) genügen: 1. $k_{\alpha\beta} \neq 0$ ist eine Zahl aus $K(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$. 2. Sind α, β und γ, δ äquivalent, so geht $k_{\alpha\beta}$ in $k_{\gamma\delta}$ über, wenn man ϑ_α durch ϑ_γ, ϑ_β durch ϑ_δ ersetzt. 3. Für alle α ist $k_{\alpha\alpha} = 1$. An die Stelle von $c_{\alpha\beta\gamma}$ tritt dann $c'_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}} c_{\alpha\beta\gamma}$.

Kann man die $k_{\alpha\beta}$ so bestimmen, daß alle $c'_{\alpha\beta\gamma} = 1$ werden, so kann man von vornherein $c_{\alpha\beta\gamma} = 1$ annehmen. Aus (4) folgt

$$P^{*2} = (P_{\alpha\beta})(P_{\alpha\beta}) = \left(\sum_{\nu=1}^{r} P_{\alpha\nu}P_{\nu\beta}\right) = (rP_{\alpha\beta}) = rP^*.$$

Daher hat P^* nur die charakteristischen Wurzeln 0 und r, und seine Elementarteiler sind alle linear. Da in der Hauptdiagonale von P^* überall 1 steht, hat P^* die Spur $r \cdot f$, also ist r eine f-fache Wurzel, und P^* hat den Rang f, ebenso die zu P^* ähnliche Matrix $\bar{P}$. Nach dem Schurschen Prinzip[2]

---

[1] Vgl. die auf S. 410 unter [3] genannte Arbeit des Hrn. I. Schur.

[2] B S. 166, Beweis des Satzes 1. Die Verwendung der Elementarteilertheorie läßt sich übrigens vermeiden.

folgt, daß die in K rationale, mit $\bar{P}$ vertauschbare Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ einen in K rational darstellbaren Bestandteil f-ten Grades enthält, ebenso auch $\mathfrak{H}^*$. Da $\mathfrak{H}^*$ nur die zu $\mathfrak{H}$ ähnlichen Bestandteile $\mathfrak{H}_\varrho$ vom Grade f besitzt, muß sich $\mathfrak{H}$ in K rational darstellen lassen. *Kann man erreichen, daß das Faktorensystem einer Gruppe $\mathfrak{H}$ nur aus Zahlen 1 besteht, so läßt sich $\mathfrak{H}$ in K rational darstellen.* — Unter etwas anderen Voraussetzungen findet sich dieses Resultat in der oben genannten Arbeit des Hrn. Speiser.

Im allgemeinen Fall, wenn also die $c_{\alpha\beta\gamma}$ nicht alle 1 sind, wird die charakteristische Determinante von $\bar{P}$ gleich der f-ten Potenz der charakteristischen Determinante von $(c_{\varkappa\lambda 1})$, $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r)$. Da diese Bemerkung im folgenden nicht verwendet wird, soll der ziemlich einfache Beweis derselben unterdrückt werden. Da $\bar{P}$ in K rational und mit der in K rationalen Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ vertauschbar ist, kann diese Bemerkung mitunter bei der arithmetischen Untersuchung von $\mathfrak{H}$ mit Nutzen verwendet werden.

§ 2.

Im allgemeinen kann man die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ nicht so bestimmen, daß $c_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{k_{\alpha\gamma}}{k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}}$, also $c'_{\alpha\beta\gamma} = 1$ wird. Dagegen gibt es, wie man leicht sieht[1], ganze positive Zahlen λ, so daß

$$c^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{k_{\alpha\gamma}}{k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}} \tag{5}$$

wird und die Konstanten $k_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (a) erfüllen. Die kleinste Zahl $\lambda = l$, für die sich (5) erfüllen läßt, heiße der zum Faktorensystem gehörige Exponent. Läßt sich (5) auch für $\lambda = l_1$ erfüllen, so gilt das gleiche, wenn λ der kleinste nichtnegative Rest von l_1 (mod l) ist. Dieser Rest ist also 0; alle in (5) für λ möglichen Zahlen sind durch l teilbar.

I. Hat die irreduzible Gruppe $\mathfrak{H}$ in bezug auf K *den Index m und gehört zu dem Faktorensystem von $\mathfrak{H}$ der Exponent l, so ist l ein Teiler von m, der durch alle Primteiler von m teilbar ist.*

Beweis: 1. Es gibt eine zu $\mathfrak{H}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{J}$, die in einem Körper K(η) vom Grade m über K rational ist. Die Konjugierten zu η seien

$$\eta = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m;$$

ebenso die zu $\mathfrak{J}$ algebraisch konjugierten Gruppen $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_m$. Dann sind alle Gruppen $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{J}_u$ ähnlich, also gibt es in K$(\vartheta_\alpha, \eta_u)$ rationale Matrizen $R_{\alpha u}$, so daß $|R_{\alpha u}| \neq 0$,

$$R^{-1}_{\alpha u}\mathfrak{H}_\alpha R_{\alpha u} = \mathfrak{J}_u, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ u = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Hat der Körper K(ϑ, η) in bezug auf K die Galoissche Gruppe $\mathfrak{K}$, und geht bei einer Permutation K von $\mathfrak{K}$ etwa ϑ_α in ϑ_δ, η_u in η_v über, so erkennt

[1] Die Existenz von Zahlen λ ergibt sich beim Beweis von I. Man kann sie auch unmittelbar aus (4) erkennen, vgl. die auf S. 410 unter [3] genannte Schursche Arbeit.



man analog wie in § 1, daß man annehmen kann, daß bei Anwendung von K gerade $R_{\alpha\mu}$ in $R_{\delta\nu}$ übergeht. $R_{\alpha\mu}$ transformiert $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{J}_\mu$, $R_{\beta\mu}^{-1}$ entsprechend $\mathfrak{J}_\mu$ in $\mathfrak{H}_\beta$, also transformiert $R_{\alpha\mu} R_{\beta\mu}^{-1}$ ebenso wie $P_{\alpha\beta}$ die Gruppe $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_\beta$. Folglich können sich diese Matrizen nur um einen von 0 verschiedenen Zahlenfaktor unterscheiden.

$$(6) \qquad R_{\alpha\mu} R_{\beta\mu}^{-1} = z_{\alpha\mu\beta} P_{\alpha\beta} .$$

Wendet man auf (6) eine Permutation K aus $\mathfrak{K}$ an, und geht dabei etwa ϑ_α in ϑ_δ, ϑ_β in ϑ_ε, η_μ in η_ν über, so folgt, daß die im Körper $\mathrm{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \eta_\mu)$ enthaltene Größe $z_{\alpha\mu\beta}$ gerade in $z_{\delta\nu\varepsilon}$ übergeht. Setzt man $P_{\alpha\beta}$ und analog $P_{\beta\gamma}$ und $P_{\alpha\gamma}$ aus (6) in (4) ein, so findet man

$$(z_{\alpha\mu\beta}^{-1} R_{\alpha\mu} R_{\beta\mu}^{-1})(z_{\beta\mu\gamma}^{-1} R_{\beta\mu} R_{\gamma\mu}^{-1}) = (z_{\alpha\mu\gamma}^{-1} R_{\alpha\mu} R_{\gamma\mu}^{-1}) \cdot c_{\alpha\beta\gamma} ,$$

$$(7) \qquad c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{z_{\alpha\mu\gamma}}{z_{\alpha\mu\beta} \cdot z_{\beta\mu\gamma}} .$$

Man setze $k_{\alpha\beta} = \prod_{\mu=1}^{m} z_{\alpha\mu\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$; dann geht bei Anwendung von K aus $\mathfrak{K}$ gerade $k_{\alpha\beta}$ in $\prod_{\nu=1}^{m} z_{\delta\nu\varepsilon} = k_{\delta\varepsilon}$ über, da ν mit μ alle Werte von $1, 2, \ldots, m$ durchläuft. Ist $\alpha = \delta$, $\beta = \varepsilon$, so geht also $k_{\alpha\beta}$ bei Anwendung von K in sich über und ist daher nach einem Satze der Galoisschen Theorie in $\mathrm{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ enthalten. Im allgemeinen Fall folgt, daß $k_{\alpha\beta}$ in $k_{\delta\varepsilon}$ übergeht, wenn man $k_{\alpha\beta}$ durch ϑ_α und ϑ_β ausdrückt und diese durch ϑ_δ bzw. ϑ_ε ersetzt. Durch Multiplikation von (7) über alle μ folgt

$$(8) \qquad c_{\alpha\beta\gamma}^{m} = \frac{k_{\alpha\gamma}}{k_{\alpha\beta} k_{\beta\gamma}} . \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r)$$

Wegen $P_{\alpha\alpha} = E$ ergibt sich aus (4) sofort $c_{\alpha\alpha\alpha} = 1$, also folgt für $\alpha = \beta = \gamma$ aus (8) $k_{\alpha\alpha} = 1$, und das System der $k_{\alpha\beta}$ erfüllt die Bedingungen (a). Also ist in (5) $\lambda = m$ zulässig und daher m durch l teilbar.

2. p sei Primteiler von m, aber nicht von l. Die höchste Potenz von p, die in der Ordnung der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ aufgeht, sei p^s. Nach dem Sylowschen Satz gibt es in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe der Ordnung p^s. Der zugehörige Teilkörper K_1 von $\mathrm{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ ist ein algebraischer Körper über K, dessen Relativgrad nicht durch p und auch nicht durch m teilbar ist; daher ist $\mathfrak{H}$ in K_1 nicht rational darstellbar[1]. In bezug auf K_1 als Grundkörper sei m_1 der Index von $\mathfrak{H}$, $c^*_{\rho\sigma\tau}$ das Faktorensystem, l_1 der zugehörige Exponent. Das System $c^*_{\rho\sigma\tau}$ besteht aus allen Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ oder einem Teil dieses Systems, folglich ist für die Zahlen $c^*_{\rho\sigma\tau}$ ein System zu (5) analoger Gleichungen mit $\lambda = l$ möglich, daher ist l_1 Teiler von l, also zu p teilerfremd. Da ferner $\mathfrak{H}$ im Körper $\mathrm{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ vom Grade p^s über K_1 rational ist, ist m_1 eine Potenz von p. Aus dem unter 1. Gezeigten folgt, daß

[1] Nach A Satz VI, B Satz VII.

l_1 in m_1 aufgeht, also ist $l_1 = 1$. Dann folgt aus § 1, daß $\mathfrak{H}$ in K_1 rational darstellbar ist; das ist ein Widerspruch. Daher geht jeder Primteiler von m in l auf.

§ 3.

Es seien $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ k Systeme von je f unabhängigen Variabeln, die stets kogredient transformiert werden sollen. $F_1, F_2, \ldots, F_t$ seien homogene rationale Funktionen des Grades n in allen $k \cdot f$ Variabeln $x^{(\nu)}$ mit Koeffizienten aus K. Wendet man auf alle Variabelnsysteme kogredient irgendeine lineare Transformation P an, so soll F_τ in eine Funktion $(F_\tau)_P$ übergehen, die sich linear durch $F_1, F_2, \ldots, F_t$ ausdrückt. Wir nennen eine lineare Verbindung der F_τ mit konstanten Koeffizienten, die bei allen Transformationen von $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt, eine zum System der F_τ gehörige Invariante von $\mathfrak{H}$[1]. $J_1, J_2, \ldots, J_a$ sei ein vollständiges System von linear unabhängigen derartigen Invarianten; offenbar kann man diese mit Koeffizienten aus $K(\vartheta)$ wählen. Ersetzt man ϑ durch ϑ_α, so mögen die Invarianten in $J_1^{(\alpha)}, J_2^{(\alpha)}, \ldots, J_a^{(\alpha)}$ übergehen. Diese bilden ein vollständiges System von den zu F_τ gehörigen Invarianten von $\mathfrak{H}_\alpha$; wir bezeichnen das System abgekürzt mit $J^{(\alpha)}$. Wendet man $P_{\alpha\beta}$ auf die $J^{(\alpha)}$ an, so erhält man offenbar zum System der F_τ gehörige Invarianten von $\mathfrak{H}_\beta$ mit Koeffizienten aus $K(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$. Diese müssen sich linear durch die $J^{(\beta)}$ darstellen lassen.

$$(J^{(\alpha)})_{P_{\alpha\beta}} = A_{\alpha\beta} J^{(\beta)}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

Dabei ist $A_{\alpha\beta}$ eine Matrix a-ten Grades mit nicht verschwindender Determinante und mit Koeffizienten aus $K(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$. Ist α, β zu γ, δ äquivalent, und ersetzt man in (9) ϑ_α durch ϑ_γ, ϑ_β durch ϑ_δ, so folgt, daß $A_{\alpha\beta}$ in $A_{\gamma\delta}$ übergeht. Aus (9) ergibt sich

$$(J^{(\alpha)})_{P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma}} = A_{\alpha\beta}((J^{(\beta)})_{P_{\beta\gamma}}) = A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} (J^{(\gamma)}). \tag{10}$$

Aus (4) folgt, da die $J^{(\alpha)}$ homogen vom n-ten Grade sind,

$$(J^{(\alpha)})_{P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma}} = (J^{(\alpha)})_{c_{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\gamma}} = c_{\alpha\beta\gamma}^n (J^{(\alpha)})_{P_{\alpha\gamma}} = c_{\alpha\beta\gamma}^n A_{\alpha\beta} (J^{(\gamma)}). \tag{11}$$

Da $J_1^{(\gamma)}, J_2^{(\gamma)}, \ldots, J_a^{(\gamma)}$ linear unabhängig sind, erhält man durch Vergleichen von (10) und (11)

$$A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}^n A_{\alpha\gamma}. \tag{12}$$

Ist $k_{\alpha\beta}^{-1}$ die Determinante von $A_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$, so folgt aus (12)

$$c_{\alpha\beta\gamma}^{a \cdot n} = \frac{k_{\alpha\gamma}}{k_{\alpha\beta} \cdot k_{\beta\gamma}}.$$

---

[1] In diesem Invariantenbegriff sind alle üblichen Typen von algebraischen absoluten Invarianten enthalten.

Die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ erfüllen die Bedingungen (*a*) in § 2, es ist also in (5) $\lambda = a \cdot n$ möglich und daher l ein Teiler von $a \cdot n$. Aus I folgt

II. Hat eine irreduzible Gruppe $\mathfrak{H}$ genau a linear unabhängige Invarianten n-ten Grades von irgendeinem Typ, so können in dem Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf einen Zahlkörper nur Primzahlen aufgehen, die in $a \cdot n$ aufgehen[1].

Kann man z. B. verschiedene Invariantentypen so wählen, daß die zugehörigen Zahlen $a \cdot n$ zusammen mit dem Grade f von $\mathfrak{H}$ ein System teilerfremder Zahlen bilden, so ist der Index 1, $\mathfrak{H}$ ist im Körper des Charakters rational darstellbar.

Eine endliche Gruppe mit reellem Charakter besitzt abgesehen von konstanten Faktoren eine einzige invariante Bilinearform, man darf also $a = 1$. $n = 2$ wählen, der Index muß eine Potenz von 2 sein. Ist f ungerade, folgt $m = 1$. Das ist ein Speiserscher Satz; unter Verwendung von A Satz IXa oder direkt ergibt sich als Spezialfall auch der andere Speisersche Satz.

Jeder rationale homogene Homomorphismus $\mathfrak{A}$ der allgemeinen homogenen affinen Gruppe in f Variabeln liefert ein System von Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_t$ mit rationalen Koeffizienten (und umgekehrt). Liefert der Homomorphismus $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{H}$ die Darstellung $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{R}$ vollständig reduzibel, und enthält es die Hauptdarstellung etwa a-mal, so hat $\mathfrak{H}$ genau a zum System $F_1, F_2, \ldots, F_t$ gehörige Invarianten.

III. Ist die Darstellung einer irreduziblen Gruppe $\mathfrak{H}$, die ein homogener rationaler Homomorphismus der allgemeinen affinen Gruppe für $\mathfrak{H}$ liefert, vollständig reduzibel, und enthält sie a-mal die Hauptdarstellung, so können in dem Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf einen Zahlkörper nur Primzahlen aufgehen, die in $a \cdot n$ aufgehen. Dabei bedeutet n die Dimension der homogenen Funktionen, die bei dem rationalen Homomorphismus auftreten.

Ist $\mathfrak{H}$ endlich, so ist $\mathfrak{R}$ sicher vollständig reduzibel.

---

[1] Enthält der Körper nicht den Charakter von $\mathfrak{H}$, so denken wir uns diesen adjungiert. dabei ändert sich der Index nicht; vgl. A Satz VIII. Die Sätze II und III werde ich später noch verschärfen und verallgemeinern.

Maßverhältnisse an den oberen Gliedmaßen des Menschen und den Gliedmaßen der Menschenaffen.

Von R. Fick.

(Vorgetragen am 18. März 1926 [s. oben S. 77].)

Die Untersuchung, über die ich heute hier berichten möchte, schließt sich an die Arbeit über die Hände meines unvergeßlichen Amtsvorgängers W. v. Waldeyer an, über die ich vor einigen Jahren hier sprach[1]. Als ich die Längenverhältnisse an Waldeyers Händen und Armen mit den Angaben des anatomischen Schrifttums verglich, drängte sich mir nämlich das Bedürfnis auf, die Längenverhältnisse auch aus eigener Erfahrung an einer größeren Anzahl von Armen und Händen kennenzulernen. Denn bei der Vergleichung der Maße an Waldeyers Händen mit denen anderer Arme und Hände zeigte sich mir recht eindringlich, daß man sich beim Vergleich der einzelnen Knochenlängen. z. B. der einzelnen Fingerknochen, nicht an die gewöhnlichen Skelette anatomischer Sammlungen halten darf, sondern unbedingt sich nur auf sog. »eigenes Material« verlassen kann, d. h. Knochen untersuchen muß, deren Herkunft und Zusammengehörigkeit sowie Reihenfolge man selbst geprüft hat.

Die einzelnen Knochen der Hand bzw. Finger z. B. müssen, noch ehe sie in den Gelenken voneinander getrennt werden, also vor der Skelettierung, einzeln mit Nummern versehen und am besten gleich mit Draht aneinander befestigt oder in Säckchen eingebunden werden, wie es auch schon Pfitzner seinerzeit hervorgehoben hat. Das Messen so vieler Knochen ist natürlich keine kleine Mühe, sondern eine sehr zeitraubende, nicht gerade kurzweilige Arbeit. Aber heutzutage wird so viel über sog. Rassen- und Urmenscheneigentümlichkeiten gesprochen und geschrieben, bei denen gerade auch die Größenverhältnisse der Gliedmaßenknochen eine Rolle spielen, daß es offenbar nicht unwichtig ist, wenn möglichst viele solche Messungen an wirklich ein-

[1] R. Fick. Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1923 Heft 24 mit 2 Tafeln.



wandfreiem Material und mit einwandfreier Meßart vorgenommen werden. Leider fußen die Angaben der Rassenforscher ja vielfach durchaus nicht auf einwandfreien, gründlichen Messungen an großen Knochenmengen und den dadurch zutage geförderten Tatsachen, sondern oft auf vorgefaßten Meinungen und Beobachtungen an spärlichem »Material«. Von diesem Gesichtspunkt aus dürften die folgenden, recht mühsam gewonnenen, »langweiligen« Zahlenreihen und Feststellungen doch etwas Lebensberechtigung gewinnen und nicht als gänzlich überflüssig und unnütz betrachtet werden.

Ich maß die mazerierten 24 einzelnen Hauptknochen von gegen 70 oberen menschlichen Gliedmaßen durch, d. h. die Länge der Knochen des Schultergürtels, von Schulterblatt und Schlüsselbein, von Oberarmbein, Speiche und Elle sowie der einzelnen Mittelhand- und Fingerknochen. Von den Nagelgliedern maß ich auch die Breite ihrer Grundfläche und bei einer geringeren Zahl auch die Breite der sog. »Hufrauhigkeit« (Tuberositas unguicularis).

Meßart.

Beim Schulterblatt maß ich nur die Ausdehnung in der Längenausdehnung des Körpers, da ich mich auch bei den anderen Knochen der oberen Gliedmaße, abgesehen von den Nagelgliedern der Finger, nur mit den »Längsmaßen« befaßte. Ich bestimmte beim Schulterblatt daher den Abstand der Spitze oder »des höchsten Punktes des oberen Winkels«, wie Hedwig Frey besser sagt, von der »unteren Spitze« oder des »tiefsten Punktes des unteren Winkels«. Dieser Abstand wird in der Menschenkunde leider noch immer mit dem Namen »Breite des Schulterblattes« bezeichnet, während der Abstand der Pfannenmitte von der Wurzel der Schultergräte am medialen Rand als »Länge des Schulterblattes« bezeichnet wird. Es ist dringend zu wünschen, daß diese für die höheren Affen und Menschen gänzlich irreführende und widersinnige Bezeichnung endlich verlassen wird. Auch wenn man den Ausdruck »morphologische« Breite bzw. Länge dafür verwendet, bleibt er für die Anthropologie doch höchst unzweckmäßig. Den Namen »physiologische Länge« kurz gesagt »für die Schultergrätenausdehnung« zu wählen, wie es H. Frey[1] in ihrer wegen der zahlreichen darin mitgeteilten neuen Tatsachen sehr verdienstlichen Arbeit vorgeschlagen hat, geht auch nicht an, denn die Stütz- und Stemmtätigkeit der Schulterplatte für den Arm in der Fortsetzung von dessen Richtung ist sicher bei der ganz überwiegenden Mehrzahl der Armbewegungen, namentlich der höheren »Primaten«, nicht die Haupttätigkeit der Schulterplatte. Die verschiedene Ausdehnung des Schulterblattes in der Richtung der Schultergräte ist daher gewiß nicht von der Druckverschiedenheit abhängig. Das hat auch Aichel (Anat. Verhdlg. Wien 1925) ganz mit Recht hervorgehoben. Die Ausdehnung der Schulterplatte und die größere oder kleinere Erhebung der Schultergräte steht offenbar, ähnlich wie beim Scheitelkamm des Gorilla, zur Vergrößerung der Muskelursprungsfelder in engster Beziehung. Die Form-

[1] H. Frey, Untersuchungen über die Scapula usw., Ztschr. f. Anat. u. Entw. Bd. 68, 1923.

verschiedenheiten des Schulterblattes werden wir, das möchte ich nebenbei bemerken, nur dann wirklich verstehen lernen, wenn wir die Lebensgewohnheiten, d. h. hier die Armbewegungen der zu vergleichenden Tiere ganz genau verfolgen, Beobachtungen, die Herr Kollege Böker in Freiburg mit Recht in den Vordergrund der vergleichenden Anatomie schiebt. Wir müßten zum Verständnis der Schulterblattverschiedenheit, wie ich schon in Wien (1925) bei der Aussprache über den Vortrag Aichels andeutete, die Querschnittverhältnisse der Muskeln beider Grätengruben und ihre Wirkungsweise auf den Arm bei den verschiedenen Tieren bzw. Menschenpersonen genau kennen, um sie wirklich zu verstehen. Freilich ist auch da Vorsicht in den Schlüssen geboten. So möchte ich die wirklich sehr auffällige Ähnlichkeit des Schulterblattes des Nasenaffen und des Menschen nicht auf die bei beiden, wie es scheint, ähnlichen Schwimmbewegungen zurückführen, wie es Aichel tut, da diese beim Menschen und wohl auch beim Nasenaffen gewiß niemals eine ausschlaggebende Rolle in den Lebensbedingungen und somit der Formbeeinflussung besessen haben. Jedenfalls ist, wie bemerkt, der Ausdruck »physiologische Länge« ebenso wie »morphologische Länge« oder gar »Länge« schlechthin, im bisherigen Sinn, unzweckmäßig; der letztere ist, wie gesagt, für die Menschenkunde einfach widersinnig.

Als »Oberarmlänge« maß ich den Abstand der Berührungslinien an die Kuppe des Oberarmkopfes und des Oberarmköpfchens senkrecht zur Längsachse des Knochens. Ähnlich bei der Speiche den Abstand der Berührungslinien an den Tellerrand, wo er am höchsten war, d. h. am weitesten oberarmwärts auslud, und an die Spitze des Griffelfortsatzes, senkrecht zur »Seelenachse«. Bei der Elle maß ich den Abstand der Berührungslinie an die Spitze des Ellengriffelfortsatzes und an die knorpellose Rinne oder Querfurche (s. R. Fick, Handbuch der Gelenklehre, I. Band) in der Mitte der Ellenzange senkrecht zur Seelenachse der Elle[1]. Diese Meßpunkte lassen sich mit Ausnahme des Oberarmkopfes auch beim Lebenden feststellen. Bei den Mittelhand- und Fingerknochen maß ich, wie in der vorigen Arbeit über die Hand, nach Pfitzners[2] Vorgang die Entfernung der Mitte der Gelenkflächenkuppen bzw. -pfannen, nicht die Entfernung der Kuppen von den äußersten Vorsprüngen der Grundflächen, wie es manchmal geschieht, weil sich bei der Pfitznerschen Art die so gemessenen Gliedlängen zur Gesamtlänge des ganzen »Handstrahls« einfach zusammenzählen lassen.

A. Messungen beim Menschen.

I. Absolute Maße.

In einer Zahlentafel am Schluß der Arbeit habe ich alle an den einzelnen Gliedmaßen gefundenen Einzelmaße niedergelegt, so daß noch beliebige Vergleichungen nach Bedarf daraus berechnet werden können. Hier

[1] Da der obere Ellenschnabel für die Länge des Unterarmes belanglos ist.

[2] Pfitzner, Beiträge z. Kenntnis des Extremitätenskeletts, I. Abteilg. In: Schwalbes Morpholog. Arbeiten. Jena. Gust. Fischer 1892.

will ich zunächst nur über die Mittelwerte der Längen an den von mir untersuchten Knochen berichten.

Von 62 Schlüsselbeinen waren 34 linke, 28 rechte.

Die mittlere Länge bei den linken betrug 14.45 cm
» » » » » rechten » 14.21 »
» » » aller 62 Schlüsselbeine » 14.34 »

NISHIZUKA[1] fand bei 10 japanischen Neugeborenen die Länge 4.49 cm, bei 20 Erwachsenen errechnete ich aus seinen nach dem Geschlecht getrennten Angaben als Mittel 13.49 cm, ebenso aus KOGANEIS Angaben über 40 Fälle 13.90 cm und aus SUZUKIS 60 Fällen 13.37 cm: Die japanischen Schlüsselbeine sind also etwa $^1/_2$— 1 cm kürzer als bei meinem Material.

Von 65 Schulterblättern waren 35 linke, 30 rechte.

Als proximo-distale Mittellänge für die linken ergab sich 15.30 cm
» » » » » rechten » » 14.98 »
» » » » alle » » 15.10 »

NISHIZUKA fand bei 10 japanischen Neugeborenen die Länge 4.38 cm. Aus seinen Angaben über 10 ♀ und 10 ♂ Erwachsene berechnete ich als Mittel 14.08 cm, aus KOGANEIS 79 Fällen 14.58 cm, aus SUZUKIS 60 Fällen 14.38 cm. Aus allen japanischen Erwachsenen ergibt sich das Mittel 14.4 cm, also eine etwas weniger als 1 cm kleinere Länge als bei meinem Material.

Von 68 Oberarmen waren 37 linke, 31 rechte.

Die mittlere Länge links war 31.6 cm
» » » rechts » 31.3 »
» » » für alle » 31.5 »

NISHIZUKA fand bei 10 neugeborenen Japanern die Länge im Mittel 7.96 cm. Aus seinen je 10 weiblichen und 10 männlichen Erwachsenen berechnete ich die mittlere Länge auf 27.76 cm, aus den 60 Fällen SUZUKIS auf 27.95 cm.

KOGANEI maß die Länge bis zum distalsten Punkt der Rolle, nicht zum Köpfchen; er fand bei 48 ♂ 29.57 cm, bei 31 ♀ 27.45 cm.

MYAKE fand sie bei 20 Japanern gemischten Geschlechtes im Mittel 28.29 cm. Die mittlere Oberarmlänge aus all diesen Maßen bei japanischen Erwachsenen berechnete ich auf 27.98 cm. Die Japaner-Oberarme scheinen daher etwa 3 cm kürzer als bei meinem Material.

Von 68 Ellen waren 37 linke, 31 rechte.

Die mittlere »Länge« (Meßart s. S. 419) war links 22.4 cm
» » » » rechts 22.4 »
» » » » für alle 22.4 »

[1] NISHIZUKA, Beiträge zur Osteologie der Föten, Neugeborenen und Kinder nebst Erwachsenen (Japaner). Knochen der Extremitäten samt Schulter und Becken. In: Ztschr. f. Morph. u. Anthrop. Bd. 25. 1926.



Die japanischen Forscher nahmen andere Ellenmaße.

Von 68 Speichen waren 37 linke 31 rechte.

Bei allen war die mittlere Länge 22.7 cm.

Nishizuka fand bei 10 japanischen Neugeborenen die »größte Länge« der Speiche 6.27 cm. Aus seinen Messungen beim Erwachsenen berechnete ich eine mittlere Länge von 20.86 cm, aus denen Koganeis von 21.54 cm, aus denen von Suzuki von 21.09 cm und aus denen Kudos eine solche von 21.42 cm. Das Mittel der Speichenlänge aus allen japanischen Erwachsenen berechnete ich auf 21.29 cm, was also etwa $1^{1}/_{2}$ cm weniger als das Mittel bei meinem Material beträgt.

Von 65 Daumen-Mittelhandknochen waren 36 linke. 29 rechte.

Die mittlere Länge war links 42.9 mm
» » » » rechts 42.4 »
» » » » für alle 42.7 »

Von 67 Daumen-Grundgliedern waren 37 linke, 30 rechte.

Die mittlere Länge war links 28.8 mm
» » » » rechts 28.5 »
» » » » für alle 28.7 »

Von 62 Daumen-Nagelgliedern waren linke 37, rechte 39.

Die mittlere Länge war links 21.29 mm
» » » » rechts 21.40 »
» » » » für alle 21.34 »

Die Breite der Daumen-Nagelglieder war links im Mittel 15.4 mm
» » » » » rechts » » 14.4 »
» » » » » für alle » » 15.08 »

Die Hufbreite der Daumen-Nagelglieder war bei allen im Mittel 9.5 mm.

Von 68 Zeigefinger-Mittelhandknochen waren 37 linke, 31 rechte.

Die mittlere Länge der Zeiger-Mittelhandknochen war links 63.3 mm
» » » » » » rechts 62.9 »
» » » » » » für alle 63.1 »

Von 62 Zeiger-Grundgliedern waren 34 linke, 28 rechte.

Die mittlere Länge der Zeiger-Grundglieder war links 38.7 mm
» » » » » » rechts 37.8 »
» » » » » » für alle 38.3 »

Von 62 Zeigefinger-Mittelgliedern waren 34 linke, 28 rechte.

Die mittlere Länge der Zeiger-Grundglieder war links 23.8 mm
» » » » » » rechts 22.8 »
» » » » » » für alle 23.3 »

Von 62 Zeigefinger-Nagelgliedern waren 34 linke, 28 rechte.

Die mittlere Länge der Zeiger-Nagelglieder war links 17.1 mm
» » » » » » rechts 16.5 »
» » » » » » für alle 16.8 »
» » Breite » » » links 11.2 »
» » » » » » rechts 10.5 »
» » » » » » für alle 10.9 »

Für die anderen Finger gebe ich die Maße in abgekürzter Zusammenstellung.

Mittelfinger-Mittelhandkn.

	L.	R.	alle
Zahl	37	31	68
Mittl. Länge	61.3	59.9	60.7

Mittelfinger-Mittelglied.

	L.	R.	alle
Zahl	34	28	62
Mittl. Länge	28.8	28.7	28.78

Mittelfinger-Grundglied.

	L.	R.	alle
Zahl	34	28	62
Mittl. Länge	42.4	42.3	42.36

Mittelfinger-Nagelglied.

	L.	R.	alle
Zahl	34	28	62
Mittl. Länge	18.1	17.5	17.9
Mittl. Grundbr.	11.7	11.1	11.4

Ringfinger-Mittelhandkn.

	L.	R.	alle
Zahl	37	30	67
Mittlere Länge	54.6	53.9	54.4

Ringfinger-Grundglied

	L.	R.	alle
Zahl	34	27	61
Mittlere Länge	39.9	40.5	40.2

Ringfinger-Mittelglied

	L.	R.	alle
Zahl	34	26	60
Mittlere Länge	27.4	26.6	27.2

Ringfinger-Endglied

	L.	R.	alle
Zahl	34	26	60
Mittlere Länge	18.1	17.7	17.9
» Breite	11.1	10.7	10.9

Kleinfinger-Mittelhandkn.

L.	R.	alle
37	30	67
50.7	50.02	50.5

Kleinfinger-Grundglied

L.	R.	alle
37	30	67
31.8	31.4	31.7

Kleinfinger-Mittelglied

L.	R.	alle
37	30	67
19.1	19.0	19.05

Kleinfinger-Nagelglied

L.	R.	alle
37	30	67
16.5	15.9	16.2
0.99	0.96	0.98

Wenn wir uns in Strichen die Längenverhältnisse der oberen Gliedmaßenknochen nach den von uns gefundenen allgemeinen Mittelwerten aufzeichnen, erhalten wir folgendes Bild.

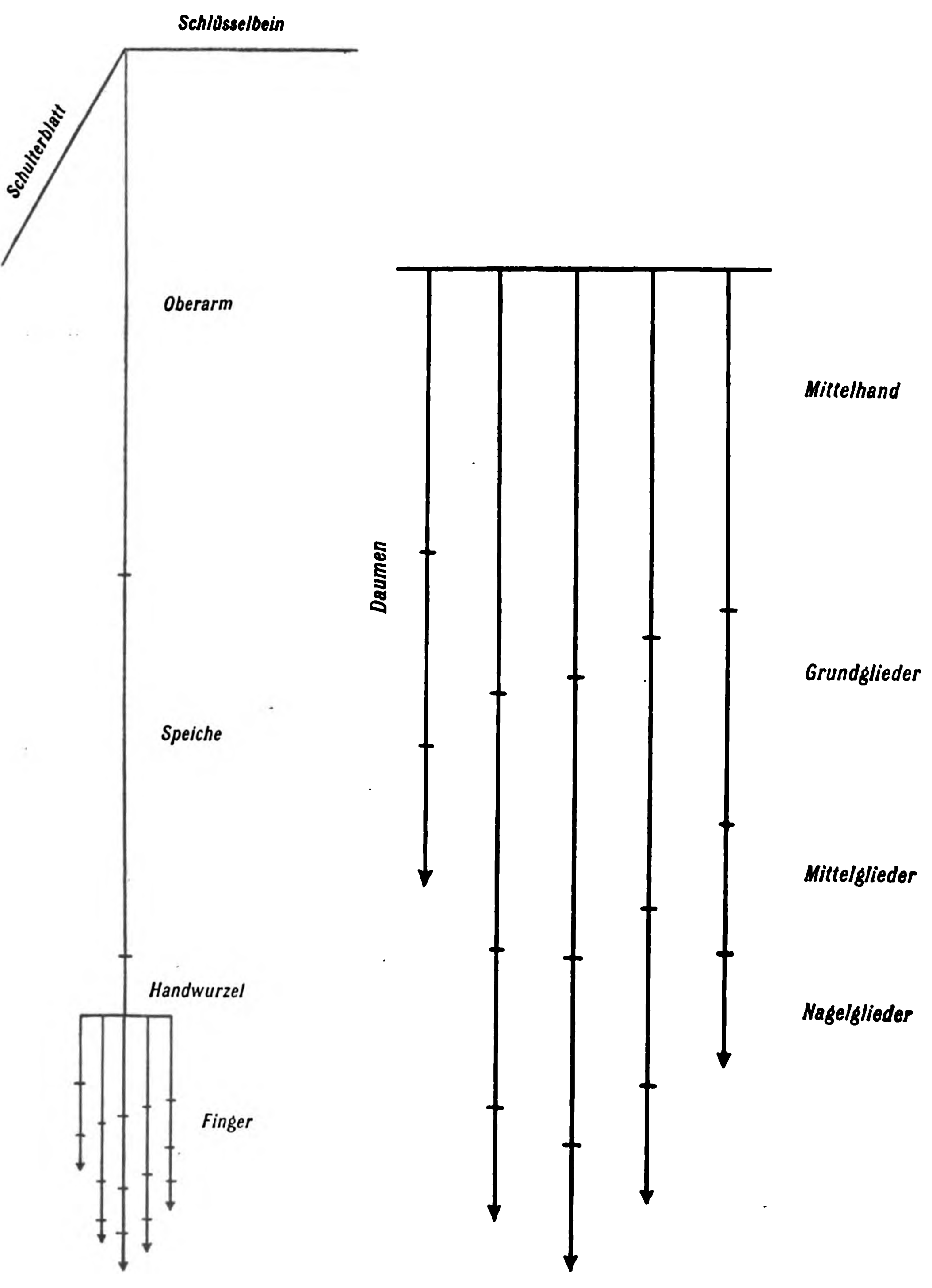


Bild 1a. Mittelwert der Längen. 1/4 der Naturgröße.

Bild 1b. Mittelwert der Handstrahlenlänge in Naturgröße.

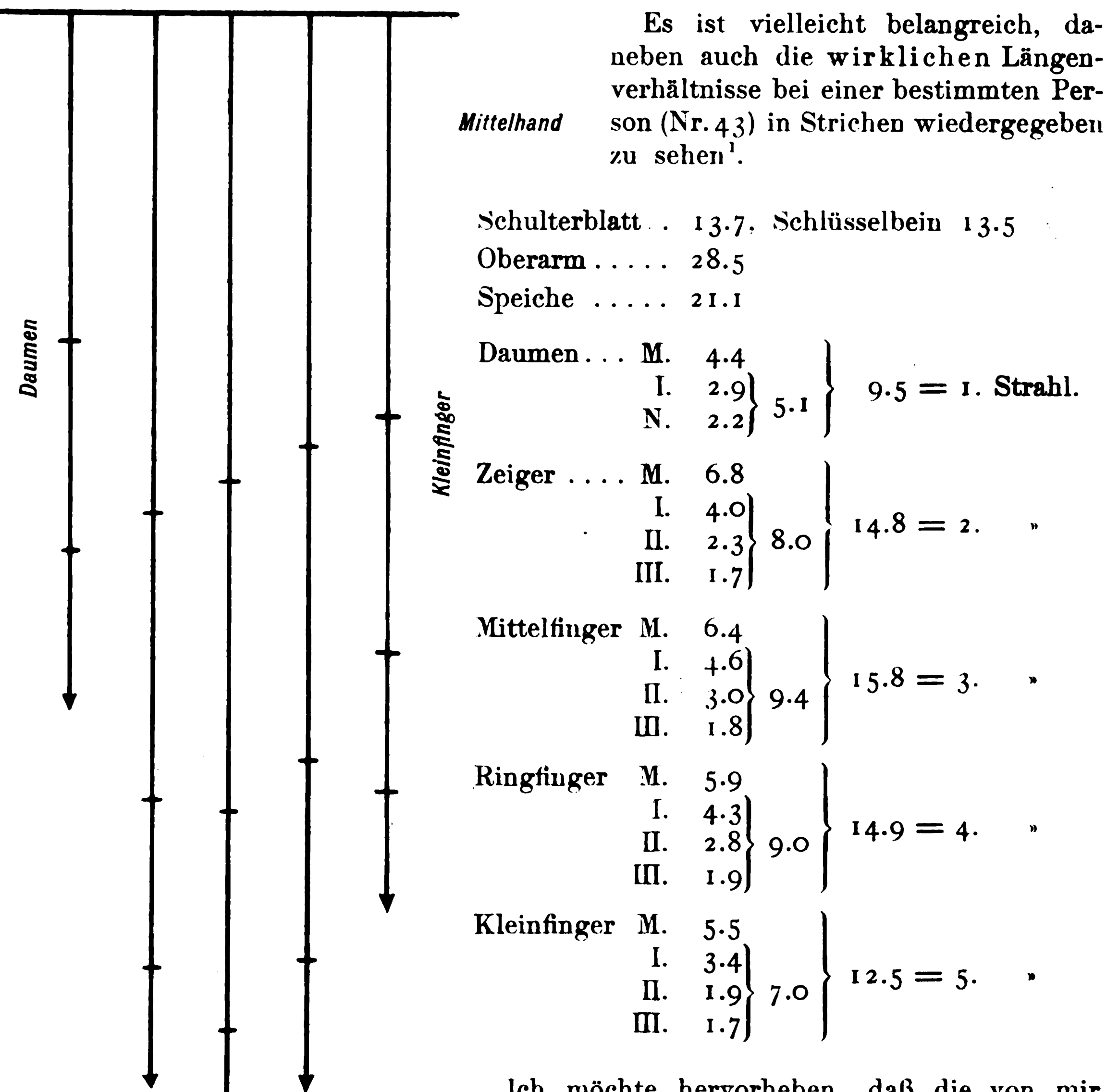


Bild 2. Handstrahlenlänge des Falles Nr. 43. Naturgröße.

Es ist vielleicht belangreich, daneben auch die **wirklichen** Längenverhältnisse bei einer bestimmten Person (Nr. 43) in Strichen wiedergegeben zu sehen[1].

Schulterblatt . .		13.7.	Schlüsselbein 13.5		
Oberarm		28.5			
Speiche		21.1			
Daumen . . .	M.	4.4			
	I.	2.9	5.1	9.5 = 1. Strahl.	
	N.	2.2			
Zeiger	M.	6.8			
	I.	4.0			
	II.	2.3	8.0	14.8 = 2.	»
	III.	1.7			
Mittelfinger	M.	6.4			
	I.	4.6			
	II.	3.0	9.4	15.8 = 3.	»
	III.	1.8			
Ringfinger	M.	5.9			
	I.	4.3			
	II.	2.8	9.0	14.9 = 4.	»
	III.	1.9			
Kleinfinger	M.	5.5			
	I.	3.4			
	II.	1.9	7.0	12.5 = 5.	»
	III.	1.7			

Ich möchte hervorheben, daß die von mir bei der Hand gefundenen Mittelzahlen bei fast allen Knochen mit denen, die Pfitzner[2] an 165 Händen (die anderen Armknochen hat er **nicht** gemessen) der Straßburger Anatomie fand, zum großen Teil millimetergenau übereinstimmen. Das scheint mir, angesichts der Tatsache, daß Pfitzners Knochen im wesentlichen alemannischer Herkunft sein werden, meine aber der sehr gemischten Berliner Bevölkerung entstammen, sehr beachtenswert und spricht, wie ich glaube, sehr deutlich

---

[1] Im Vortrag an der Tafel die ganze obere Gliedmaße in Naturgröße gezeichnet: im Bild 2 sind nur für die Handknochen die Maße wiedergegeben.

[2] Pfitzner, Beiträge zur Kenntnis des Extremitätenskeletts. I. Abt. Zu: Schwalbes Morphol. Arbeiten. Jena, G. Fischer 1892.

gegen gröbere Rassen- bzw. Stammesunterschiede in der Ausbildung der Knochenhand im deutschen Sprachgebiet. Wie Pfitzner, so fand auch ich, daß beim Vergleich der Einzellängen der Glieder die Abweichungen vom rechnerischen Gesamtmittel sich keineswegs gleichmäßig um diese Mittellänge herum anordnen, sondern daß es fast bei jedem Knochen mehrere Längen gibt, wo sich das Vorkommen gerade dieser Längen häuft. Aus der großen Zahlentafel am Schluß der Arbeit kann man sich von dieser Tatsache durch die Anfertigung entsprechender Strichschemen oder statistischer Kurven überzeugen.

Es gibt daher offenbar nicht eine einzige »Idealhand«, bei der alle Knochen die »mittleren Längen« aus allen Fällen zeigen, sondern verschiedene, gewissermaßen gleichwertige Formen des Handgerüstes, z. B. vielleicht eine mit besonders kleinem Kleinfinger, eine andere mit besonders langem Zeigefinger usf.

Länge der Hauptabschnitte der oberen Gliedmaße.

Ich möchte vorausschicken, daß E. Kurz[1] in seiner fleißigen Arbeit, in der er das seiner außerordentlich schweren Erreichbarkeit wegen leider nur sehr spärliche Material von chinesischen Knochen in jeder Hinsicht genau durchgemessen hat, bei den oberen Gliedmaßen sehr ähnliche Maße gefunden hat.

1. Die ganze Armlänge (ohne Hand). d. h. die Summe der Länge des Oberarmbeines und der Speiche beträgt

links	54.3	cm
rechts	53.0	»
im Gesamtmittel	**54.15**	»

2. »Länge« der Handwurzel. Die Handwurzel längs der »Handlängsaxe« gemessen, d. h. die proximal-distale Entfernung zwischen der Mondbeinkuppe und der distalen Endfläche des Kopfbeines, mißt im Mittel (aus 30 Händen) 3.3 cm.

3. Handlänge. Unter Zugrundelegung dieser »Handwurzellänge« oder »Handwurzeltiefe« und der Länge des »Mittelfingerstrahls« (s. S. 422) erhalten wir für die »ganze Länge der Hand«:

bei den Händen der rechten Körperseite	18.14	cm
» » » » linken »	18.36	»
» allen » zusammen	**18.27**	»

4. Länge der »freien« Fingerglieder (d. h. ohne die Mittelhandknochen) in Zentimetern:

	Links	Rechts	Gesamt-Mittel
Daumenlänge	5.02	4.98	5.00
Zeigefingerlänge	7.96	7.71	7.84
Mittelfingerlänge	8.93	8.85	8.90
Ringfingerlänge	8.60	8.42	8.53
Kleinfingerlänge	6.74	6.63	6.69

[1] E. Kurz, Untersuchungen über das Extremitätenskelett des Chinesen. Ztschr. f. Anat. u. Entwicklungsgesch. 66. Band, 1922.



5. Länge der ganzen »Fingerstrahlen« (d. h. einschließlich der Mittelhandknochen):

	Links	Rechts	Gesamt-Mittel
Daumenstrahl	9.31	9.22	9.27
Zeigefingerstrahl	14.29	14.00	14.15
Mittelfingerstrahl......	15.06	14.84	14.97
Ringfingerstrahl	14.06	13.81	13.97
Kleinfingerstrahl	11.81	11.63	11.74

Wenn wir die einzelnen Teile der Hand nach ihrer Länge ordnen, so ergibt sich folgende Reihenfolge:

Die Mittelhandknochen folgen sich	II (63)	III (61)	IV (54)	V (50)	I (43)[1]
» Grundglieder » » »	III (42)	IV (40)	II (38)	V (32)	I (29)
» Mittelglieder » » »	III (29)	IV (27)	II (23)	V (19)	—
» Endglieder » » »	I (21)	III (18)	IV (18)	II (17)	V (16)

Meine Reihenfolge stimmt, wie nach den obigen Angaben über die gleichen Mittelzahlen nicht anders zu erwarten, mit der von Pfitzner gefundenen überein, nur fand er bei den Endgliedern die Länge beim Mittel- und beim Ringfinger nicht gleich, sondern beim Ringfinger meist eine Spur größer.

Daß die Mittelmaße für die linken Gliedmaßen und Gliedmaßenteile sich größer zeigten als die der rechten Glieder, ist sicherlich nur ein reiner Zufall. da es sich nur zum geringsten Teil um Gliedmaßenpaare einer und derselben Person handelt, sondern ganz vorwiegend um Einzelarme. Offenbar stammten zufällig die linken Arme von größeren Personen wie die rechten Arme. Die rechten Arme der Personen, deren linke Arme wir zufällig zur Untersuchung bekamen, haben, wenn die betreffenden Personen »Rechtshänder« waren, vermutlich noch größere Maße besessen, als wir an ihren linken Gliedern fanden. Braune und Fischer[2] haben bei 24 männlichen Einzelhänden im Mittel zufällig auch fast alle Handglieder links länger gefunden. Bei 16 weiblichen Händen fanden sie umgekehrt die rechten Längenmaße länger. Pfitzner hält auch das nur für »eine neckische Laune des Zufalls«.

Ich habe die Messungen aber doch nach der Körperseite getrennt, weil sich vielleicht einmal in den Maßverhältnissen der einzelnen Glieder für die rechte oder linke Körperseite irgendwelche kennzeichnende Verschiedenheiten als Regel ergeben könnten. So können meine Messungen auch für solche Fragen eine Unterlage abgeben.

II. Maßverhältnisse.

Leider lassen sich die Ergebnisse der schönen Arbeit T. Akibas[3] über die Größenverhältnisse bei japanischen Feten aus der Anatomischen Anstalt des Hrn. Kollegen T. Kudo mit meinen nicht unmittelbar vergleichen, weil er die

[1] Die römischen Zahlen bedeuten die Finger: I = Daumen, V = Kleinfinger. Die eingeklammerten Zahlen geben die Länge der betreffenden Knochen in Millimetern an.

[2] Braune und Fischer, Die Länge der Finger und Metakarpalknochen an der menschlichen Hand. His' Archiv 1887.

[3] T. Akiba, Über die Körperproportionen der japanischen Feten. Folia anatomica Japonica Bd. II Heft 4. Oktober 1924.

Oberarmlänge von der Schulterecke (Akromion) bis zum Ellbogen (Olekranon) und die Unterarmlänge nicht an der Speiche, sondern an der Elle maß, wobei er ebenfalls den Ellbogen (Olekranon) als Meßpunkt benutzte. NISHIZUKA hingegen maß zum Teil nach unserer und MARTINS Art; er erhielt zum größten Teil unseren ganz ähnliche Verhältnisse. REICHER[1] hat auch an vielen Keimlingen und Neugeborenen die Größenverhältnisse untersucht. Er fand, daß sie zum Teil in den verschiedenen Entwicklungsabschnitten recht verschieden sind. Es wäre belangreich, unsere Maße nach dem Vorgehen E. v. EICKSTÄDTS[2] bei seinen 13 Garwohlipersonen auf Gruppenbildung bei den einzelnen Verhältnissen zu prüfen, denn weitergehende Schlüsse dürften sich meiner Meinung nach nur ziehen lassen, wenn die vermuteten Regelmäßigkeiten sich bei Untersuchung einer großen Zahl von Personen bestätigten.

Zunächst bestimmte ich das Verhältnis der Länge des Unterarmes zu der des Oberarmes. Es ergab sich, daß der Unterarm immer nur etwa $^3/_4$ der Länge des Oberarmes erreicht. Ich erhielt folgende Zahlen:

Verhältnis der Unterarm- zur Oberarmlänge.

Unterarmlänge : Oberarmlänge = 22.7 : 31.5 = 72.1 %.

Die Anthropologen nennen dieses Prozentverhältnis bekanntlich den »Brachialindex«, was eigentlich nicht berechtigt ist, da die Zahl nicht den Oberarm, das Brachium, sondern den Unterarm, das Antebrachium betrifft, denn beim Schädel nennt man »Breitenindex« die Zahl, die angibt, wieviel Hundertstel der Länge die Breite des Schädels ausmacht. Unter einem Schädel-Breitenindex von 75 versteht man daher einen Schädel, dessen Breite $^3/_4$ seiner Länge beträgt. Es wäre daher einzig richtig, die eben besprochene Zahl den Unterarm- oder »Antebrachialindex« zu nennen.

Nebenbei bemerkt erscheint es bei dem großen Wert, den die meisten Mediziner der klassischen Bildung einzuräumen vorgeben, recht eigentümlich, daß sich in der anthropologischen und anatomischen Namengebung leider immer noch das ganz falsche Antibrachium statt des einzig richtigen Antebrachium gehalten hat.

MOLLISON fand an badischen und elsässischen Armen den Unterarm im Verhältnis zum Oberarm wesentlich länger als ich, nämlich im Mittel 78.4 %. Sein geringstes Maß (72 %) stimmt mit meinem hiesigen Mittelmaß überein. A. STRAUSS[3] fand das Verhältnis bei einem 186 cm großen, 27 jährigen Jüngling 75 %. Aus den von mir nach den Angaben von NISHIZUKA, KOGANEI, SUZUKI und KUDO errechneten Mittellängen bei erwachsenen Japanern fand ich die Speichenlänge 76.1 % der Oberarmlänge, also wesentlich größer als an meinem Berliner Material, aber nicht ganz so groß wie MOLLISON bei seinen Alemannenknochen.

[1] REICHER (polnisch mit französischer Übersicht). In: Arbeiten der Gesellsch. d. Wissensch. zu Wilna 1925.

[2] E. v. EICKSTÄDT, Eine Studie über menschliche Körperproportionen und die Ursache ihrer Variabilität. In: Mitteilungen der Anthropol. Gesellsch. Wien Bd. 56.

[3] A. STRAUSS, Anatom. Untersuchungen eines noch im Wachstum begriffenen, übergroßen Skelettes eines 27jährigen. Ztschr. f. Konstitutionslehre 1921.



Bemerkenswert ist, daß der nächste größere Körperabschnitt, die Hand, in ziemlich ähnlichem Längenverhältnis zum Nachbarglied steht. Die Handlänge beträgt nämlich auch etwa 3/4 von der Unterarmlänge, so wie der Unterarm vom Oberarm. An MOLLISONS Material war das Mittel 72.2, das kleinste Maß 64, das größte 82 %. An meinen Armen betrug das Mittel 80.5 %.

Handlänge : Unterarmlänge 18.27 : 22.7 = 80.5 %.

Von der Oberarmlänge beträgt die Handlänge nur etwa 3/5.

Handlänge : Oberarmlänge = 18.27 : 31.5 = 58.0 %.

Gegenüber dem ganzen Arm (ohne Hand) ist die Handlänge nur 1/3.

Handlänge : Armlänge = 18.27 : 54.20 = 33.7 %.

Die (prox.-distale) Schulterblattlänge : Armlänge = 15.1 : 54.2 = 27.8 %.

Aus den Längenangaben der obengenannten japanischen Forscher errechnete ich für die Schulterblattlänge 29.2 % der ganzen Armlänge, also eine deutlich größere verhältnismäßige Schulterblattlänge als bei dem Berliner Material.

Die (prox.-dist.) Schulterblattlänge : Oberarmlänge = 15.1 : 31.5 = 47.9 %. Aus den von mir errechneten Mittellängen für die Längen der beiden Knochen bei erwachsenen Japanern errechnete ich für die Schulterblattlänge 51.4 % der Oberarmlänge, demnach eine wesentlich größere Schulterblattlänge als beim Berliner Material.

Ich untersuchte ferner die Beziehungen zwischen der mittleren Länge der einzelnen Teile der Hand zur mittleren Armlänge und die Beziehungen zwischen den einzelnen Teilen der Hand selber.

Länge der Mittelhandknochen : Armlänge.

Länge des Daumen-Mittelhandknochens	4.27 : 54.2 =	7.9 %
» » Zeigefinger-Mittelhandknochens ..	6.31 : 54.2 =	11.6 %
» » Mittelfinger- » ..	6.07 : 54.2 =	11.2 %
» » Ringfinger- » ..	5.44 : 54.2 =	10.0 %
» » Kleinfinger- » ..	5.05 : 54.2 =	9.3 %

Länge der Mittelhandknochen : Handlänge.

Länge des Daumen-Mittelhandknochens	4.27 : 18.27 =	23.3 %
» » Zeigefinger-Mittelhandknochens ..	6.31 : 18.27 =	34.5 %
» » Mittelfinger- » ..	6.07 : 18.27 =	33.2 %
» » Ringfinger- » ..	5.44 : 18.27 =	29.8 %
» » Kleinfinger- » ..	5.05 : 18.27 =	27.6 %

Freie Fingerlänge : Armlänge.

Länge des Daumenfingers	5.00 : 54.2 =	9.23 %
» » Zeigefingers	7.84 : 54.2 =	14.5 %
» » Mittelfingers	8.90 : 54.2 =	16.4 %
» » Ringfingers	8.53 : 54.2 =	15.7 %
» » Kleinfingers	6.69 : 54.2 =	12.3 %

Freie Fingerlänge : Handlänge.

Länge des Daumenfingers	5.00 : 18.27	= 27.3 %
» » Zeigefingers	7.84 : 18.27	= 42.9 %
» » Mittelfingers	8.90 : 18.27	= 48.6 %
» » Ringfingers	8.53 : 18.27	= 46.6 %
» » Kleinfingers	6.69 : 18.27	= 36.6 %

Besonders wichtig für die vergleichende Anatomie sind die Verhältnisse der Daumenlänge. Ich fand folgendes:

Länge des Daumens (frei) zum Zeigefinger 5.00 : 7.96 = 62.8 %
» » » » » Mittelfinger 5.00 : 8.90 = 56.2 %

In meiner vorigen Abhandlung wies ich darauf hin, daß bei WALDEYERS (linker) Hand der Daumen entschieden länger war als gewöhnlich, so daß er bis zum 1. Zwischengelenk des Zeigefingers reichte. Das Verhältnis der freien Daumenlänge zur Zeigefingerlänge war bei WALDEYER 5.25 : 7.65 = 68.8 % gegen 62.8 meines obigen Mittelwertes.

Daumenstrahllänge : Zeigefingerstrahl im Mittel = 9.27 : 14.15 = 65.5 %

Bei WALDEYERS linker Hand fand ich 9.55 : 14.00 = 68.2 %

Daumenstrahllänge : Mittelfingerstrahllänge 9.27 : 14.97 = 61.9 %

PFITZNER fand im Mittel fast dieselbe Zahl, nämlich 62 %

Daumenstrahllänge : Handlänge = 9.27 : 18.27 = 50.7 %

Eine besondere Wichtigkeit wird dem Verhältnis zwischen der Länge des Daumen-Mittelhandknochens und der des Zeigefinger-Mittelhandknochens von MAAS[1] beigelegt. Er glaubt, daß bei der sog. »Chondrodystrophie« eines der ersten Zeichen das Zurückbleiben des Daumen-Mittelhandknochens im Wachstum sei. Für den Mittelwert unseres Materiales ergibt sich:

Länge des Daumen-Mittelhandknochens zu der des Zeigefingers:
4.27 : 6.31 = 67.7 %

Bei meiner eigenen Hand ist das Verhältnis 4.7 : 7.3 = 64 %.

Vergleichen wir die Länge der anderen Finger miteinander, so sehen wir, daß im Mittel der Mittelfinger immer der längste Finger ist, wenn auch der Unterschied gegen den Ringfinger oft nur sehr unbedeutend ist.

Was das von den Künstlern so viel besprochene Längenverhältnis zwischen dem Zeige- und dem Ringfinger betrifft, so fand sich bei meinen Personen, daß im Mittel der freie Zeigefinger wesentlich, nämlich um nicht weniger als 7 mm kürzer war als der freie Ringfinger.

Das Längenverhältnis beträgt im Mittel (für beide Seiten) 7.84 : 8.53 = 91.9 % (Zeiger).

[1] MAAS. Beiträge zur Kenntnis des Zwergwuchses. In: Ztschr. f. Neurologie u. Psychiatr. 1920 u. 1925.



Bei WALDEYERS Hand war das Verhältnis 7.65 : 8.15 = 93.8% (Zeiger). WOLOTZKOI[1] nennt das Überwiegen der Ringfingerlänge »ulnaren Typ«, das der Zeigerlänge »radialen Typ«. BLECHMANN[2] fand bei Juden den Ringfinger im Mittel 6 mm länger, ebenso WALDHAUER[3] bei Liven; WAEHER[4] und BREMSOHN[5] fanden auch bei Letten und Litauern den 4. Finger meist um 3—6 bzw. um 4—5 mm länger.

Der ganze Zeigefingerstrahl hingegen ist um 2 mm länger als der Ringfingerstrahl, weil der Mittelhandknochen des Zeigefingers fast 1 cm länger ist als der des Ringfingers. Es mißt nämlich im Mittel der Zeigefingerstrahl 14.1, der Mittelfingerstrahl nur 13.9 cm. Bei WALDEYERS Hand war der Unterschied noch bedeutender. Bei ihm maß trotz der Kürze des freien Zeigefingers der Zeigefingerstrahl (links und rechts) 14 cm, der Ringfingerstrahl aber nur 13.2 (links) bzw. 13.4 cm (rechts).

Schon in meiner früheren Untersuchung habe ich darauf hingewiesen, daß man sich bei der Beurteilung der verschiedenen Fingerlängen bei der lebenden Hand leicht täuschen kann, da meist die Finger nach der Ellenseite abgebogen sind und daher die ellenwärts liegenden Finger länger, der Zeigefinger aber seinen Nachbarn gegenüber kürzer erscheint, als er in Wahrheit ist. Ich berichtete, daß diese Schiefstellung der Finger offenbar auf der Tätigkeit der Beugemuskeln beruht, die alle vom »inneren« oder »medialen« d. h. ellenwärtigen Oberarmknorren bzw. der Elle selbst entspringen und daher bei denjenigen Leuten besonders ausgeprägt ist, die mit ihren Fingern viel arbeiten. Der Zeigefinger wird auch deshalb noch besonders ellenwärts gezogen, weil sein oberflächlicher Muskelbauch, der aus der »tiefen Lage des oberflächlichen Fingerbeugers« kommt, ellenwärts vom Mittelfingerbauch liegt, der in der Regel ja auch von der Speiche Zuwachs erhält. Ich unterschied daher »Arbeitshand« und »Feierhand« oder »geschonte Hand«. Ich zeigte (s. vor. Abhdlg. Bild 2 u. 3), wie bei meiner eigenen Hand bei zwangloser Fingerhaltung der Zeigefinger wesentlich kürzer wie der Ringfinger erscheint, bei »geradeaus« gerichtetem Zeigefinger aber seine Länge die des Ringfingers zu übertreffen scheint. In Wahrheit sind die Knochen meines Zeigefingers aber fast um einen ganzen Zentimeter kürzer als die des Ringfingers, nämlich nur 8.5 gegen 9.4 cm.

Einen besonders auffälligen Grad der »Arbeitshand« mit stark übertriebener »Verkürzung« des Zeigefingers zeigt die von Hrn. Dr. K. PICHLER in Klagenfurt aufgenommene Hand eines Zimmermannes (s. vor. Abhdlg. Bild 4).

Nagelgliedformen.

In meiner vorigen Untersuchung betonte ich, daß man bei den Nagelgliedern einerseits plumpe und schmale, anderseits aber auch rundliche

---

[1] WOLOTZKOI (Moskau), Journal Russe, Anthropol. Inst. XIII 3—4 S. 81.
[2] BLECHMANN, Ein Beitr. z. Anthropol. d. Juden. Diss. bei WOLOTZKOI angeführt.
[3] WALDHAUER, Z. Anthropol. d. Liven, bei WOLOTZKOI angeführt.
[4] WAEHER, Beitr. z. Anthropol. der Letten, Diss. von 1886.
[5] BREMSOHN, Z. Anthrop. d. Litauer. Diss. vor 1886.

und spitze Formen unterscheiden könne. Für den ersteren Unterschied also zwischen der »plumpen« oder »pachydaktylen« und der »schmalen« oder »leptodaktylen« Form schlug ich als Grenze bei der Knochenhand oder als Mittelform in dieser Hinsicht (»Mesotelodaktylie«) eine Breite des Nagelgliedes von 60% seiner Länge vor. Bei den jetzt von mir daraufhin untersuchten Nagelgliedern ergab sich beim Daumen an der rechten Körperseite 67.3%, bei denen der linken Seite 72.3%, bei allen zusammen berechnet sich die mittlere Breite auf 70.6% der Länge. Die von mir untersuchten Daumen-Nagelglieder gehörten also der Mehrzahl nach zur »plumpen« oder »pachytelodaktylen« Form.

Beim Zeigefinger erhielt ich rechts 64.2, links 65.5, als allgemeines Mittel 64.9%; demnach auch »plumpe« Form in der Mehrzahl.

Beim	Mittelfinger	waren die Zahlen rechts	63.4,	links	64.6,	für alle	63.7%
»	Ringfinger	» » » »	60.4,	»	61.2,	» »	60.8%
»	Kleinfinger	» » » »	64.0,	»	60.0,	» »	60.5%

Die »Plumpheit« oder »Pachytelodaktylie« war daher, wie wohl meist, am Daumen bei weitem am ausgeprägtesten (70.6%), am Kleinfinger (60.5%) und am Ringfinger am geringsten. Die Zeigefinger-Nagelglieder waren bei unseren Personen entschieden plumper als die Mittelfinger-Nagelglieder. Man wird wohl geneigt sein, eher das Umgekehrte als Regel zu betrachten.

Den zweiten Unterschied zwischen der »Spitzform« oder »Oxytelodaktylie« und der »Klumpform« oder »Bolotelodaktylie« habe ich nur an einer geringeren Zahl von Nagelgliedern verfolgt. Im Mittel fand ich folgende Maßverhältnisse zwischen der Breite der Hufrauhigkeit (tuberositas unguicularis) und der Breite der Grundfläche des Nagelgliedes:

Beim	Daumen	betrug die mittlere Hufbreite	9.8 : 14.8 = 66.2%	von der Grundflächenbreite
»	Zeigefinger	» » » »	6.5 : 10.7 = 60.7%	
»	Mittelfinger	» » » »	7.6 : 10.9 = 69.7%	
»	Ringfinger	» » » »	7.1 : 10.6 = 67.0%	
»	Kleinfinger	» » » »	5.5 : 9.3 = 59.1%	

Wenn wir, wie ich früher vorschlug, eine »Hufbreite« von 70% der Grundflächenbreite als Grenzwert zwischen der »spitzen« und der »runden« Form betrachten, so gehörte der Mittelwert bei allen Fingern noch zur »Spitzform« (Oxytelodaktylie), jedoch steht der Mittelfinger hart an der Grenze zur »Klumpfingrigkeit« (Bolodaktylie). Von der heutigen »Handlesekunst« wird ein besonders spitzer Zeigefinger als Kennzeichen der »geistigen Hand« angeführt, von manchen aber auch als Kennzeichen der »Vergnügungssüchtigen«.

B. Einige vergleichende Messungen bei Menschenaffen.

Einige der besprochenen vergleichenden Messungen sind auch bereits an Menschenaffen ausgeführt; vor allem an zahlreichen Tieren von Mollison. Aber auch ich selbst habe schon vor 30 Jahren an den Leichen zweier Riesen-



orangs[1], der ersten voll ausgewachsenen Tiere, die nach Europa gelangten und später mit einem meiner Schüler an einem kleineren Orang und einem Schimpansen manche der Maße genommen[2,3,4] und habe auch jetzt wieder an den Teneriffaschimpansen und an dem jüngst hier vorgeführten lebenden Gorilla sowie den zur Zeit im Zoologischen Garten befindlichen lebenden Schimpansen mir einige Maße zu beschaffen gesucht. Das Messen an den lebenden Schimpansen hat sich als sehr schwierig und nur mit geringer Genauigkeit ausführbar erwiesen. Die Tiere sind gegen den Fremden und die Meßwerkzeuge sehr scheu und mißtrauisch. Sie sträuben sich, schlagen den Tasterzirkel und das Meßband weg, zerreißen oder zerbeißen es. Bei dem Gorilla hatte ich mehr Glück, weil sein mit dem Tier nah vertrauter Begleiter, Hr. Fliegermajor Penny die Freundlichkeit hatte, die Messungen genau nach meinen Wünschen selbst auszuführen. Zuerst war der Herr »John Daniel«, den ich im Gasthof, wo er mit seiner Besitzerin wohnte, aufsuchte, sehr freundlich, gab mir die Hand und ließ sich auch von mir betasten. Allmählich wurden ihm die Messungen des Herrn Major aber lästig, und er zeigte seinen Unwillen auch mir gegenüber, weil er merkte, daß ich die Veranlassung zu der ihm unbequemen Meßquälerei war, so daß ich nach Beendigung der Messungen es nicht mehr wagen durfte, Herrn »John Daniel« näher zu kommen.

Ich will hier erwähnen, daß Hr. Major Penny mir auf Befragen erklärte, daß der Gorilla ausschließlich Rechtshänder sei; z. B. auch beim Essen und beim Werfen von Sand oder Steinen, was er mit Vorliebe betrieb, wie ich selbst mehrfach beobachtete. Major Penny hat niemals gesehen, daß er diese Bewegungen mit der linken Hand ausführte. Mollison[5] erklärt den Orang für den stärksten Rechtshänder nach dem Menschen, den Schimpansen und Gorilla für Linkshänder. Bei den Teneriffaschimpansen und den andern Schimpansen des Zoologischen Gartens in Berlin fand ich keine dauernde Bevorzugung einer Hand beim Greifen. Hier und da glaubte ich beim einen oder andern einen ausschließlichen Gebrauch der rechten Hand festgestellt zu haben, da warf ein Greifen mit der linken Hand die »Feststellung« über den Haufen. Ich möchte den Schimpansen daher als einen »Beidhänder« (ambidexter) bezeichnen.

Ich bin der Besitzerin und Hrn. Major Penny, der es meisterhaft verstand, durch ruhiges Zureden und geschickte Benutzung des richtigen Augenblickes dem Tier alle gewünschten Maße abzugewinnen, zu großem Danke verpflichtet. Ebenso bin ich auch Hrn. Direktorialassistent Dr. Lutz Heck für die Herstellung und Überlassung vortrefflicher Lichtbildaufnahmen des Gorilla, an denen man gar manche Maßverhältnisse, namentlich auch die Menschenähnlichkeit der Hände, sehr gut erkennen kann, sehr zu Dank verbunden.

---

[1] Der eine davon (»Anton«) ist im Berliner Museum f. Naturkunde ausgestopft ausgestellt.

[2] R. Fick. Vgl. anat. Studien an einem erwachsenen Orang Utang. His' Arch. f. Anat. 1895. Sonderabdr. S. 1—100.

[3] R. Fick, Beobachtungen an einem zweiten erwachsenen Orang Utang und einem Schimpansen, ebenda S. 289—318.

[4] P. Michaëlis, Beiträge zur vergleich. Myologie des Cynocephalus babuin, Simia satyrus, Troglodytes niger, ebenda 1903.

[5] Vgl. Mollison, Rechts und Links der Primatenreihe. Korrespondenzbl. d. deutsch. Ges. f. Anthrop., Ethn. u. Urgesch. 39. Jahrg. 1908 u. Die Körperproportionen der Primaten. Morphol. Jahrb. Bd. 42. 1910. S. 177ff.

Maße der von mir untersuchten Menschenaffen.

Ich gebe zunächst einige Längenmaße an den mazerierten Knochen von drei Teneriffaschimpansen:

		Loka		Terzera		Grande	
		R.	L.	R.	L.	R.	L.
Schulterblatt		15.9	16.0	15.3	15.0	14.8	15.0
Schlüsselbein		13.4	13.7	12.5	12.4	11.1	11.2
Oberarm		31.7	32.2	28.3	28.3	27.0	27.2
Elle		29.2	29.0	25.5	24.0	25.3 (sehr krumm)	25.5
Speiche		29.7	29.7	25.2	26.0	25.1	25.3
Handwurzel Kopf-Mondbein		3.6	—	—	3.6	3.5	—
Daumen	Mittelhandknochen	3.8	3.8	3.6	3.58	4.3	4.2
	Grundglied	2.15	2.3	2.2	2.2	2.6	2.6
	Mittelglied	—	—	—	—	—	—
	Nagelglied	1.60	1.65	1.7	1.7	1.7	1.6
Zeigefinger	Mittelhandknochen	8.9	8.8	8.2	8.0	8.4	8.6
	Grundglied	5.3	5.4	4.35	4.5	5.1	6.0
	Mittelglied	3.4	3.4	2.7	2.8	3.4	4.5
	Nagelglied	1.8	1.9	1.4	1.6	1.5	1.8
Mittelfinger	Mittelhandknochen	8.7	8.7	8.6	8.6	8.3	8.4
	Grundglied	6.3	6.3	5.3	5.4	6.0	6.0
	Mittelglied	4.6	4.6	3.8	3.9	4.5	4.5
	Nagelglied	2.3	2.2	1.8	1.9	1.8	1.8
Ringfinger	Mittelhandknochen	8.2	8.1	8.2	8.1	7.8	7.2
	Grundglied	5.7	5.7	5.2	5.2	5.4	4.2
	Mittelglied	4.1	4.1	3.6	3.6	4.0	2.8
	Nagelglied	2.1	2.1	1.9	1.9	1.5	1.5
Kleinfinger	Mittelhandknochen	7.8	7.6	7.1	7.1	7.3	7.2
	Grundglied	4.3	4.3	3.6	3.7	4.3	4.2
	Mittelglied	2.7	2.6	2.3	2.3	2.9	2.8
	Nagelglied	1.7	1.7	1.4	1.5	1.5	1.5
Brustbein	Handhabe	4.10		3.60		4.0	
	Körper	9.50		9.50		9.4	Körper mit Schwertfortsatz fast verknöchert.
	Schwertfortsatz	3.50		6.10		2.9	
	Ganze Länge gerade	17.1 cm		19.05 cm		15.8 cm	
	» » m. Bandmaß	17.4 »		19.4 »		17.0 »	

Bei Grande wog ich auch die mazerierten Knochen. Die Gewichte der oberen Gliedmaßenknochen mögen hier angeführt sein:

Schulterblatt	R.	73.0 g	L.	75.0 g
Oberarm	»	134.0 »	»	139.0 »
Elle	»	58.0 »	»	60.0 »
Speiche	»	54.0 »	»	56.0 »
Handwurzel	»	13.0 »	»	13.5 »
Mittelhand und Finger	»	71.0 »	»	68.5 ».

Es mögen nun aus drucktechnischen Gründen einige Zahlentafeln folgen.

Körper-Rumpf-Bein-Gesichtslänge.

	Orangs			Schimpansen				Gorillas	
	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	Fick-Michaelis'	Tschika	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berlin	lebend	H. Meyeri
Körperlänge	140.0	133.0	113	72	133.0	—	—	120.0	165.0
Hintere Rumpflänge	90.0	82.0	74	54	82	32.0	33.5	65.0	—
Oberschenkel	55.5 { 29.5	51.5 { 27.5	25.5	19.5	52.8 { 28.0	38.0 { 19.0	35.0 { 18.0	45.0 { 23.5	39.0
Schienbein	26.0	24.0	22.75	15.5	24.8	19.0	17.0	21.5	29.0
Gesichtslänge	25.0	22.5	—	15.0	19.3	—	—	17.0	—

Verhältnistafel I. Armlängen der von mir untersuchten Menschenaffen.

	Orangs				Schimpansen*									Gorillas	
	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	max. Anat. Berlin	Fick-Michaelis'	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berl.	jung lebend	alt max. Anat. Berlin
Oberarm	38.0	36.0	32.3	32.8	18.5	28.3	28.3	27.0	27.2	31.7	32.2	18.0	18.0	28.0	42.0
Speiche	41.0	37.5	33.75	35.2	18.0	25.7	26.0	25.1	25.3	29.7[1]	29.7[1]	17.0[2]	17.0[3]	26.0	35.0
Ganzer Arm	79.0	73.5	66.05	68.0	36.5	51.0	54.3	52.1	52.5	61.4	61.9	35.0[2]	35.0	54.0	77.0

[1] Sehr krumm, S-förmig. — [2] Reichlich. — [3] Knapp.

Verhältnistafel II. Verhältnis der Unterarmlänge : Oberarmlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	max. Anat. Berlin	Fick-Michaelis'	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berl.	jung lebend	alt max. Anat. Berlin
Unterarmlg. : Oberarmlg.	41.0 : 38.0	37.5 : 36.0	33.75 : 32.3	35.2 : 32.8	18.0 : 18.5	25.2 : 28.3	26.0 : 28.3	25.1 : 27.0	25.3 : 27.2	29.7 : 31.7	29.7 : 32.2	17.0 : 18.0	17.0 : 18.0	26.0 : 28.0	35.0 : 42.0
Unterarmlänge mißt % des Oberarmes	= 107.8%	= 104.2%	= 104.5%	= 107.3%	= 97.3%	= 89.0%	= 91.9%	= 93.4%	= 93.4%	= 93.3%	= 92.2%	= 94.4%	= 94.4%	= 92.9%	= 83.3%

Verhältnistafel III. Verhältnis der Handlänge : Armlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	max. Anat. Berlin	Fick-Michaelis'	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berl.	jung lebend	alt max. Anat. Berlin
Handlg. : ganzen Armlg.	29.0 : 79.0	25.0 : 73.0	22.5 : 66.05	26.1 : 68.0	14.5 : 36.5	23.0 : 54.0	23.6 : 54.3	24.1 : 52.1	24.2 : 52.5	25.4 : 61.4	25.3 : 61.9	16.5 : 35.0	17.0 : 35.0	20.0 : 54.0	24.4 : 77.0
Handlänge mißt % der Armlänge	= 36.6%	= 34.1%	= 34.1%	= 38.4%	= 39.4%	= 42.9%	= 42.9%	= 46.3%	= 46.1%	= 41.4%	= 40.9%	= 47.1%	= 48.6%	= 37.0%	= 31.7%

Verhältnistafel IV. Verhältnis der Handlänge zur Unterarmlänge.

	Orangs			Schimpansen								Gorillas**	
	Anton	Jumbo	max. Berl. Anat.	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berlin	jung lebend	alt max. Anat.
Handlg. : Unterarmlg. =	29.0 : 41.0 = 72.2%	25.0 : 37.5 = 66.6%	26.1 : 35.2 = 74.1%	23.5 : 20.7 = 89.5%	23.1 : 26.0 = 88.8%	24.1 : 25.1 = 96.0%	24.2 : 25.3 = 95.6%	25.4 : 29.7 = 85.5%	25.3 : 29.7 = 85.2%	16.5 : 17.0 = 97.0%	17.0 : 17.0 = 100.0%	20.0 : 26.0 = 76.9%	24.4 : 35.0 = 69.7%

* Tschikas Armlängen s. S. 438. — ** Siehe auch S. 436.

Verhältnistafel V. Verhältnis der Armlänge zur Beinlänge.

	Orangs				Schimpansen									Gorillas			
	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Armlänge : Beinlänge	103 : 53	100 : 51	88.5 : 44	68 : 50.5	51 : 36	35 : 38	35 : 35	53.5 : 51	54.5 : 50.9	52.1 : 49.8	52.5 : 49.7	61.4 : 55.8	61.9 : 55.8	54 : 45	77 : 67	82 : 69	—
Arm mißt vom Bein	194.3 %	196 %	201.1 %	114.9 %	141.7 %	92.1 %	100.6 %	103.9 %	107.1 %	104.6 %	105.6 %	110.0 %	116.9 %	120.0 %	114.9 %	118.9 %	—
Bein „ vom Arm	41.7 %	51 %	49.7 %	74.3 %	70.6 %	108.6 %	100 %	95.3 %	93.4 %	95.6 %	94.7 %	90.9 %	90.1 %	98.2 %	87.0 %	84.1 %	—

Verhältnistafel VI. Verhältnis der Mittelfingerlänge zur Rumpflänge (Scheitel-Damm).

	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Mittelfinger : Rumpflänge	*12 : 90	*10 : 82	13.7 : 74.0	—	10.5 : 54.0	7 : 32	8 : 33.5		Tschika Mittelf. : Rumpfl.	11.8 : 82				*6.5 : 65	11.6 : 90.0	—	—
	13.3 %	12.2 %	18.5 %	—	19.5 %	21.9 %	23.9 %			14.4 %				10 %	12.9 %	—	—

Verhältnistafel VII. Verhältnis der freien Mittelfingerlänge zur Armlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Mittelfinger : Armlänge	*12 : 79	*10 : 73.5	13.7 : 66	13.6 : 68.0	10.5 : 51	7 : 35	8 : 35	11.0 : 54.0	11.0 : 54.5	12.1 : 52.1	12.1 : 52.5	12.8 : 61.4	12.9 : 61.9	*6.5 : 54	11.3 : 77	13.3 : 82	—
	15.2 %	13.6 %	20.7	20 %	20.6 %	20 %	22.9 %	20.4 %	20.0 %	23.2 %	23.0 %	20.8 %	20.8 %	12.4 %	14.7 %	16.2 %	—

Verhältnistafel VIII. Verhältnis der freien Mittelfingerlänge zur Handlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Mittelfinger : Hand	*12 : 29	*10 : 25	—	13.6 : 26.1	—	7 : 16.5	8 : 17	11.0 : 23.0	11.0 : 23.1	12.1 : 23.8	12.1 : 24.1	12.8 : 25.4	12.8 : 25.4	*65 : 20	11.6 : 24.4	13.3 : 27.2	—
	41.4 %	40 %	—	52.1 %	—	42.4 %	47.0 %	47.9 %	47.6 %	50.9 %	50.2 %	50.4 %	50.4 %	32.5 %	47.5 %	48.9 %	—

Verhältnistafel IX. Verhältnis der Daumenlänge zur Zeigefingerlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Daumen : Zeigefinger	6.5 : 11	5.5 : 8.5	4.5 : 12.0	4.2 : 11.9	3 : 7.25	4 : 6	3 : 7	4.0 : 8.6	3.9 : 8.9	4.4 : 9.8	4.4 : 9.8	3.9 : 10.4	3.7 : 10.4	*3 : 5.5*	4.4 : 9.7	5.4 : 13.3	—
	59.1 %	64.7 %	37.5 %	35.3 %	41.4 %	66.6 %	42.9 %	46.5 %	43.8 %	44.9 %	44.9 %	37.5 %	35.6 %	54.5 %	45.4 %	40.6 %	—

Verhältnistafel X. Verhältnis der Daumenlänge zur Handlänge.

	Anton	Jumbo	Fick-Michael.	maz. Berlin Anat.	Fick-Michael.	Zoo Bln. ♀	Zoo Bln. ♂	Terzera R.	Terzera L.	Grande R.	Grande L.	Loka R.	Loka L.	Gorilla jg.	alt maz. Anat.	H. Meyeri	Museum Berlin
Daumen : Handlänge	6.5 : 29.0	5.5 : 25	4.5 : 22.5	4.2 : 26.1	3 : 14.5	4.0 : 16.5	3.7 : 17	4.0 : 23.0	3.9 : 23.1	4.4 : 23.8	4.4 : 24.1	3.9 : 25.4	3.7 : 25.4	*3 : 20	4.4 : 24.4	5.4 : 27.2	4.6 : 26.0
	22.4 %	22.2 %	20.0 %	16.1 %	20.6 %	24.2 %	21.8 %	17.4 %	16.9 %	18.5	18.3 %	15.4 %	14.5 %	15 %	18.0 %	19.9 %	17.7 %

Verhältnistafel XI. Verhältnis der Daumenstrahllänge zur Handlänge.

	Orang	Schimpansen				Gorilla	
	maz. (R.)	Terzera R.	Grande R.	Loka R.	maz. R.	Hans Meyeri	Nr. 30938 Museum
Daumenstrahllänge : Handlänge	9.2 : 26.1	7.5 : 23.0	8.7 : 24.1	7.6 : 25.4	9 : 23.0	10.8 : 27.2	9.5 : 26.0
	35.2 %	32.6 %	36.1 %	29.9 %	39.1 %	39.7 %	36.5 %

* An der Schwimmhautgrenze gemessen.

Verhältnis der Unterarmlänge : Oberarmlänge.

Wie die Verhältnistafel II auf S. 434 zeigt, ist der Unterarm nach meinen Messungen bei allen Menschenaffen sehr wesentlich größer im Verhältnis zum Oberarm wie beim Menschen, bei dem er nur 72°/o von der Oberarmlänge mißt, und sehr beachtenswert ist es, daß sich beim Orang das Längenverhältnis zwischen beiden geradezu umkehren kann, so daß der Unterarm länger sein kann als der Oberarm. Mollison hat dies, wie mir scheint, ganz besonders kennzeichnende Verhältnis bei den von ihm untersuchten 6 Orangs nicht beobachten können. Das kleinste Verhältnis war 94°/o, das höchste 99°/o, das Mittel 96.3°/o. Auch ich fand bei 3 Orangarmen im Museum für Naturkunde Berlin den Oberarm länger als den Unterarm. Die Maße waren folgende:

	Orang Platen (Sarawak)	Nr. 8510	Nr. 8518
Oberarm	31.1	38.7	34.1
Speiche	30.6	37.5	33.2
Unterarm mißt vom Oberarm	98.4°/o	97.2°/o	97.3°/o.

Bei allen anderen von mir gemessenen Orangs war die Unterarmlänge aber wesentlich über 100°/o von der Oberarmlänge (s. Taf. II S. 434).

Beim Gorilla scheint der Unterarm beim Erwachsenen dem menschlichen Verhalten sich zu nähern; er bleibt im Wachstum offenbar gegen den Oberarm zurück, wie bereits Mollison, der bei 6 Gorillas im Mittel 82°/o fand (a. a. O. S. 203), angab. Um einen besseren Einblick in das Verhalten des Gorilla in dieser Hinsicht zu erhalten, untersuchte ich eine Anzahl von Gorillaskeletten des Naturkundemuseums in Berlin. Ich möchte dabei nicht unterlassen, Hrn. Kollegen Direktor Zimmer und Hrn. Dr. Pichler sowie auch Hrn. Oberpräparator R. Lemm, der mir zu dem in einem Schaukasten wohlverschraubten Riesengorilla Hans Meyers Zugang verschaffte, für ihre Unterstützung verbindlichsten Dank zu sagen. Ich fand folgende Maße:

	Gorilla 18513	Nr. 1509	Nr. 11642	Jakob	Nr. 3521	Nr. 18516	Hans Meyeri	Nr. 12809	Nr. 31806
Oberarm	46.0	42.0	44.5	44.5	35.2	46.9	46.0	47.8	38.7
Speiche	35.5	34.4	36.0	36.1	28.4	37.0	36.0	37.8	30.7
Unteram : Oberarm =	77.2°/o	81.9°/o	80.9°/o	81.1°/o	80.7°/o	78.9°/o	78.3°/o	79.1°/o	79.3°/o

Aus den 10 von mir untersuchten erwachsenen Gorillaskeletten (Anatomie und Museum) errechnete ich die Unterarmlänge im Mittel auf 80.07°/o der Oberarmlänge.

Verhältnis der Handlänge zur ganzen Armlänge.

Die Tafel III ergibt die sehr bemerkenswerte Tatsache, daß die Handlänge des alten Gorilla im Verhältnis zur ganzen Armlänge kleiner als beim Menschen sein kann, da sie bei ihm (s. S. 428) 33.7°/o beträgt.

Beim Gorilla Hans Meyers fand ich folgende Längen: Nagelglied des Mittelfingers 2.3 cm, Mittelglied 4.5 cm, Grundglied 6.5 cm, somit Gesamt-

länge des freien Mittelfingers = 13.3 cm. Der Mittelhandknochen maß 9.3 cm, der ganze 3. Strahl demnach 22.6 cm. Da die Handwurzel im Bereich des Mittelfingers 4.6 cm maß, so war die ganze Handlänge 27.2 cm. Die Armlänge betrug (s. oben) 82 cm, somit beträgt die Handlänge (27.2) von der Armlänge (82) bei diesem Gorilla 33.2%, d. h. auch etwas (freilich nur unbedeutend) weniger als beim Menschen.

Bei zwei anderen Gorillahänden Nr. 30938 des Museums, zu denen leider die Arme fehlten, fand ich:

am Mittelfinger rechts:

Nagelglied	2.1 cm	freier Mittelfinger 12.1 cm
Mittelglied	4.0 »	
Grundglied	6.0 »	
Mittelhandknochen	9.6 »	
Mittelfingerstrahl	21.7 cm	
Handwurzel	4.3 »	
Handlänge	26.0 cm	

am rechten Daumen:

Nagelglied	1.9 cm
Grundglied	2.6 »
Freier Daumen	4.5 cm
Mittelhandknochen	5.0 »
Daumenstrahl	9.5 cm

An der linken Hand fand ich fast auf den Millimeter genau dieselben Maße.

Verhältnis der Handlänge zur Unterarmlänge.

Dieses Verhältnis zeigt sehr bemerkenswerte Unterschiede.

Wie die Gorillahand im Verhältnis zum ganzen Arm etwas kleiner ist wie beim Menschen, so auch im Verhältnis zum Unterarm, und zwar noch in beträchtlich erhöhtem Maße, da die Handlänge beim Menschen 80.5%, beim alten Gorilla aber nur 69.7% der Unterarmlänge betragen kann (s. Taf. IV). Bei dem Riesengorilla fand ich sie 27.2 : 36 = 75.5%, d. h. also fast geradeso wie beim lebenden Gorilla. Bei Gorilla Nr. 31806 des Museums fand ich das Verhältnis 22.4 : 30.7 = 72.9%. Es ist daher nicht ganz richtig, wenn Michael Reicher[1] sagt, daß unter den Primaten die Anthropoiden die längste Hand besitzen, da es auf den Gorilla nicht zutrifft, wenn wir den Menschen bei den Primaten einschließen. Beim jungen Gorilla ist das Verhältnis noch nicht so weit vom Menschen abweichend. Die Hand bleibt also im Wachstum beim Gorilla gegen den Unterarm zurück. Auch Mollison fand das Zurückbleiben, wenn er auch nicht eine so ausgeprägte Kurzhändigkeit, wie ich, feststellen konnte. Dies Zurückbleiben der Hand und, wie wir gesehen haben, auch des Unterarmes, dürfte wohl mit der Tatsache im Zusammenhang stehen, daß der Gorilla nur noch wenig klettert. Selbst der junge Gorilla, den wir neulich hier sahen, unterschied sich von seinen Orang- und Schimpansenvettern sehr wesentlich durch seine geringe Kletterlust und Kletterkunst.

Verhältnis der Armlänge zur Körperlänge.

Bei einigen der Menschenaffen stehen mir auch die Maße der Körperlänge vom Scheitel bis zur Ferse (bei möglichster Streckung), der hin-

[1] Reicher, Michael, Croissance des membres de l'hommes avant la naissance. Travaux de l'institut d'anatomie de l'Université de Wilna. 1925. S. 61.



teren Rumpflänge vom Scheitel bis zum Damm und der Beinlänge zu Gebote, so daß wir auch diese Längen mit den vorbehandelten Längen vergleichen können.

	Orangs			Schimpansen		Gorillas	
	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	Fick-Michaelis'	Tschika (Teneriffa)	jg. lebd. Zoo Berlin	H. Meyeri
Arml.: Körperl.	79 : 140 =56.4%	73.5 : 133 =55.2%	66 : 113 =59.2%	36.5 : 72 =58.3%	Oberarm r. u. l. 26.8 cm Speiche. » 26.2 » Arm .... 53.0 : 133 = 39.9%	54 : 120 =45.0%	82 : 165 =49.9%

Ich bestimmte dies Verhältnis auch an unserem sog. »Meßskelett«, d. h. den mazerierten Knochen einer ausgesucht schönen männlichen Leiche eines 38jährigen Mannes, an der vor der Mazeration von Hrn. Dr. Friedel die wichtigsten Außenmaße und die Körperlänge (172 cm) festgestellt waren.

Die Arme sind rechts und links gleich lang, nämlich 51.6 cm, von denen 29.4 cm auf den Oberarm, 22.2 cm auf die Speiche treffen. An dieser Person war die Armlänge (51.6 cm) daher gerade 30.0% der Körperlänge (172 cm). In diesem Verhältnis ist die Schimpansin Tschika dem Menschen also bei weitem am ähnlichsten.

Verhältnis der Handlänge zur Körperlänge.

	Riesenorangs		Schimpansin Tschika (Teneriffa)	Gorillas	
	Anton	Jumbo		lebend jg.	H. Meyeri
Handlänge : Körperlänge... Handlänge mißt von Körperlänge	29.0 : 140.0 = 20.7 %	25 : 133 = 18.8 %	24.3 : 133.0 = 18.3 %	20 : 120 = 16.6 %	27.2 : 165 = 16.5 %

Da das Verhältnis beim Menschen etwa 10—10.6 Hundertstel beträgt, so ist bei den Menschenaffen die Hand im Verhältnis zur Körperlänge also viel größer, beim Orang fast oder wirklich doppelt so groß, beim Gorilla ist der Unterschied etwas geringer, aber doch auch sehr beträchtlich.

Verhältnis der Handlänge zur Rumpflänge.

	Riesenorangs		Schimpansen			Gorilla lebend jg.
	Anton	Jumbo	Tschika (Teneriffa)	♀ Zoo Berlin	♂ Zoo Berlin	
Handlänge : hintere Rumpflänge ...	29.0 : 90.0 = 32.2 %	25 : 82 = 30.4 %	24.3 : 82 = 29.6 %	16.5 : 32.0 = 51.6 %	17.0 : 33.5 = 52.2 %	20 : 65 = 32.3 %

Beim Menschen beträgt die Handlänge nur etwa 18.4 % von der Rumpflänge.

Verhältnis der Handlänge zur Gesichtshöhe.

Handlänge : Gesichtshöhe	29 : 25 = 116.0 %	25.0 : 22.5 = 111.1 %	Tschika 24.3 : 19.3 = 125.9 %	20 : 17 = 117.9 %

Beim Menschen ist nach den Angaben der Künstler und Künstleranatomen die Handlänge gerade gleich der Gesichtshöhe, wie wir es übrigens auch bei WALDEYERS Hand feststellen konnten. Bei den Menschenaffen ist die Hand nach obigem also wesentlich länger im Verhältnis zur Gesichtshöhe.

Verhältnis der Beinlänge zur Körperlänge.

	Orangs			Schimpansen (s. Sitzber. 1925/IX)		Gorillas	
	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	Fick-Michaelis'	Tschika (Teneriffa)	John Daniel	H. Meyeri
					Oberschenkel 28.0 cm Schienbein .. 24.8 »		
Beinl.: Körperl.	53 : 140	51 : 133	44 : 113	36 : 72	Beinlänge .. 52.8 : 133	45 : 120	70 : 165
Beinl. beträgt v. d. Körperl. ..	= 37.9 %	= 38.9 %	= 38.9 %	= 50.0 %	= 39.5 %	= 37.5 %	= 42.4 %

Das Menschenbein ist bekanntlich wesentlich länger im Verhältnis zur Körperlänge als bei den älteren Menschenaffen. Bei unserem sog. »Meßskelett« (s. o.) habe ich das Verhältnis beim Menschen auf 79.5 : 172 = 46.2 % bestimmt.

Verhältnis der Beinlänge zur hinteren Rumpflänge.

	Orangs			Schimpansen			Gorilla
	Anton	Jumbo	Fick-Michaelis'	Fick-Michaelis'	♀ Zoo	♂ Zoo	junger
Beinlänge : Rumpflänge	53 : 90 = 58.8 %	51 : 82 = 62.2 %	44 : 74 = 59.5 %	36 : 54 = 66.6 %	38 : 32 = 118.7 %	35 : 33.5 = 104.5 %	45 : 65 = 69.2 %

Verhältnis der Armlänge : Beinlänge.

Eines der kennzeichnendsten Verhältnisse für die Unterschiede in der Körpergestalt ist offenbar der von den Anthropologen so genannte »Intermembralindex«, d. h. die Arm-Bein-Vergleichslänge.

Beim Manne fand ich dieses Verhältnis bei 5 Personen im Mittel 51.9 : 79.5 = 65.3 %; MOLLISON fand die Armlänge bei den allemannischen Personen 65—81, im Mittel 73.2 %; NISHIZUKA bei japanischen Feten 86.1, bei Neugeborenen 80.4, bei Kindern (bis 2 Jahre 4 Monat) 77.4, bei 20 erwachsenen Japanern 69.1 %.

Die Menschenaffen, auch der Gorilla, haben, wie Taf. V (S. 435) zeigt, bei weitem längere Arme im Verhältnis zu ihrer Beinlänge wie der Mensch, dessen Arm nur $^2/_3$ bis höchstens $^3/_4$ so lang wie das Bein ist. Beim Orang ist der Arm gar doppelt so lang wie das Bein. Dies Verhältnis der beiden Glied-



maßen zueinander ist gut aus dem Lichtbild (Bild 3) zu erkennen, das ich einer sehr gelungenen Reihe von Aufnahmen entnehme, die ich der Liebenswürdigkeit des Hrn. Dr. Lutz Heck verdanke.

Verhältnisse der Fingerlängen.

Unser junger Gorilla hat, wie Taf. VI (S. 435) zeigt, im Verhältnis zur Rumpflänge den bei weitem kürzesten Mittelfinger. Freilich ist das hier angegebene Maß von Hrn. Major Perry an der Schwimmhautgrenze genommen,

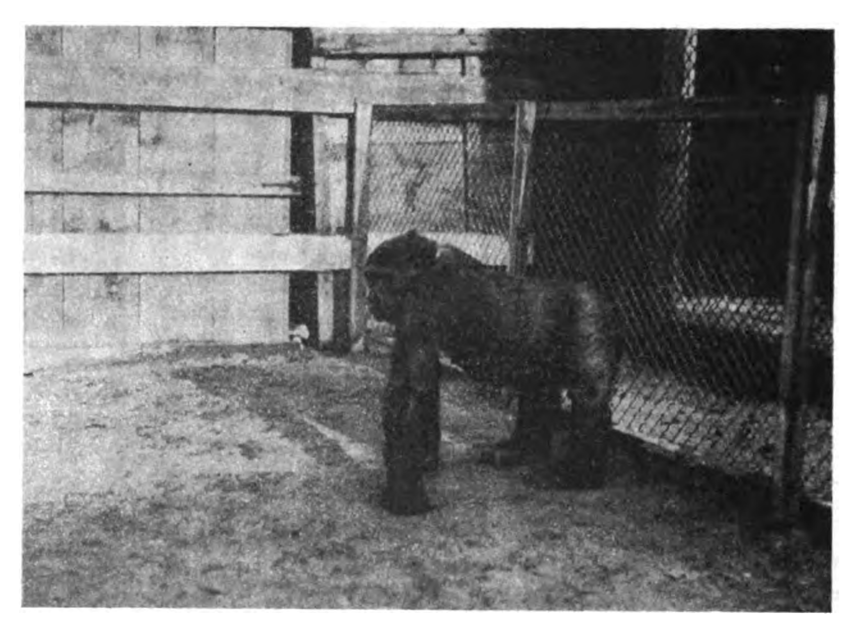


Bild 3. Gorilla »John Daniel«. Aufgenommen von Dr. Lutz Heck.

entspricht also nicht der Knochenlänge des Mittelfingers. Auch bei den anderen Fingern stellt es sich heraus, daß sie kürzer wie beim Orang und Schimpansen sind.

Die Mittelfingerlänge kann im Verhältnis zur Handlänge (s. Taf. VIII) bei den Menschenaffen, wie man sieht, ziemlich stark, selbst bei derselben Art, schwanken, ist aber im Mittel etwa gerade so groß wie beim Menschen, wo sie im Mittel 48.6 % der Handlänge beträgt. Besonders lang erschien mir die Fingerlänge öfters bei chinesischen Studenten. Bei den 3 von E. Kurz so sorgfältig gemessenen Chinesenhänden errechnete ich aber nur 47.0, 47.1 und 48.9 %.

Auch das Verhältnis der Mittelhandknochenlänge des Mittelfingers zur Handlänge ist bei den Menschen und Menschenaffen (s. S. 428) sehr ähnlich. Beim Menschen ist es z. B. 6.07 : 18.27 = 33.2 %, beim Orang (Anat. Berlin) 9.3 : 26.1 = 35.6 %, beim Gorilla (Anat. Berlin) 9.1 : 24.4 = 37.3 %, im Mittel bei 7 Teneriffa-Schimpansenhänden 8.44 : 23.92 = 35.3 %.

Während die Mittelfingerlänge (und auch die anderen Fingerlängen mit Ausnahme der Daumen) und die Mittelhandknochenlänge im Verhältnis zur

Handlänge bei den Menschenaffen kaum wesentlich unterschieden ist von der beim Menschen, ist das Verhältnis der Mittelfingerlänge zur Körpergröße und zur Rumpflänge aber ein ganz anderes. Beim Menschen ist die Mittelfingerlänge z. B. bei mir etwa 10 : 172 = 5.8 % der Körperlänge, beim erwachsenen Gorilla aber 13.3 : 165 = 8.1 %, beim Orang (Anton) gar 12 : 140 = 8.6 %, beim Schimpansen (Tschika) 11.8 : 133 = 8.8 %. Der Unterschied beträgt daher (5.8 : 8.8 %) rund 1/3, nämlich 34 %. Das Verhältnis der Mittelfingerlänge zur Rumpflänge ist bei meiner eigenen Hand 10 : 87 = 11.5 %, beim Orang (Anton) (s. Taf. VI) = 13.3 %, beim Gorilla (Anat. Berlin) etwa 11.3 : 89 = 12.6 %, bei den Schimpansen 19.5—23.9 %. Im Verhältnis zu ihrer Rumpflänge sind daher die Schimpansen besonders langfingrig.

Daumenlänge.

Aus den Zahlen der Tafeln IX und X geht hervor, daß die Schimpansin Loka und der junge Gorilla die kürzesten Daumen hatten, daß aber bei den Menschenaffen offenbar sehr große persönliche Unterschiede bestehen. Sehr bemerkenswert scheint es mir, daß unsere Messungen beweisen, daß der Daumen keineswegs bei allen Menschenaffen so kümmerlich ist, wie das häufig dargestellt wird und wie es z. B. beim Seiden- und Schlankaffen tatsächlich der Fall ist. Denn der Orang Jumbo und der jetzige weibliche Schimpanse im Zoologischen Garten zeigen, daß der Daumen (ohne Mittelhandknochen) genau dieselbe Länge im Verhältnis zum Zeigefinger (Taf. IX) haben kann wie beim Menschen, wo wir als Mittel 62.8 %, bei Waldeyers Hand allerdings 68.9 % fanden. Gegen die Handlänge (Taf. X) bleibt die freie Daumenlänge allerdings wohl bei allen Menschenaffen zurück, da sie beim Menschen, wie wir gesehen haben, im Mittel 27.3 % gegen 15—22 % beim Affen beträgt.

Daß der Daumen bei den Menschenaffen so kurz erscheint, daran ist vor allem weniger die Kürze des Daumens als vielmehr die große Länge des Nachbarstrahls, namentlich dessen Mittelhandknochens, schuld. Der Daumen der Menschenaffen ist absolut nur wenig kleiner als beim Menschen, steht aber im Verhältnis zu den Nachbarstrahlen stark zurück. Besonders auffallend ist, wie angedeutet, der Unterschied zwischen den Mittelhandknochen. Beim Menschen besitzt der Mittelhandknochen des Daumens eine Länge von 4.27 gegen 6.31 = 67.7 % des Zeigermittelhandknochens, während seine Länge bei 5 Teneriffaschimpansenhänden im Mittel nur 3.87 : 8.42 = 44.7 %, bei unserem Gorillaskelett 4.5 : 8.9 = 50.6 % und bei unserem mazerierten Orangskelett 5 : 9.4 = 53.2 % von der des Zeigermittelhandknochens beträgt. Beim Orang und Gorilla reicht die Daumenspitze meist nur bis zum Grundgelenk des Zeigefingers oder wenig darüber hinaus, während sie beim Menschen (z. B. bei Waldeyers Hand) bis zum ersten Zwischengelenk des Zeigerfingers reichen kann.

Daß der Daumen bei den Menschenaffen »weiter hinten an der Hand sitzt« wie beim Menschen, ist nach meinen Beobachtungen nicht zutreffend. Am sichersten ist das an den Skeletthänden von Terzera zu erkennen, die nach H. Virchows Weise vor der Mazeration abgegipst und unter Einpassung in

die Gipsform aufgestellt wurden. Über besonders kurze Daumen beim Menschen durch besondere Kürze der Nagelglieder trotz längerer Mittelhandknochen und ihre Vererbbarkeit berichtete BREITENBACHER[1]. Er konnte die Vererbung in 5 Geschlechtsfolgen bei männlichen und weiblichen Familienmitgliedern, und zwar als »durchschlagendes« oder »dominantes« Erbmerkmal nachweisen.

Freilich ist die Stärke des Daumens bei den Affen, auch beim Gorilla, bei weitem geringer als bei den Menschen, weil ihnen der lange Daumenbeuger fehlt, bzw. bei ihnen zum Zeigefinger läuft. Damit steht offenbar im Zusammenhang, daß der Affendaumen entschieden schwächlicher gebaut, dünner im Verhältnis zu den anderen Fingern ist wie bei den Menschen.

Die Schwäche des Daumens und sein Zurückstehen an Länge infolge der verhältnismäßigen Kürze seines Mittelhandknochens deutet schon darauf hin, daß der Daumen bei den Menschenaffen längst nicht die ausschlaggebende Rolle bei den Greifbewegungen besitzt wie beim Menschen. Beim Menschen ist ja der Daumen bei weitem der wichtigste Finger der Hand, wie ja schon aus der Geschichte bekannt ist. Man denke an das Abhauen der Daumen bei den Gefangenen, um sie kriegsuntüchtig zu machen, wie es in den Judenkriegen, im Peloponnesischen und Cäsars Kriegen geschehen ist. Ein »pollice truncus« galt nichts mehr. Das französische »poltron« für »Taugenichts« wird von manchen ja auch von pollice truncus abgeleitet, ob mit Recht, ist Sache der Philologen, zu entscheiden. Und das »Daumenhalten« hat sich von den Gladiatorenkämpfen her bis auf unsere Zeit erhalten. So hat sich ja auch der Aberglaube des Daumens bemächtigt, der Daumen des Gehenkten »bringt Glück ins Haus« und wurde daher vom Scharfrichter teuer verkauft. Und auch eine der neuesten Errungenschaften, die freilich für das wirkliche Volkswohl, für den Gesundheitswillen des Volkes so unendlich schädlichen Krankenkassenversicherungen bewerten den Verlust des Daumens so hoch wie den eines Auges, sie zahlen für den rechten Daumen 33% der Ganzkrüppelsumme, während z. B. für den Zeigefinger nur etwa 7% gezahlt werden. Beim Menschen spielt eben das Zugreifen, die Zangenbildung des Zeige- und Mittelfingers mit dem Daumen, der sog. »Spitzgriff«, wie es SAUERBRUCH[2] in seinem Buch über die willkürlich bewegliche künstliche Hand auseinandersetzt, die Hauptrolle.

Bei den Menschenaffen, die ja, mit Ausnahme des Gorilla, sich hauptsächlich durch hangelndes Klettern fortbewegen, kommt es offenbar hauptsächlich auf das mehr oder weniger volle Umgreifen der dicken säulenförmigen Äste an: Dazu ist kein Spitzgriff nötig, sondern genügt eine Umfassung durch die großen, alle gleichgerichteten Finger, die sozusagen als »Kletterhaken« wirken. Sie wenden den »Spitzgriff« viel weniger an wie wir, offenbar weil der Daumenstrahl so kurz ist und durch das Fehlen des langen Daumenbeugers keine Kraft hat. Auch Hr. Dr. v. ALLESCH, Privatdozent an der psychologischen Anstalt der Universität Berlin, hat dieselbe Beobachtung gemacht. Er hebt überdies hervor, daß die Menschenaffen kleine Früchte, wie Kirschen und Haselnüsse, nicht wie der Mensch zwischen Daumen und Zeiger fassen, sondern zwi-

---

[1] BREITENBACHER. In: »Heredity« 14. I. 1923.
[2] SAUERBRUCH, F., Die willkürlich bewegbare künstliche Hand II. Bd. 1923 S. 56.



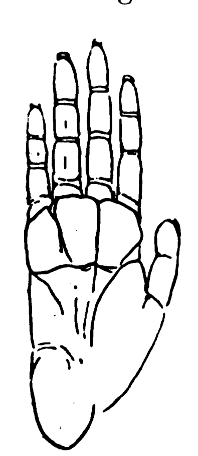
schen Zeiger und Mittelfinger. Sie machen also die sog. »Schere der Langfinger«, der Taschendiebe, die ich in meiner früheren Arbeit über die Maßverhältnisse der Hand (a. a. O., S. 223) erwähnte. Auch ein Javaaffe, den ich eingehender beobachten konnte, führte auch beim Greifen kleiner Gegenstände immer mehr »Baum-« oder »Astgriff« aus als »Spitzgriff«.

Damit scheint mir auch ein anderer Unterschied der Affen- und Menschenhand zusammenzustimmen, daß nämlich die Finger des Menschen beim Zusammenlegen mehr oder weniger stark gegen einen Punkt oberhalb des Daumenballes zusammenstreben und daß die Fingerknochen eigentümliche Verdrehungen ihrer Gestalt um ihre Längsachse erkennen lassen, die einer meiner japanischen Schüler[1] jüngst näher beschrieben hat. Beim Affen stehen die Mittelhandknochen mehr gleichgerichtet nebeneinander und so auch die Finger bei der Beugung.

Daß der Zeigefinger bei den Affen nicht ellenwärts abgeknickt erscheint wie bei der »Arbeitshand« des Menschen, läßt sich leicht verstehen, da der stärkste Muskel, der an den Zeigefinger geht, bei den Affen von der Speiche entspringt (er ist, wie vorhin bemerkt, in der Stammesentwicklung offenbar dem langen Daumenbeuger des Menschen gleichzusetzen) und der Sehnenkanal an der Handwurzel beim Affen viel breiter ist.

Handlinien.

Mit der »geraderen«, weniger nach einem Punkt zusammenstrebenden Beugung der Finger hat endlich offenbar auch noch ein weiterer Unterschied der Affen- und Menschenhand etwas zu tun, nämlich der andere Verlauf der Handlinien, soweit sie auf der Beugung der Finger beruhen. Beim Menschen laufen die beiden geraden Hauptlinien, die sog. »Linie des Tischs« der alten Handwahrsager (»linea mensalis«) oder der »Herzlinie« der neueren Wahrsager und namentlich die sog. »Linie des Kopfes« (»linea cephalica«) sehr schräg von der Speichen- zur Ellenseite in der Hand aufwärts, d. h. unterarmwärts (s. Bild 4 u. 5 auf nächster Seite). Bei den Affen ist das entschieden nicht so der Fall, ja bei manchen Affen läuft die Beugefalte mehr oder weniger ganz quer (s. Bild 3).


Bild 3. R. Hand des Rhesusaffen

Den »Tisch« oder »Quadrangel« zwischen den beiden eben erwähnten Linien bzw. das Vorhandensein der zwei Beugefalten, statt nur einer einzigen, erkläre ich mir so, daß im Bereich der hinteren (armwärts liegenden) Linie die Haut am Hohlhandsehnenblatt (aponeurosis palmaris) festgewachsen ist. Dadurch wird bei der Fingerbeugung ein Hautwulst vor der Stelle zusammengeschoben, und entsteht vor dem Wulst, der sich bei Streckung zum »Tisch« ausbreitet, eine zweite Beugefalte. Daß die vordere Falte meist nur bis zum ellenwärtigen Rand des Zeigefingers reicht, wird wohl erstens dadurch bewirkt, daß

[1] Shino, K., Einiges über den Mechanismus des Greifens. Ztschr. f. Anat. u. Entwgesch. 77. Bd. 1925.

häufig die drei ellenwärtigen Finger mehr gebeugt werden als der Zeigefinger, so daß die sog. »Schwimmhaut« am weniger gebeugten oder ganz gestreckten Zeigefinger vorne festgehalten wird. Und zweitens dadurch, daß im Bereich des Zeigefingers die Haut im Bereich der hinteren Falte nicht mehr so straff an dem Sehnenblatt, das hier auch bereits merklich dünner ist, festgewachsen ist, so daß die Haut dort bei der Beugung des Zeigefingers zurückgeschoben werden kann und sich daher davor nicht ein starrer Wulst bilden muß, wie es weiter gegen die Mitte der Handfläche hin der Fall ist. Der speichenwärtige, bis an den Handrand durchschneidende Teil der »Kopf-

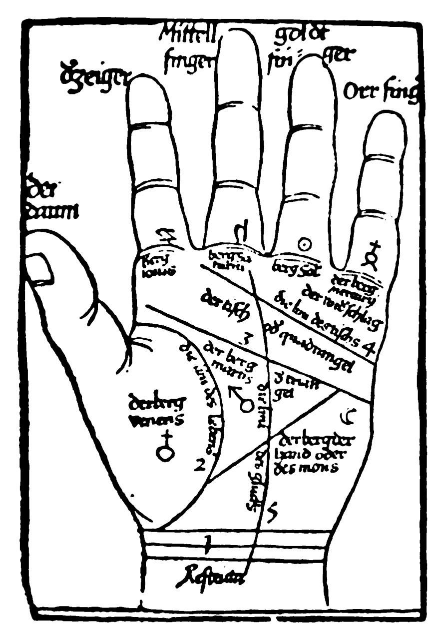


Bild 4. Aus: Barptolomaei Coclitis Bononiensis, naturalis Philosophiae ac Medicinae Doctoris, Physiognomiae et Chiromantiae Compendium. Argentorati (Straßburg). Anno 1533.



Bild 5. Handlinien des Menschen. In der Mitte die »Glückslinie«. Schräg die »Kopflinie« und davor (fingerwärts) die »Tischlinie«.

linie« wird bei Leuten, die den Zeigefinger viel beugen, sich natürlich tiefer eingraben, besser ausgesprochen sein als bei Leuten, die ihn weniger oft beugen. (Frühes Aufhören der »Kopflinie« bedeutet nach den Wahrsagern Mangel an Verstand.)

Leider ist ja heutzutage der Aberglaube der Handwahrsagerei wieder aufgelebt und scheint sogar seine Jünger zu ernähren, wie ein Buch[1], in dem u. a. die Schicksalsbedeutung der Handlinien Max v. Liebermanns ernsthaft auseinandergesetzt ist, und ein geschäftsmäßiges Wahrsage-Gutachten, wenn ich so sagen soll, das mir einer meiner Schüler brachte, zu beweisen scheint.

Kein Mediziner kann allerdings darüber im Zweifel sein, daß auch die anderen Falten fast alle Beugungs- bzw. Bewegungsfalten sind und daher

[1] M. v. Kreusch, Moderne systematische Menschenkenntnis. Verlag Kreusch, Berlin, S. 59. 1922.

in erster Linie von den Bewegungsgewohnheiten, also auch vom Beruf beeinflußt werden. Zu einem geringen Teil sind die Bewegungsgewohnheiten, z. B. die Haltung der Daumen, ob sie mehr gespreizt oder aber untergeschlagen gehalten werden, natürlich auch von der Vererbung abhängig; ebenso auch die Verwachsungsverhältnisse der Haut mit der Unterlage, die für die Faltenbildung, wie ich eben ausführte, offenbar auch sehr in Betracht kommen.



Bild 6. Orang (Zool. Garten Berlin) nach Kinoaufnahme Dr. v. Allesch; zeigt »Fallhand«.

Es wäre daher wissenschaftlich nicht ganz undenkbar, daß gewisse Handlinien, ebenso wie gewisse Knochenlängen (Daumenlänge) in der Art, wie Kretschmer das von anderen körperlichen Eigenschaften wahrscheinlich gemacht hat, zu bestimmten Geistes- oder Seelenanlagen zusammengehörig wären.

Daß die Handlinien aber mit gewesenen oder aber gar mit zukünftigen Ereignissen gesetzmäßig zusammenhängen, ist natürlich einfach ein Hirngespinst.

Ruhehandhaltung.

Zum Schlusse möchte ich noch auf eine Tatsache hinweisen, die mir bei der lebenden Affenhand auffiel, das ist die Tatsache, daß die Affenhand beim schlaffen Herabhängen der Hand entschieden einen engeren, oft voll-

kommen rechten Winkel mit dem Unterarm bildet, also wie bei der sog. »Fallhand« des Menschen bei Lähmung des Speichennerven. Hr. Privatdozent Dr. v. Allesch war so freundlich, für mich einen Film eines Orangs im hiesigen Zoologischen Garten aufzunehmen, in dem er die von mir gewünschte Stellung wirklich erhascht hat (s. Bild 6 und 7).

Wenn ein gesunder Mensch die Hand schlaff herabfallen läßt, so bildet sie, soweit ich es bisher verfolgt habe, fast immer einen stumpfen Winkel



Bild 7.
Orang (Zool. Garten Berlin) nach Kinoaufnahme Dr. v. Alleschs; zeigt Fallhand.

mit dem Unterarm. Ich glaube, daß diese Erscheinung durch einen Befund erklärt wird, den ich bei der Untersuchung der Muskeln der Teneriffa-Schimpansen und der Muskeln des Hundes gemacht habe. Ich fand nämlich, daß bei diesen Tieren die Strecker der Hand bedeutend schwächer sind als beim Menschen, so daß die Beuger bei ihnen viel mehr überwiegen als beim Menschen. Daher ist in den Streckern natürlich auch die Ruhespannung, der sog. »Tonus« bei den Affen geringer, bei den Beugern hingegen stärker, so daß die Hand, wenn sie bei wagerecht gehaltenem Arm der Schwere überlassen wird, senkrecht herunterfallen kann, während sie beim Menschen durch die stärkere Ruhespannung in den Streckern weniger weit heruntersinkt, weil die Schwere die Strecker weniger stark dehnen kann.

Daß die Strecker der Hand und der Finger beim Menschen besser entwickelt sind, beruht meiner Meinung[1] nach darauf, daß bei den geistig höchst-

[1] R. Fick, Messungen und Betrachtungen über die Muskelfaserlänge bei Muskelschrumpfung. In: Festschrift für R. v. Jaksch. Wiener Archiv für innere Medizin X. Band 1925.

stehenden, den bewußten, den »suchenden« Bewegungen die Strecker die Hauptrolle spielen, im Gegensatz zu den unbewußten, unwillkürlichen sog. reflektorischen Bewegungen. Durch die Strecker wird der Arm und die Hand gewissermaßen geöffnet und gegen einen Gegenstand der Außenwelt hin, auf den wir zielen, den wir begehren, ergreifen wollen, vom Körper wegbewegt, ausgereckt. Durch die Beuger wird dann der Gegenstand nur herangeholt oder beim Klettern der Körper gegen den gesuchten ergriffenen Ast herangezogen. Die letztere Bewegung ist gewissermaßen nur die Vollendung, die Ausführung der eingeleiteten Handlung, die sozusagen rein mechanisch, ohne Überlegung als notwendige Folge des ersten Teiles der Handlung vollzogen wird.

Die Streckergruppe nannte ich daher die Geistgruppe oder »Suchgruppe«, die Beugergruppe die Kraft- oder Ausführungsgruppe.

Berlin — Lans (Tirol), Ostern 1926.

Hauptzahlentafeln s. S. 448—451.



Längenmaße der oberen Glied

Nummer des Präparates	Körperseite	Schulterblatt	Schlüsselbein	Oberarm	Elle	Speiche	Daumen				Zeiger				
							Mittelhandknochen	Grundglied	Nagelglied		Mittelhandknochen	Fingerglieder			
									Länge	Breite		I.	II.	III. Länge	III. Breite
1	L.	14.2	13.6	28.7	20.0	19.9	40	26	18	13	61	35	21	15	10
2	L.	16.2	15.6	33.9	21.1	22.5	48	30	23	15.5	67	41	25	18	11.5
3	L.	14.9	14.0	29.8	22.0	22.0	45	30	20	15	65	40	23.5	17	11
4	R.	17.3	14.4	32.8	25.0	25.0	51	33	26	16.5	69	42.5	26	19.5	12
5	L.	—	14.5	31.8	23.0	23.0	41	27	21	17	61	32	21	15	11
6	L.	16.0	16.2	36.2	26.2	26.9	49	31	24	12.5	70	42	26.5	12	12
7	L.	—	13.1	29.3	21.5	21.5	34	25	21	15 (9)	60.5	36	22	19	12 (7)
8	L.	15.5	14.5	33.1	23.1	24.0	44	32	23	15 (10)	68.5	40	24.5	19	11 (8)
9	R.	13.5	13.0	28.2	20.2	21.0	38.5	26	22	12.5 (8)	59	36	22	16	9 (5.5)
10	L.	14.3	14.0	32.8	23.8	23.5	—	29	20	15 (11)	65	40	24.5	17	10
11	R.	15.4	15.1	34.6	24.6	24.9	44	28.5	23	15	66	38	23.5	18	11
12	R.	15.1	13.2	30.6	20.8	20.5	40.5	28	21	15	60	39	23	17	11
13	L.	16.1	17.0	33.5	24.1	24.8	44	31	23	16 (10)	64	39	25	20	11 (6.5)
14	L.	14.0	12.5	32.3	22.2	22.4	42.5	30	23	16 (9.5)	66	41	25	19	11.5 (7)
15	R.	13.6	13.1	29.0	20.2	20.2	40	26	19	13	60	34	20	14	10
16	R.	14.9	13.6	31.0	21.5	22.0	40	27	19.5	15	60	37	22	15	11
17	R.	15.2	14.7	30.9	21.5	22.3	41	28	22	16	59.5	32	22	11	10.5
18	R.	—	—	28.2	19.5	19.7	40	27	19	15	60	34.5	21	15	10
19	L.	15.6	15.4	30.9	21.3	21.6	41	27	18.5	13	58	36	22	13	11
20	R.	15.5	15.0	31.0	22.2	22.6	43	27	20	17	61	37	21	16	11
21	R.	13.9	13.2	28.1	21.3	21.2	—	—	—	—	62	39	24	15	11
22	L.	15.3	15.0	30.5	21.8	21.5	42	28	21	16	64	39	24	17	11
23	L.	14.7	14.5	29.6	21.0	21.5	42.5	27.5	19	15 (7.5)	61	39.5	24.5	17	13 (7)
24	L.	13.3	13.7	30.5	21.9	21.2	42	29.5	21	14	64	39	24	15	10
25	L.	13.0	13.6	30.1	20.5	20.8	40	27	21	14	56.5	41	27	15	13.5
26	L.	13.7	13.0	29.6	20.0	20.1	38	26	20	13.5	56	38	26.5	16.5	10.5
27	R.	13.7	—	30.5	22.2	22.4	—	29.5	20	14 (8.5)	65	39	24.5	17	10
28	L.	14.5	14.4	32.0	21.3	21.8	42	31	22	16	64	40	25	18	12
29	R.	14.0	13.6	29.9	20.6	20.8	40	26	19	14	57	36	21	15	10
30	L.	16.8	14.6	33.9	22.7	23.0	45.5	31	23	15	65	41	25.5	19.5	12
31	L.	14.8	13.5	33.3	23.1	23.4	40	25	20	13	59	32.5	20	16	10
32	L.	16.9	16.1	32.3	23.6	23.2	44	30	23	18	63	38	23.5	18	12
33	L.	17.4	14.8	33.4	24.1	24.2	50	30	22.5	15	68	41	25	18.5	11
34	L.	15.0	—	32.8	22.8	23.4	46	31.5	22.5	14 (14)	66	39	24.5	20	11.5
35	R.	13.0	13.4	28.0	19.5	19.7	38.5	26	19	13	58	35	21	15	10
36	R.	13.0	13.5	30.6	22.1	22.9	44	29.5	21	14	65	39	22	16	10
37	R.	14.6	—	33.1	23.8	24.0	41.5	32	24	14	69	44	27.5	18.5	10
38	L.	15.9	15.8	33.0	23.5	24.0	47	32	23	16.5	67	42	24	18	11.5
39	L.	14.6	14.2	31.3	21.9	22.4	45	29	23	15.2	66	41	25	18	10
40	R.	15.4	14.6	33.0	23.3	23.9	42	28.3	21	14.5	64.5	38.5	23.5	16	10
41	L.	14.5	13.0	29.9	19.8	20.4	39	27.5	21	15	58	35	21	17.5	9.5
42	L.	13.3	14.4	30.4	21.6	22.5	42.5	29	20	13.5	65	39	22	17	9.5
43	R.	13.7	13.5	28.5	21.0	21.1	44	29.5	22	14	68	40.5	23	17	10
44	R.	16.0	14.6	31.7	22.0	22.3	45	31	22	17	62	38	23	18	10
45	L.	17.2	14.2	31.1	22.4	23.2	45	32.5	18.5	17	66	43	27.5	21	12
46	L.	16.6	14.7	30.9	22.5	23.1	46	30	23.5	15.5	65	41	26	18	11.5
47	L.	14.9	—	30.6	21.3	21.6	41	27	20	15	60	37	22	14	10 (5)

Die eingeklammerten Zahlen bei der »Breite der Nagelglieder« geben die Breite der »Hufrauhigkeit« an.

maßenknochen beim Menschen.

Nummer des Präparates	Mittelfinger					Ringfinger					Kleinfinger				
	Mittelhandknochen	Fingerglieder				Mittelhandknochen	Fingerglieder				Mittelhandknochen	Fingerglieder			
		I.	II.	III. Länge	III. Breite		I.	II.	III. Länge	III. Breite		I.	II.	III. Länge	III. Breite
1	58	38	26	16	10.5	52	36	24	15	9	48	29.5	27	13	8.5
2	63	45	31	19	12	54	42	29	19.5	11.5	49	32	19	17	10
3	64	43.5	30	17	12	55	42	29.5	17	10	51	33.5	21.5	16	9.5
4	66	48	32	21	12	60	45	31	22	12.5	57	36	23	20	11
5	60	41	27	16	12	55	40	26	15	12	49.5	29	18	16	10
6	68.5	46	32	19	13.5	62	42	28.5	20	13	54.5	34	22	16.5	11
7	58	40.5	28	18.5	12 (9)	51	38	25	19	11 (7)	50	29	13	17	10 (5)
8	68	46	31	19	12 (9)	59	42.5	28	19	11 (9)	53	34	21	18	9.5 (6)
9	57.5	40	37	17	9 (6)	51	37	25	17	9 (6)	46.5	30	18.5	17	8 (5)
10	62	44	31	17	11	54.5	41	29	17	11	51	33	20	16	9
11	61	43	31	19	12	56	39.5	27.5	20	12	53	30	19	18	10
12	58	43	30	17.5	11	53	40.5	29	18	11	50	32.5	22	17	10
13	61.5	44	31	19	12.5 (7)	55	41	29.5	19	12 (7)	52	32	20	18	11 (5)
14	65	44	31	20	12 (6.5)	57	41	30	20	11 (7)	53.5	35	23	17.5	10
15	57	38	25.5	15	10	51	36	24	15	10	42	29	16	14.5	9 (5.5)
16	59	41	28	15	11	55	39	28	15	11	50	31	20	15	10
17	58	41.5	28	17	11	52	39	27	19	11	50	30	18	(12)	10
18	57	38	25	16	11	50	36	24.5	16	10	48	28	17	14.5	8.5
19	56	39.5	27	16	11	58.5	34	24	16	11	46	29	18	13	8 (5)
20	58.5	41	26	17	12	54	40	26	17	12!	49.5	31	18.5	12.5	11
21	55	42	28.5	18	10.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	59.5	43	30	18	11.5	53.5	41	28	17.5	11	50	32.5	21	16	9.5 (7)
23	59	42	28.5	16	12 (7)	52	39.5	27	17	11 (7.5)	49	31	18.5	16.5	9.5 (6.5)
24	61	42	29	17.5	10	54	40	29	17.5	9.5	51	32	20	16	8.5
25	60	38	22	17.5	13	51	39	26	17	11.5	48.5	30	17	15	10
26	57	33.5	21	16	10	48	35	24	18	10	45	28	16.5	15	9
27	61	41.5	28.5	17	11	54	40	27	17	10 (6)	50	32	18.5	15	9 (4.5)
28	62	43	31	20	12.5	56	40	29	21	12	51	32	21	16	10
29	56	40.5	27	17	11	51	58.5	26	16.5	11	46.5	31.5	20	15	10
30	65	44.5	32	19	13.5	53	42	31	20	11.5	54.5	35	22.5	18	12
31	56	32	25	16.5	10	50	34	22	17	9	49	28	16.5	16	7
32	60	45	30	19	13.5	55	40	28.5	19.5	12.5	51.5	31	20	18	11.5
33	66	45	30	20	12	59	41	27.5	20	11	55	32	18	17.5	9
34	65	43	28	20	11.5	58	41	27	20.5	11	53	32.5	19	18	9
35	57	39	26	16.5	11	52	36	24	16	10	47	28.5	18	16	8
36	65	43	29	17	11	57.5	40	28	18.5	10	51.5	31	19	15	10
37	65	47	33	20	11	57.5	45	—	—	—	54.5	37.5	24	17	9.5
38	63.5	46	31.5	21.5	13	59	43.5	30	22	12.5	56	35	21.5	19	11
39	61.5	45	31	20	11	54	42.5	30	20	10.2	57	33.5	17.5	18	10
40	59	43	28.5	18	11	52.5	40	27	18.5	10.2	48	32.3	19.5	16.0	9.5
41	55	39	26	18	10.2	48	36	23	18	10	44	27.5	16	16	8.2
42	66	43.5	27.5	18	11	57	39.5	26	18	9.5	52	31.0	18	14.5	9 (6)
43	64.5	46	30	18.2	11	59	43.5	28	19.5	9.5 (8.2)	55.5	34.5	19.5	17.2	9 (6)
44	59	44	29	18.5	12	53	41	28	18.2	11	50.5	32	19.5	17	10 (6)
45	62	48	32	23	13	56	45	31	22	12.5	52	36	23	20	11
46.	65	46	32	19	12	59	43	30	19	12	54.5	34	21	18	10
47	57	41	28	15	12	54	38.5	28	15	11 (6)	49	31	20	14	9.5 (4.5)

Längenmaße der oberen Glied

Nummer des Präparates	Körperseite	Schulterblatt	Schlüsselbein	Oberarm	Elle	Speiche	Daumen: Mittelhandknochen	Daumen: Grundglied	Daumen: Nagelglied Länge	Daumen: Nagelglied Breite	Zeiger: Mittelhandknochen	Zeiger: Fingerglieder I.	Zeiger: Fingerglieder II.	Zeiger: Fingerglieder III. Länge	Zeiger: Fingerglieder III. Breite
48	L.	15.8	—	31.0	22.3	22.5	42	28	20	15	63	37	23	17	11
49	L.	16.7	15.0	33.5	24.0	24.7	43	30	22	16	64	37	23	17	12
50	R.	15.2	14.9	30.8	24.0	24.0	47	30	24	15	70	41	25	19	11
51	R.	16.8	14.6	34.0	22.5	24.0	40	28	19	15	64	38	22	19	10
52	L.	13.3	12.2	27.7	20.5	20.2	36	26	19	14	57	35	21	15	9
53	R.	17.8	15.0	35.4	24.7	24.7	45	28	22	17	65	39	22	16	12
54	R.	13.7	16.0	34.2	24.0	24.4	44	31	25	16	67	41	24	19	11
55	R.	13.5	12.1	26.3	19.5	19.5	36	24	17	13	56	34	19	14	10
56	R.	16.0	14.7	33.4	23.0	23.7	45	30	24	17	66	33	25	19	12
57	R.	14.5	14.3	31.7	22.5	23.0	43	28	23	15	62	40	24	17	11
58	L.	17.6	15.3	33.3	24.8	25.3	45	29	23	17	65	39	23	18	13
59	R.	15.7	14.4	33.2	23.1	22.3	42	28	20	15	61	38	22	16	10
60	L.	17.0	16.0	33.3	24.4	24.7	46	28	21	17	67	40	24	17	12
61	R.	16.7	16.7	34.6	25.0	25.7	41	29	24	17	63	38	23	19	13
62	R.	15.0	13.3	31.0	22.4	22.8	45	30	21	15	66	38	24	16	10
63	L.	15.1	13.7	30.5	21.6	22.0	43	28.5	21	14.5 (9.5)	60	Fingerglieder ungeordnet, daher Maße nicht sicher feststellbar.			
64	R.	16.1	14.6	32.5	24.5	23.9	43	30	22	14.5 (10)	61				
65	L.	17.0	15.1	34.7	26.5	26.5	45	29	22	15 (9)	63.5				
66	R.	17.2	15.6	35.3	26.5	26.9	44	29	21	15 (9)	64.0				
67	L.	14.8	14.2	29.5	21.5	22.0	40	28	21	15 (10.5)	62				
68	R.	13.5	13.3	29.2	21.5	21.8	42	28	21	15 (11)	62				

Die eingeklammerten Zahlen bei der »Breite der Nagelglieder« geben die Breite der »Hufrauhigkeit« an.

maßenknochen beim Menschen.

Nummer des Präparates	Mittelfinger					Ringfinger					Kleinfinger				
	Mittelhandknochen	Fingerglieder				Mittelhandknochen	Fingerglieder				Mittelhandknochen	Fingerglieder			
		I.	II.	III. Länge	III. Breite		I.	II.	III. Länge	III. Breite		I.	II.	III. Länge	III. Breite
48	59	41	26	18	10	53	38	26	15	10	50	30	16	15	10
49	62	42	30	18	12	54	41	27	15	12	52	34	19	17	10
50	66	45	29	19	11	59	41	28	19	10	53	32	20	17	9
51	60	41	25	16	9	53	37	24	15	9	49	29	17	14	8
52	57	40	26	15	10	50	36	25	16	10	45	27	17	14	8
53	61	45	29	19	12	55	42	28	16	11	51	32	19	16	10
54	64	45	30	20	12	57	43	28	20	11	54	34	20	19	10
55	52	37	25	14	10	44	30	23	13	10	41	27	15	13	8
56	62	40	29	20	14	55	40	28	21	13	52	32	20	18	11
57	61	44	29	18	11	52	44	29	19	11	57	33	18	17	11
58	63	44	29	19	12	56	42	28	19	13	47	32	20	17	11
59	57	43	28	17	11	53	40	26	17	10	49	31	19	15	10
60	66	44	30	17	13	60	40	27	17	13	56	31	19	16	11
61	64	45	29	19	13	54	41	29	21	13	52	32	19	17	11
62	63	42	29	16	10	56	39	26	17	11	53	31	18	15	9
63	59					52					47.5	29	17	17	8 (5)
64	58.5					52					48	32	18	17	8.5 (5)
65	61	Fingerglieder ungeordnet, daher Maße nicht sicher feststellbar.				57	Fingerglieder ungeordnet, daher Maße nicht sicher feststellbar				53	32	20	17	9 (6)
66	61					56					52	32	20	17	9.5 (6)
67	58					53					47.5	31	18.5	16.5	10 (6.5)
68	57					50					48	30	18	16	10 (6)

Ausgegeben am 27. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. **2. Dezember.**

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Planck sprach über **Die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.**

Anknüpfend an die von C. Carathéodory durchgeführte Ableitung des zweiten Wärmesatzes werden einige Bedenken gegen den Wert des von Carathéodory als Ausgangspunkt der Beweisführung benutzten Prinzips geltend gemacht und dann auf der Grundlage des Thomsonschen Prinzips von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art eine Begründung des zweiten Wärmesatzes entwickelt, welche die Vorzüge des von Carathéodory benutzten Gedankenganges besitzt, ohne jenen Bedenken zu unterliegen.

*2. Hr. Warburg sprach über **Die Bildung des Ammoniaks aus den Elementen im Siemensrohr nach Versuchen mit W. Rump.**

Die Bildung des Ammoniaks aus den Elementen im Siemensrohr zeigt gegenüber der Ozonbildung und anderen Reaktionen charakteristische Unterschiede, insbesondere erfolgt sie 1. hauptsächlich an der Oberfläche, die Ozonbildung dagegen im Innern des Entladungsraums, 2. ist die Ausbeute exzeptionell klein. Der experimentelle Beweis von 1. liegt besonders darin, daß die Ozonbildung mit der Dicke d des Entladungsraumes bedeutend wächst, die Ammoniakbildung aber von d unabhängig ist und daß Vergrößerung der Oberfläche durch Einlagen die Ammoniakbildung bedeutend erhöht, die Ozonbildung aber nur wenig verändert. 2. erscheint als Folge von 1., indem die Zahl der Ionenstöße auf die Oberfläche sehr klein gegen die Zahl der Stöße im Innern ist. Die Ursache von 1. liegt wahrscheinlich in der hohen Dissoziationswärme des Stickstoffs und in der katalytischen Wirkung der Oberfläche. Die Ammoniakbildung bei Zimmertemperatur kann nämlich von selbst stattfinden, wird also durch die Ionenstöße katalysiert, und es ist bekannt, daß Gasreaktionen sehr wirksam durch feste Oberflächen katalysiert werden. Die Jodwasserstoffbildung im Siemensrohr ist auch ein katalytischer Vorgang, verhält sich aber sonst wie die Ozonbildung, wird also durch Stöße im Innern katalysiert.



Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Von Max Planck.

Bei der eigenartigen Stellung, welche die allgemeine Thermodynamik in dem System der theoretischen Physik einnimmt, ist die Art der Begründung ihres zweiten Hauptsatzes, des Entropieprinzips, von derselben Wichtigkeit wie die Frage nach den Grenzen seiner Anwendbarkeit auf die Vorgänge in der Natur. Bekanntlich wurde der Beweis des zweiten Hauptsatzes ursprünglich auf die Betrachtung gewisser Kreisprozesse gegründet, welche zur Definition der absoluten Temperatur und der Entropie führen, zunächst für ideale Gase, dann für beliebige Körper. Aber schon Helmholtz[1] bemerkte, daß man zur Definition der absoluten Temperatur und der Entropie weder der Betrachtung eines Kreisprozesses, noch der Annahme der Existenz eines idealen Gases bedarf. Die absolute Temperatur eines beliebigen Körpers ist nämlich derjenige unter allen verschiedenen integrierenden Nennern des Differentials der äußeren Wärme, welcher allein von der (auf ein beliebiges Thermometer bezogenen) Temperatur abhängt.

Dieser Satz ist auch ein wesentlicher Bestandteil des Gedankenganges, mit welchem neuerdings C. Carathéodory[2] die axiomatische, von der Benutzung von Kreisprozessen und idealen Gasen unabhängige Begründung des zweiten Wärmesatzes durchgeführt hat. Damit ist eine in sich vollständige Deduktion der Grundlagen der Thermodynamik erzielt.

Aber der Ausgangspunkt der Deduktion ist bei Carathéodory nicht unwesentlich verschieden von dem sonst gebräuchlichen. Während nämlich sowohl W. Thomson als auch R. Clausius an die Spitze ihrer Beweisführung ein Prinzip stellten, welches in der einen oder anderen Fassung[3] die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art ausspricht, lautet das Prinzip von Carathéodory, seinem wesentlichen Inhalt nach, folgendermaßen: »In beliebiger Nähe jedes Zustandes eines Systems von Körpern gibt es Nachbarzustände, die vom ersten Zustand aus nicht auf adiabatischem Wege erreichbar sind«.

---

[1] H. v. Helmholtz, Berl. Ber. 6. März 1884, Ges. Abhdlg. Band **3**, p. 121, 1895. Vgl. auch E. Budde, Wied. Ann. **45**, p. 751, 1892.

[2] C. Carathéodory, Math. Ann. **67**, p. 355, 1909, Berl. Ber. 1925, p. 39. Vgl. auch M. Born, Phys. Zeitschr. **22**, p. 218, p. 282, 1921. A. Landé, Handbuch d. Physik, Band **9**, p. 281, 1926, J. Springer, Berlin.

[3] Über einen Unterschied dieser Fassungen vgl. T. Ehrenfest-Afanassjewa, Zeitschr. f. Phys. **33**, p. 933, **34**, p. 638, 1925.

So ausdrücklich ich die Bündigkeit der Schlußfolgerungen anerkenne. welche sich an dieses Prinzip knüpfen, so möchte ich doch im folgenden zunächst einige Bedenken gegen die Meinung geltend machen, daß dasselbe bei der Begründung des zweiten Wärmesatzes als ein vollwertiger oder sogar als ein vorteilhafter Ersatz des Thomsonschen Prinzips dienen kann.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß jedes Prinzip, welches der Ableitung des zweiten Wärmesatzes zugrunde gelegt wird, in letzter Linie der Erfahrung entstammt, und ebenso ist selbstverständlich, daß diese Beziehung zur Erfahrung auch bei der Weiterentwicklung der Theorie stets festgehalten werden muß, wenn die physikalische Wissenschaft ihren Zusammenhang mit den Vorgängen in der Natur nicht verlieren soll. Man kommt dieser Forderung dadurch nach, daß man entweder die Aussagen des Prinzips selber oder möglichst viele einzelne Folgerungen desselben mit den Ergebnissen der Erfahrung in Vergleich bringt. Bei dem ersten Verfahren zeigt sich das Thomsonsche Prinzip dem Carathéodorys ohne weiteres überlegen. Denn während das Problem des perpetuum mobile zweiter Art unzählige Male experimentell behandelt worden ist, hat wohl noch niemand jemals Versuche angestellt in der Absicht, alle Nachbarzustände irgendeines bestimmten Zustandes auf adiabatischem Wege zu erreichen. Indessen ist diese Überlegung nicht ausschlaggebend, da doch auch das zweite Verfahren zur Verfügung steht, und da im vorliegenden Falle die zahlreichen experimentellen Bestätigungen der einzelnen Folgerungen des zweiten Wärmesatzes vorliegen, welche sich aus dem Carathéodoryschen Prinzip genau ebenso ergeben wie aus dem Thomsonschen. Ja, man könnte mit Rücksicht auf diesen Umstand vielleicht geneigt sein, der ganzen hier zur Diskussion gestellten Frage im Grunde nur eine formale Bedeutung beizumessen. Dies wäre aber nur dann richtig, wenn die Thermodynamik ein in sich vollkommen fertig abgeschlossenes isoliertes Gebiet im Rahmen der physikalischen Wissenschaft darstellen würde. Das ist aber bekanntlich keineswegs der Fall. Im Gegenteil bildet die sogenannte allgemeine Thermodynamik in dem System der gegenwärtigen Physik, welche durchweg auf atomistischer Grundlage aufgebaut ist, einen speziellen Teil, einen gewissen Grenzfall, der sogar streng genommen niemals mit absoluter Vollkommenheit verwirklicht ist.

Wenn man von diesem Standpunkt aus die Frage betrachtet, gewinnt sie ein ganz anderes Gesicht. Dann verliert der zweite Wärmesatz seine prinzipielle Bedeutung, er erscheint nur mehr als ein statistischer Satz, gültig nicht für die Eigenschaften eines einzelnen Körpersystems, sondern nur für die Mittelwerte aus den Eigenschaften einer sehr großen Anzahl von makroskopisch identischen Exemplaren des Körpersystems. Die Schwankungen der einzelnen Werte um die Mittelwerte sind um so beträchtlicher, je weniger Freiheitsgrade das System besitzt.

Wie verhalten sich nun unter diesem höheren Gesichtspunkt die Aussagen der beiden konkurrierenden Prinzipien? Das Prinzip vom perpetuum mobile zweiter Art bleibt auch jetzt inhaltlich vollkommen gültig. Es besitzt ja selber nur den Charakter eines statistischen Satzes, da es sich auf einen

mit einer periodisch oder quasi-periodisch funktionierenden Vorrichtung durchschnittlich zu erzielenden Wärmeeffekt bezieht. Daher läßt es sich auf einen einzelnen Vorgang in einem Körpersystem von wenigen mechanischen Freiheitsgraden gar nicht anwenden, schon weil man bei einem derartigen System, z. B. bei einem aus nur 10 Molekülen bestehenden Gase, weder zwischen thermischer und mechanischer Energie noch zwischen höherer und tieferer Temperatur unterscheiden kann.

Ganz anders steht es mit dem Carathéodoryschen Prinzip. Dieses ergibt auch für den vorliegenden Fall einen ganz bestimmten Sinn; aber die Aussage, die es enthält, besitzt keine allgemeine Gültigkeit für die Vorgänge in der Natur; sie gilt nämlich nicht für alle diejenigen Körpersysteme — und das ist die erdrückende Mehrzahl —, für welche die Quasiergodenhypothese zutrifft, d. h. die Hypothese, daß in einem nach außen vollkommen abgeschlossenen Körpersystem jeder nach dem Energieprinzip überhaupt mögliche Zustand im Laufe der Zeit mit beliebiger Annäherung wirklich erreicht wird. Um also mit den Vorgängen in der Natur nicht in Widerspruch zu geraten, bedarf die oben wiedergegebene Formulierung des Prinzips von Carathéodory einer Einschränkung, etwa einer passenden Modifizierung des Begriffs »Zustand«.

Es kann hiernach kein Zweifel darüber bestehen, welchem Prinzip unter diesem Gesichtspunkt der Vorrang zuzuschreiben ist. Aber das ist noch nicht alles. Selbst wenn die Gültigkeit des Prinzips von Carathéodory durch hinreichende Einschränkung seines Inhalts vollkommen gesichert ist, erweist sich dieser Inhalt doch andererseits wieder als zu eng und muß durch einen besonderen Zusatz erweitert werden. Denn das Prinzip spricht nur von der Unerreichbarkeit gewisser Nachbarzustände, es gibt aber kein Merkmal an, durch welches die erreichbaren Nachbarzustände von den unerreichbaren Nachbarzuständen zu unterscheiden sind. Mit anderen Worten: Nach dem Prinzip von Carathéodory könnte es sehr wohl möglich sein, Wärme ohne Kompensation in Arbeit zu verwandeln. Dann müßte nur der umgekehrte Vorgang, die kompensationslose Verwandlung von Arbeit in Wärme, als unmöglich angenommen werden. Oder es könnte auch sein, daß beide Arten von Verwandlung unmöglich wären.

Es ist selbstverständlich, daß auf einer solchen Grundlage der zweite Wärmesatz nicht vollständig aufgebaut werden kann und daß für diesen Zweck dem durch das Carathéodorysche Prinzip ausgedrückten Axiom noch ein zweites von jenem unabhängiges Axiom, das sich auf irreversible Vorgänge bezieht, hinzugefügt werden muß, — ein Punkt, der übrigens auch bei allen Darstellungen jenes Prinzips vollkommen deutlich hervorgehoben worden ist.

Von einer solchen Ergänzungsbedürftigkeit ist beim Thomsonschen Prinzip nicht die Rede. Denn dieses faßt das Carathéodorysche Prinzip samt der demselben hinzuzufügenden Ergänzung zu einer höheren Einheit zusammen und läßt dadurch jene Zweiteilung, soweit es sich um die Begründung (nicht um die Axiomatisierung) des zweiten Wärmesatzes handelt, als eine künstliche und unnötige Komplikation erkennen.



Die vorstehenden Erwägungen gaben mir die Anregung, eine Ableitung des zweiten Wärmesatzes zu entwerfen, welche einerseits die Vorzüge der Carathéodoryschen Ableitung besitzt, der Einführung von Kreisprozessen und von idealen Gasen nicht zu bedürfen, andererseits aber doch das Thomsonsche Prinzip der Unmöglichkeit des perpetuum mobile zweiter Art zum Ausgangspunkt nimmt. Ich greife dabei auf einen Gedankengang zurück, den ich schon vor vielen Jahren entwickelt habe[1], und den ich auch heute noch als den sachlich angemessensten Weg zur Einführung in den Ideenkreis des zweiten Wärmesatzes ansehe.

§ 1. Beginnen wir mit einer Definition. Ein jeder Vorgang in der Natur, der ein System von Körpern aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand bringt, besitzt entweder die Eigenschaft, daß er sich auf irgendeine Weise vollständig rückgängig machen läßt, oder er besitzt die Eigenschaft, daß er sich auf keinerlei Weise vollständig rückgängig machen läßt. Die eine Eigenschaft schließt die andere aus. Im ersten Falle heißt der Vorgang reversibel, im zweiten Falle irreversibel. Auf Grund dieser Definition läßt sich das Prinzip der Unmöglichkeit des perpetuum mobile zweiter Art durch folgenden Satz ausdrücken, den ich für die einfachste und prägnanteste Fassung dieses Prinzips halte: »Die Wärmeerzeugung durch Reibung ist irreversibel«. Damit ist zugleich, wie zu zeigen sein wird, der volle Inhalt des zweiten Wärmesatzes erschöpft.

§ 2. Die Frage, deren Beantwortung den Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik bildet, läßt sich folgendermaßen formulieren. Wir denken uns ein beliebiges System von Körpern und fassen irgend zwei verschiedene genau definierte Zustände dieses Systems ins Auge, die wir mit Z und Z' bezeichnen wollen.

Es handelt sich darum, ob und unter welcher Bedingung ein Prozeß in der Natur möglich ist, der das Körpersystem auf irgendeine Weise aus dem Zustand Z in den Zustand Z' bringt oder umgekehrt, ohne daß außerhalb des Systems Änderungen zurückbleiben. Den letzteren Zusatz können wir auch überflüssig machen, dadurch, daß wir sämtliche Körper der Welt in das System einbeziehen.

Die Definition der beiden Zustände Z und Z' ist von vornherein ganz beliebig, nur müssen sie die Bedingung erfüllen, daß der Übergang von einem Zustand zum andern weder mit Verlust von Materie noch mit Verlust von Energie verbunden ist; denn sonst wäre der fragliche Prozeß von vornherein unmöglich. Das Körpersystem muß also in beiden Zuständen die nämlichen materiellen Elemente und die nämliche Energie besitzen. Im übrigen sollen aber Z und Z' ganz beliebig wählbar sein.

§ 3. Nun sind offenbar verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Es kann sein, daß sowohl vom Zustand Z zum Zustand Z' als auch umgekehrt von Z' zu Z ein Übergang möglich ist; dann ist dieser Prozeß jedesmal rever-

[1] M. Planck, Über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, München. Th. Ackermann, 1879.

sibel, und zwar in allen seinen Teilen. Oder es kann sein, daß von Z zu Z' ein Übergang möglich ist, nicht aber umgekehrt ein solcher von Z' zu Z; dann ist der betreffende Prozeß irreversibel. Oder es kann der entgegengesetzte Fall stattfinden, daß von Z' zu Z ein irreversibler Prozeß ausführbar ist. Diese verschiedenen Möglichkeiten können wir anschaulich dadurch charakterisieren, daß wir sagen: im erstgenannten Falle besitzen die beiden Zustände Z und Z' die nämliche Wahrscheinlichkeit, im zweiten Falle besitzt Z' eine größere Wahrscheinlichkeit als Z, während im dritten Fall das umgekehrte gilt. Dabei soll hier mit dem Worte »Wahrscheinlichkeit« kein anderer Sinn verbunden werden als der genannte.

Wir werden nun eine Funktion eines gegebenen Zustandes Z irgendeines Körpersystems aufzustellen suchen, deren Größe als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes dienen kann. Dann besteht der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik darin, daß diese Funktion bei allen Vorgängen in der Natur niemals abnehmen kann.

§ 4. Wir gehen aus von dem einfachsten Fall, daß die Zustände Z und Z' sich nur unterscheiden durch das Verhalten eines einzigen homogenen Körpers. Derselbe besitze im Zustand Z das Volumen V und die Temperatur t, im Zustand Z' das Volumen V' und die Temperatur t'. Zur Bestimmung der Temperatur benutzen wir irgendein willkürlich angenommenes Thermometer, z. B. ein Quecksilberthermometer, oder auch den Skalenausschlag eines Thermoelements, mit beliebiger Eichung. Durch Volumen und Temperatur ist auch die Energie des Körpers: U bzw. U' bestimmt. Da U und U' im allgemeinen voneinander verschieden sind und wir andererseits dafür sorgen müssen, daß der Übergang von Z zu Z' dem Prinzip der Erhaltung der Energie genügt, so denken wir uns in das betrachtete System noch ein unveränderliches Gewicht G inbegriffen, dessen Schwerpunkt sich im Zustand Z auf der Höhe h, im Zustand Z' auf der Höhe h' befindet, so daß:

$$G \cdot (h - h') = U' - U. \tag{1}$$

Dann ist vom Standpunkt des Energieprinzips aus ein Übergang des Systems von einem zum andern Zustand möglich, ohne daß außerhalb des Systems Änderungen zurückbleiben.

§ 5. Indem wir nun versuchen, vom Zustand Z ausgehend den Zustand Z' herbeizuführen, verändern wir den betrachteten Körper zunächst reversibel-adiabatisch. Dann ist nach dem ersten Hauptsatz:

$$dU + p \cdot dV = 0. \tag{2}$$

Dabei ist:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial V} dV,$$

also:

$$\frac{\partial U}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) dV = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Gleichungsseite ist kein vollständiges Differential. Es existiert aber stets ein »integrierender Nenner« N, d. h. eine Funktion der unabhängigen Variablen t und V, welche, in den Nenner des Ausdrucks gesetzt, denselben zu einem vollständigen Differential macht, so daß wir stets schreiben können:

$$\frac{dU + pdV}{N} = dS, \tag{3}$$

wo nun S eine endliche Funktion der beiden unabhängigen Variabeln t und V ist. Wir können also S, ebenso wie die Energie U, als eine bestimmte Eigenschaft des Körpers betrachten und nennen sie die Entropie des Körpers in dem durch t und V bestimmten Zustand. Allerdings ist die durch (3) gegebene Definition der Entropie noch nicht eindeutig. Denn es gibt nicht einen einzigen, sondern unendlich viele Größen N, welche den Ausdruck (3) zu einem vollständigen Differential machen, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man statt N schreibt: $N \cdot f(S)$, und unter f eine ganz beliebige Funktion einer einzigen Variabeln versteht. Jedem Ausdruck von f entspricht dann ein anderes vollständiges Differential (3) und daher ein anderer Ausdruck der Entropie.

Daher ist in der Größe N ein nur von S abhängiger Faktor willkürlich wählbar, und die Vervollständigung der Definition der Entropie erfordert noch die Festsetzung dieses Faktors. Einstweilen halten wir uns die Entscheidung darüber offen und rechnen zunächst mit irgendeinem beliebig herausgegriffenen N, das wir aber positiv wählen:

$$N > 0. \tag{4}$$

Die nächstfolgenden Sätze gelten unabhängig von der in der Definition der Entropie noch verbliebenen Lücke.

Nachdem S durch (3) bestimmt ist, schließen wir aus (2):

$$S = \text{const} \tag{5}$$

und erhalten dadurch eine bestimmte, für den beschriebenen Prozeß gültige Beziehung zwischen V und t, oder auch zwischen V und U, die sogenannte reversibel-adiabatische Beziehung.

§ 6. Lassen wir nun bei unserem Prozeß, um, von dem Zustand Z ausgehend, in den Zustand Z' zu gelangen, V in V' übergehen, so möge dabei nach (5) die Energie U in U^* übergehen. Gleichzeitig wird eine gewisse mechanische Arbeit aufgewendet oder gewonnen sein, die dem Übergang des Gewichts G von der Höhe h auf die Höhe h^* entsprechen möge, wobei

$$G \cdot (h^* - h) = U - U^*,$$

oder nach (1):

$$G \cdot (h^* - h') = U' - U^*. \tag{6}$$

Dann sind drei Fälle möglich.

1. $U^* = U'$. Dann genügt der Körper den Bedingungen des Zustandes Z', und da dann auch das Gewicht G sich auf der durch (6) bestimmten Höhe

$h^* = h'$ befindet, so ist der Zustand Z' vollständig erreicht, und der gesuchte Übergang realisierbar, und zwar durch einen reversiblen Prozeß. Die Zustände Z und Z' besitzen also in diesem Falle die nämliche Wahrscheinlichkeit.

2. $U^* < U'$. Dann ist die Energie des Körpers kleiner als im Zustand Z'. In diesem Falle läßt sich der Zustand Z' dadurch erreichen, daß man den Körper, bei konstantem Volum V', erwärmt, etwa durch Reibung, indem man das Gewicht G, welches sich nach (6) auf der Höhe $h^* > h'$ befindet, auf die Höhe h' herabsinken läßt. Dann ist der Zustand Z' ebenfalls vollständig erreicht, aber jetzt nach § 1 durch einen irreversibeln Prozeß, d. h. der Zustand Z' besitzt eine größere Wahrscheinlichkeit als der Zustand Z.

3. $U^* > U'$. Dann ist $h^* < h'$ und die Überführung in den Zustand Z' unmöglich, sie würde ein perpetuum mobile zweiter Art vorstellen (§ 1). Daher besitzt in diesem Falle der Zustand Z eine größere Wahrscheinlichkeit als der Zustand Z'.

§ 7. Fragen wir nun nach dem Verhalten der Entropie des betrachteten Körpers in den genannten drei Fällen. Nach der Definition (3) der Entropie und nach (4) ändert sich die Entropie bei gleichbleibendem Volumen ($dV = 0$) gleichsinnig mit der Energie. Da nun bei Erreichung des Volumens V' und der Energie U^* die Entropie nach (5) ihren ursprünglichen Wert S behalten hat, so besitzt die Differenz von S und S', d. h. die Differenz der Entropien der Zustände (V', U^*) und (V', U'), das nämliche Vorzeichen wie die Differenz von U^* und U': also ist im ersten Fall $S = S'$, im zweiten $S < S'$, im dritten $S > S'$.

Hieraus folgt auch umgekehrt: Je nachdem die Entropie S' des Körpers im Zustand Z' ebenso groß, größer oder kleiner ist als die Entropie S im Zustand Z, besitzt der Zustand Z' eine ebenso große, größere oder kleinere Wahrscheinlichkeit als der Zustand Z.

§ 8. Die letzte Folgerung führt uns unmittelbar zu einem weittragenden Satz. Wenn ein beliebiges System von Körpern durch irgendeinen reversibeln physikalischen oder auch chemischen Prozeß, an dem beliebig viele Körper beteiligt sein können, aus einem Zustand Z in einen andern Zustand Z' übergegangen ist, der sich vom Zustand Z nur dadurch unterscheidet, daß ein einziger Körper von der soeben betrachteten Art eine Veränderung erlitten hat und daß ein Gewicht seinen Schwerpunkt entsprechend verschoben hat, so ist die Entropie dieses Körpers in beiden Zuständen die nämliche. Wäre sie nämlich größer geworden, so würde nach dem vorigen Paragraphen der Übergang von Z zu Z' irreversibel sein, was einen Widerspruch mit der Voraussetzung ergibt, und wäre sie kleiner geworden, so würde der Übergang unmöglich sein, was ebenfalls einen Widerspruch ergibt. War aber der ursprüngliche Prozeß irreversibel, dann ist die Entropie des Körpers im Zustand Z' notwendig größer als die im Zustand Z.

§ 9. Jetzt wollen wir voraussetzen, daß die beiden von vornherein gegebenen Zustände Z und Z' sich durch das Verhalten zweier Körper unterscheiden, die wir mit 1 und 2 bezeichnen. Im Zustand Z mögen sie durch die Werte V_1, t_1, V_2, t_2, im Zustand Z' durch die Werte V_1', t_1', V_2', t_2' cha-



rakterisiert sein. Dann sind auch die Energien und, nach Festsetzung der beiden integrierenden Nenner N_1 und N_2, die Entropien in beiden Zuständen bestimmt.

Damit ein Übergang von Z zu Z' überhaupt in Frage kommen kann, wollen wir uns in das Körpersystem noch ein unveränderliches Gewicht G einbegriffen denken, dessen Schwerpunkt sich im Zustand Z auf der Höhe h, im Zustand Z' auf der Höhe h' befindet, so daß:

$$G(h-h') = (U_1'+U_2')-(U_1+U_2). \tag{7}$$

Dann steht die für den Übergang von Z zu Z' erforderliche mechanische Arbeit gerade in dem passenden Betrage zur Verfügung.

§ 10. Nun versuchen wir zunächst wieder, vom Zustand Z ausgehend, durch einen reversibeln Prozeß den Übergang zum Zustand Z' zu bewerkstelligen. Solange wir die beiden Körper adiabatisch behandeln, bleiben nach (5) ihre ursprünglichen Entropien S_1 und S_2 konstant und unveränderlich. Wir besitzen aber ein Mittel, um die Entropien auf reversible Weise zu ändern. Wir bringen nämlich zunächst die beiden Körper auf adiabatisch-reversibelm Wege auf eine gemeinsame, im übrigen beliebige Temperatur und setzen sie dann in wärmeleitende Verbindung miteinander. Dadurch wird das thermodynamische Gleichgewicht nicht gestört, und die beiden Körper bilden jetzt ein gemeinsames, gewisser reversibler Änderungen fähiges System, dessen Zustand durch die drei unabhängigen Variabeln V_1, V_2 und t bestimmt ist.

§ 11. Wenn wir nun dieses zusammengesetzte Körpersystem adiabatisch-reversibel behandeln, indem wir etwa die Drucke p_1 und p_2 irgendwie unabhängig voneinander unendlich langsam ändern, so ist nach dem ersten Hauptsatz:

$$dU_1+dU_2+p_1dV_1+p_2dV_2 = 0$$

oder nach (3):

$$N_1dS_1+N_2dS_2 = 0. \tag{8}$$

In dieser algebraischen Summe bezeichnet offenbar jeder der beiden Summanden die dem betreffenden Körper von außen zugeführte, dem andern Körper entzogene Wärme. Durch die Gleichung (8) werden die Differentiale der drei Variabeln V_1, V_2 und t einer Bedingung unterworfen, so daß nur zwei derselben, etwa dV_1 und dt, willkürlich wählbar sind, während das dritte, dV_2, dann bestimmt ist. Daher kann man durch einen reversibeln Prozeß dieser Art den ersten Körper in jeden beliebigen Zustand bringen, während der Zustand des zweiten Körpers sich nach dem Schicksal des ersten zwangsläufig richtet.

§ 12. Aber wir können noch mehr behaupten, nämlich folgendes. Jedesmal, wenn der erste Körper seine ursprüngliche Entropie S_1 annimmt, bei beliebiger Temperatur t, besitzt auch der zweite Körper seine ursprüngliche Entropie S_2. Denn sobald die Entropie des ersten Körpers wieder S_1 geworden ist, kann man die Körper trennen und den ersten Körper für sich adiabatisch-reversibel in seinen Anfangszustand (V_1, t_1) bringen. Dann unterscheidet sich der so hervorgebrachte Zustand des Körpersystems von dem ursprünglichen nur durch das Verhalten des zweiten Körpers und durch eine gewisse Gewichts-

verschiebung, und da der ganze Prozeß reversibel ist, so ist nach § 8 die Entropie dieses Körpers dieselbe wie am Anfang, nämlich S_2. Überhaupt gehört zu einem bestimmten Wert von S_1 immer ein ganz bestimmter Wert von S_2, unabhängig von t; denn sonst würde der Satz des § 8 verletzt werden.

§ 13. Mit anderen Worten: Wenn man an Stelle der unabhängigen Variabeln V_1, V_2 und t die unabhängigen Variabeln S_1, S_2 und t in die Gleichung (8) einführt, so fällt t aus der Gleichung ganz heraus, und sie reduziert sich auf eine Beziehung von der Form:

$$F(S_1, S_2) = 0$$

oder in Differentialform:

$$\frac{\partial F}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial F}{\partial S_2} dS_2 = 0. \tag{9}$$

Damit aber (8) allgemein in (9) übergeht, ist notwendig und hinreichend, daß die Differentialausdrücke in beiden Gleichungen sich nur durch einen endlichen Faktor unterscheiden:

$$N_1 dS_1 + N_2 dS_2 \equiv N\left(\frac{\partial F}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial F}{\partial S_2} dS_2\right)$$

oder:

$$N_1 = N\frac{\partial F}{\partial S_1} \text{ und } N_2 = N\frac{\partial F}{\partial S_2},$$

folglich:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial S_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial S_2}},$$

d. h. der Quotient von N_1 und N_2 hängt nur von S_1 und S_2, nicht aber von t ab. Da aber N_1 nur von S_1 und t, N_2 nur von S_2 und t abhängt, so sind N_1 und N_2 von der Form:

$$N_1 = f_1(S_1)\cdot T. \qquad N_2 = f_2(S_2)\cdot T, \tag{10}$$

wo die Funktion T nur von der Temperatur t abhängt. In der Größe T ist ein konstanter Faktor willkürlich. Wir wählen sie positiv und nennen sie die zur Temperatur t gehörige absolute Temperatur. Die absolute Temperatur eines Körpers ist also diejenige von der Natur des Körpers unabhängige positive Temperaturfunktion, welche in der Gleichung (3) als integrierender Nenner N dienen kann. Um den in T noch willkürlichen Faktor festzulegen, setzen wir die Differenz der Temperatur T_1 des unter Atmosphärendruck siedenden Wassers und der Temperatur T_0 des unter Atmosphärendruck schmelzenden Eises:

$$T_1 - T_0 = 100 \tag{11}$$

und vervollständigen dadurch die Definition der absoluten Temperatur.

§ 14. Um nun auch noch die Definition der Entropie zu vervollständigen, bedenken wir, daß die Funktionen f_1 und f_2 in den Gleichungen (10) wegen der festgesetzten Vorzeichen von N_1, N_2 und T positiv, im übrigen aber nach den Ausführungen des § 5 vollständig willkürlich wählbar sind. Wir setzen daher $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und erhalten somit aus (10):

$$N_1 = N_2 = T \tag{12}$$

und aus (3):

$$\frac{dU + pdV}{T} = dS, \tag{13}$$

oder, auf die Masseneinheit bezogen:

$$\frac{du + pdv}{T} = ds \tag{14}$$

als Definition der Entropie eines homogenen Körpers, dessen Zustand durch Volumen und Temperatur bestimmt ist. In dem Ausdruck der Entropie bleibt, wie man sieht, noch eine additive Konstante unbestimmt, die auch von der chemischen Natur des Körpers abhängen kann.

§ 15. Mit den jetzt gewonnenen Resultaten sind wir nun leicht imstande, die in § 9 aufgeworfene Frage nach den Bedingungen des Übergangs der beiden betrachteten Körper aus dem Zustand Z in den Zustand Z' vollständig zu beantworten. Denn bei dem beschriebenen reversibeln Prozeß mit den thermisch gekoppelten Körpern ist nach (8) und (12):

$$dS_1 + dS_2 = 0,$$

also

$$S_1 + S_2 = \text{const.}$$

D. h. die Summe der Entropien bleibt konstant. Bringen wir also den ersten Körper auf die Entropie S_1', so nimmt der zweite Körper die Entropie an:

$$S_2^* = S_1 + S_2 - S_1'. \tag{15}$$

Trennen wir dann die beiden Körper und bringen den ersten adiabatisch-reversibel auf das Volumen V_1' und folglich auf die Temperatur t_1', so befindet sich derselbe in dem gewünschten Endzustand und kann für das Folgende außer Betracht bleiben; es kommt jetzt nur noch darauf an, ob S_2^* ebenso groß, kleiner oder größer ist als S_2' oder, was nach (15) dasselbe ist, ob:

$$S_1 + S_2 \gtreqless S_1' + S_2'.$$

Im ersten Falle ist nach § 7 der Zustand Z' vollständig erreichbar, und zwar durch einen reversibeln Prozeß, im zweiten Falle ist der Zustand Z' erreichbar durch einen irreversibeln Prozeß, im dritten Falle ist der Zustand Z' überhaupt nicht erreichbar.

Daher ist die Summe der Entropien der beiden Körper in irgendeinem Zustand ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes.

§ 16. Es bleibt nun endlich noch übrig, den letzten Satz auf beliebig viele Körper zu verallgemeinern. Denken wir uns also ein System von n solchen Körpern in zwei ganz beliebigen Zuständen Z und Z' und fragen nach den Bedingungen des Übergangs von Z zu Z', ohne daß in anderen Körpern Änderungen zurückbleiben. Damit der Übergang dem Energieprinzip genügt, beziehen wir noch ein unveränderliches Gewicht G in das System ein, dessen Schwerpunkt sich im Zustand Z auf der Höhe h, im Zustand Z' auf der Höhe h' befindet, so daß

$$G\cdot(h-h') = (U_1'+U_2'+\cdots+U_n')-(U_1+U_2+\cdots+U_n).$$

Nun setzen wir, vom Zustand Z ausgehend, die beiden ersten Körper auf die in § 10 beschriebene Weise in wärmeleitende Verbindung miteinander und bringen so durch einen reversibeln Prozeß den ersten Körper auf die Entropie S_1'. Dann trennen wir die beiden Körper und verfahren ebenso mit dem zweiten und dritten Körper, indem wir den zweiten Körper auf die Entropie S_2' bringen. In gleicher Weise fortfahrend bringen wir den $(n-1)$ten Körper auf die Entropie S_{n-1}'. Dann möge der n-te Körper die Entropie S_n^* besitzen. Da während jedes einzelnen aller dieser reversibeln Prozesse die Gesamtsumme sämtlicher Entropien konstant geblieben ist, so ist:

$$S_n^* = (S_1+S_2+\cdots+S_n)-(S_1'+S_2'\cdots+S_{n-1}'). \tag{16}$$

Nun läßt sich jeder der $n-1$ ersten Körper für sich auf adiabatisch-reversibelm Wege in seinen gewünschten Endzustand bringen. Daher hängt die Entscheidung darüber, ob der Zustand Z' vollständig erreichbar ist, davon ab, ob die Entropie S_n^* des n-ten Körpers ebenso groß, kleiner oder größer ist als S_n', oder, nach (16), wenn wir mit S die Summe der Entropien aller n Körper bezeichnen, ob S ebenso groß, kleiner oder größer ist als S'. Im ersten Falle ist der Zustand Z' durch einen reversibeln Prozeß erreichbar, im zweiten durch einen irreversibeln Prozeß, während im dritten Falle der Übergang unmöglich ist.

Daraus folgt umgekehrt: J e d e r i n d e r N a t u r s t a t t f i n d e n d e P r o z e ß v e r l ä u f t i n d e m S i n n e, d a ß d i e S u m m e d e r E n t r o p i e n a l l e r a n d e m P r o z e ß b e t e i l i g t e n K ö r p e r v e r g r ö ß e r t w i r d. Im Grenzfall, für einen reversibeln Prozeß, bleibt diese Summe ungeändert. Oder kürzer ausgedrückt: D i e E n t r o p i e i s t e i n M a ß f ü r d i e W a h r s c h e i n l i c h k e i t (§ 3).

Damit ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik erschöpfend bezeichnet und zugleich der Übergang zu der statistischen Definition der Entropie vorbereitet.

Ausgegeben am 27. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei



SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1926

XXXII. Gesamtsitzung. 9. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Burdach sprach über den »Briefwechsel der Brüder Jacob und Wilhelm Grimm mit Karl Lachmann«.

Der im Auftrage der Akademie von Professor Albert Leitzmann (Jena) herausgegebene. von einer Einleitung des Vortragenden begleitete Briefwechsel ist im Druck größtenteils vollendet. Abgesehen von wenigen Nachzüglern die Briefe der Jahre 1819 bis 1841 umfassend, ist er ein an gelehrtem Material und biographischen Aufschlüssen ungemein reiches, innerlich bedeutendes Denkmal des Werdekampfes der germanischen Philologie, deren bis heute maßgebende beide Hauptrichtungen sich in den verschiedenartigen Naturen der hier vereinten drei Forscher lebendig verkörpern, wobei Lachmanns Feststellungen über die mittelhochdeutsche Kunstsprache deutlicher und in weiterem Rahmen, als man sie bisher kannte, hervortreten und so für die gegenwärtige germanistische Problemlage neues Gewicht erhalten.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Landau in Göttingen übersandte eine Abhandlung: »Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante«.

Im Anschluß an eine von Hrn. Valiron vor kurzem veröffentlichte Note entwickelt der Verfasser neue, sehr einfache Beweise für den Picardschen Satz und die von ihm und Hrn. Schottky herrührenden weitergehenden Sätze. Außerdem wird eine genauere Abschätzung für eine von Hrn. Bloch eingeführte absolute Konstante abgeleitet.

3. Hr. Burdach überreichte den 5. Band seines Werkes »Vom Mittelalter zur Reformation«: »Schlesisch-böhmische Briefmuster aus der Wende des 14. Jahrhunderts, unter Mitwirkung von Gustav Bebermeyer herausgegeben von Konrad Burdach, mit Beiträgen von Max Voigt« (Berlin 1926); ferner seinen Vortrag »Die Kulturbewegung Böhmens und Schlesiens an der Schwelle der Renaissance« (Sonderabdruck, Stuttgart 1926).

4. Hr. Goldschmidt legte den 4. Band seines Werkes »Die Elfenbeinskulpturen aus der romanischen Zeit XI.—XIII. Jahrhundert« (Berlin 1926) vor.

5. Vorgelegt wurde ferner die 14. Lieferung des Werkes des korrespondierenden Mitglieds Hrn. Ernst Fabricius in Freiburg »Der Obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches« (Leipzig 1926);

6. sodann der III. und VII. Band von »Wilhelm Diltheys Gesammelte Schriften« (Leipzig und Berlin 1927);

7. weiter die mit Unterstützung der Akademie erschienene Abhandlung von P. Schiefferdecker »Neue Untersuchungen über den feineren Bau und die Kernverhältnisse des Zwerchfells sowie über die Art der Entwicklung der verschiedenen Muskeln« (Sonderabdruck, Leipzig 1926);

8. endlich das 2. Heft des Bandes VI 2B der »Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen« (Leipzig 1926).

9. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch die physikalisch-mathematische Klasse:

300 *RM* für die HH. Dr. K. Peters und cand. chem. Gehler zum Zweck der chemischen Untersuchung einer Heliumquelle in Westfalen,

500 *RM* für das akademische Unternehmen »Das Tierreich«,

800 *RM* für die Ausgabe der Werke Eulers;

durch die philosophisch-historische Klasse:

500 *RM* für die wortgeographischen Arbeiten und Karten des Hrn. Dr. Bernhard Martin in Marburg.

Die Preußische Regierung hat am 30. November 1926 die Wahl des ordentlichen Mitgliedes Hrn. Heymann zum Beständigen Sekretar der philosophisch-historischen Klasse der Akademie bestätigt.

Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante.

Von E. Landau
in Göttingen.

Einleitung.

Heute komme ich auf den Gegenstand der ersten Arbeit[1] von mir zurück, welche dieser Akademie vorgelegt wurde. Es hatte sich zwar eine umfangreiche Literatur angeschlossen; aber erst durch eine vor wenigen Wochen erschienene Note von Hrn. Valiron[2] hat die Sache eine neue Wendung erhalten.

Hrn. Picard[3] verdankt man den klassischen

Satz I: Ist $F(x)$ eine ganze Funktion und nicht konstant, so nimmt $F(x)$ mindestens einen der Werte 0 und 1 an.

Auch vordem hatte man nie den Spezialfall von I bewiesen, welcher lautet:

Satz II: Unter den Voraussetzungen von I gibt es für jedes $p > 0$ eine Kreisfläche mit dem Radius p, deren Punkte sämtlich angenommen werden[4].

Ich hebe II besonders hervor, weil ich dem Leser nachher erzählen werde, daß II sich auf wenigen Zeilen beweisen läßt und daß I leicht aus II folgt.

L. c. bewies ich folgende Verschärfung von I:

Satz III: Ist $F(x)$ für $|x| \leq 1$ regulär und dort nirgends 0 und 1, so ist

$$|F'(0)| < L,$$

wo L nur von $F(0)$ abhängt[5].

---

[1] Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes, diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1904, S. 1118—1133.

[2] Sur les théorèmes de MM. Bloch, Landau, Montel et Schottky, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 183 (1926), S. 728—730.

[3] Sur une propriété des fonctions entières, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 88 (1879), S. 1024—1027.

[4] II folgt aus I: denn nach I gibt es in der ganzen Ebene höchstens einen ausgelassenen Wert; für $a \neq b$ ist ja nur I auf $\frac{F(x)-a}{b-a}$ anzuwenden.

[5] I folgt aus III; denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $F'(0) \neq 0$; wäre $F(x)$ nirgends 0 oder 1, so gäbe die Anwendung von III auf $G(x) = F\left(\frac{L}{F'(0)}x\right)$ den Widerspruch $L = |G'(0)| < L$.

Hr. Schottky[1] ging noch weiter und bewies den

Satz IV: Unter den Annahmen von III ist für $|x| < 1$

$$|F(x)| < S,$$

wo S nur von $F(0)$ und $|x|$ abhängt[2].

Hr. Bloch[3] verschärfte neuerdings II zu

Satz V: Unter den Voraussetzungen von I gibt es für jedes $p > 0$ eine Kreisfläche mit dem Radius p, die schlichtes Bild eines Gebietes der x-Ebene ist.

Hr. Bloch[4] verschärfte ferner II zu

Satz VI: Es sei $y = F(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Dann nimmt y dort alle Werte einer gewissen Kreisfläche mit dem Radius B an, wo B eine absolute positive Konstante ist[5].

Hr. Bloch[4] verschärfte ferner V und VI zu

Satz VII: Unter den Voraussetzungen von VI gibt es sogar eine Kreisfläche vom Radius B_1, die schlichtes Bild eines Gebietes im Kreis $|x| < 1$ ist[6].

Für die neue Beweisanordnung von IV (also von I, III), die ich heute vorlege, sind V und VII unnötig. Für I brauche ich sogar nur II; VI wird für III (also für IV) gebraucht. Aber VII (also V) wird sich mit gleicher Leichtigkeit ergeben wie VI.

---

[1] Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen, diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1904, S. 1244—1262.

[2] IV enthält III wegen $|F'(0)| \leqq 2 \operatorname{Max}_{|x|=\frac{1}{2}} |F(x)|$.

[3] Démonstration directe de théorèmes de M. Picard, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Bd. 178 (1924), S. 1593—1595. Hr. Bloch machte dort darauf aufmerksam, daß V aus einem älteren Satze von Hrn. Valiron abzulesen ist.

[4] Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières, et la théorie de l'uniformisation, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Bd. 178 (1924), S. 2051—2052, und Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Ser. 3, Bd. 17 (1925), S. 1—22. Hr. Bloch schreibt VI allerdings mir zu und zitiert hierfür meine Note Zum Koebeschen Verzerrungssatz, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 46 (1922), S. 347—348. In der Tat ist VI genau so aus der von mir 1904 angegebenen schärferen Fassung von III (Abhängigkeit des L von $F(0)$) zu folgern, wie ich l. c. die damals wesentliche Eigenschaft konstatierte, daß eine volle Kreisperipherie mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $> c$ (wo c eine absolute positive Konstante ist) angenommen wird; beim Beweise kam sogar explizit heraus, daß mindestens eine von zwei bestimmten Peripherien $|y| = c_1$ und $|y| = c_2$ voll angenommen wird. Und die Beweismethode gestattet ohne weiteres, diese Peripherien durch zwei Kreisringe $c_3 \leqq |y| \leqq c_4$, $c_5 \leqq |y| \leqq c_6$ zu ersetzen, so daß die in VI gewünschte Kreisfläche Platz hat.

Aber Hr. Bloch hat die Formulierung VI zuerst angegeben. Auch ist es für meinen heutigen Zweck unerheblich, daß VI schon aus alten, den Picardschen Satz enthaltenden Sätzen folgte; denn es handelt sich darum, VI direkt zu begründen.

[5] II ist in VI enthalten, da unter den Annahmen von II, wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit $F'(0) \neq 0$ angenommen wird, $\frac{B}{p}\left(F\left(\frac{p}{BF'(0)}x\right) - F(0)\right) = x + \cdots$ ist.

[6] V ist in VII aus dem gleichen Grunde enthalten wie II in VI.

Ich zeige zunächst nach Hrn. BLOCH, wie I aus II, III aus VI folgt. Seinen Übergang von VI zu IV werde ich in vereinfachter Form darstellen.

Es sei $F(x)$ überall bzw. für $|x| \leqq 1$ regulär und lasse dort die Werte 0 und 1 aus. Dann ist dort offenbar

$$f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{\log F(x)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log F(x)}{2\pi i} - 1}\right)$$

regulär. Ferner läßt dort $f(x)$ die Werte aus

$$\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + 2m\pi i,$$

wo $n \geqq 1$ und m ganz sind; denn wegen

$$F(x) = -e^{\frac{\pi i}{2}(e^{2f(x)} + e^{-2f(x)})} \tag{1}$$

wäre sonst irgendwo

$$F(x) = -e^{\frac{\pi i}{2}((\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})^2)} = -e^{\frac{\pi i}{2}(4n-2)} = 1.$$

Die genannten Ausnahmewerte liegen offenbar so, daß jeder Punkt der Ebene von mindestens einem einen Abstand $\leqq p$ hat, wo p eine absolute Konstante ist.

1. Unter den Voraussetzungen von I wäre, wenn $F(x)$ nirgends 0 oder 1 wäre, $f(x)$ ganz und müßte nach II konstant sein. Also wäre $F(x)$ konstant.

2. Unter den Voraussetzungen von III ergibt, wenn $f'(0) \neq 0$ ist, die Anwendung von VI auf

$$\frac{f(x) - f(0)}{f'(0)} = x + \cdots,$$

da keine Kreisfläche vom Radius $\frac{p}{|f'(0)|}$ voll angenommen wird,

$$\frac{p}{|f'(0)|} \geqq B,$$

$$|f'(0)| \leqq \frac{p}{B}.$$

Jedenfalls (im Falle $f'(0) = 0$ natürlich auch) ist nach (1)

$$|F'(0)| = |F(0)|\,\pi\,|e^{2f(0)} - e^{-2f(0)}|\,|f'(0)| < L.$$

3. Unter den Voraussetzungen von IV ist bei festem r mit $0 \leqq r < 1$ für $|x| \leqq r$, falls $f'(x) \neq 0$,

$$\frac{f(x + (1-r)z) - f(x)}{(1-r)f'(x)} = z + \cdots$$

für $|z| \leq 1$ regulär und nimmt keine Kreisfläche vom Radius $\frac{p}{(1-r)|f'(x)|}$ voll an. Nach VI ist also

$$\frac{p}{(1-r)|f'(x)|} \geq B.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{p}{B(1-r)},$$

und dies gilt auch, falls $f'(x) = 0$ ist. Daher ist für $|x| = r$

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t)\,dt \right| \leq |f(0)| + \frac{pr}{B(1-r)},$$

also nach (1)

$$|F(x)| < S.$$

I, III und IV sind also fast triviale Folgen aus VI. Nun war der Blochsche Beweis von VI (und VII) sehr kompliziert. In der am Anfang zitierten Arbeit hat jedoch Hr. Valiron einen ganz elementaren Beweis für VII (also VI) angegeben.

Im folgenden werde ich den Valironschen Gedankengang in noch mehr vereinfachter Form[1] darstellen. Meine Beweisanordnung für VII wird nur drei Zeilen lang sein. Der Picardsche Satz kann jetzt während jeder Anfangsvorlesung über Funktionentheorie in wenigen Minuten aus den klassischen Grundlagen hergeleitet werden, ohne daß man die sog. Hadamard-Borel-Carathéodoryschen Ungleichungen zwischen dem Realteil und dem absoluten Betrag einer analytischen Funktion mit dem bisherigen, auf ihnen aufgebauten Apparat heranziehen müßte.

Aus den Elementen der Funktionentheorie benutze ich den folgenden Satz über den Radius der inversen Potenzreihe:

Satz VIII: Es sei $R > 0$, $F(x)$ für $|x| \leq R$ regulär und ebenda $|F(x)| \leq M$. Es sei $F(0) = 0$, $|F'(0)| = a > 0$ (also $Ra \leq M$). Dann ist die inverse Funktion in einem Kreise $|y| < \phi$ regulär und absolut $< R$, dessen Radius $\phi = \phi(M, Ra)$ nur von M und Ra abhängt.

Für VIII will ich einen kurzen Beweis angeben, der die meist übliche Majorantenmethode nicht benutzt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R = F'(0) = 1$; denn sonst lehrt die Betrachtung von

$$\frac{F(Rx)}{RF'(0)} = x + \cdots,$$

wenn die Existenz von $\phi(M, 1) = \phi(M)$ schon gesichert ist, daß $Ra\phi\left(\frac{M}{Ra}\right)$ das Gewünschte leistet.

[1] Meine Abweichungen von Hrn. Valiron bestehen wesentlich darin, daß ich 1. eine Unterscheidung in zwei Fälle, 2. die Borelsche Iteration vermeide, 3. den klassischen Satz über den Radius der inversen Potenzreihe heranziehe.

Bekanntlich ist für jedes r mit $0 < r \leq 1$ die (noch von F abhängige) Zahl

$$\phi_F(M) = r - \operatorname*{Max}_{|x|=r} |F(x) - x|, \tag{2}$$

wofern sie > 0 ist, brauchbar. Denn für $0 < |x| \leq r$ ist

$$|F(x)| \geq |x| - |F(x) - x| \geq |x| \left(1 - \frac{1}{r} \operatorname{Max}\right) > 0;$$

also hat $F(x) = 0$ für $|x| \leq r$ genau eine Wurzel; für $|y| < r - \operatorname{Max}$ ist, wenn über $|x| = r$ im positiven Sinn integriert wird, die Wurzelzahl

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(x)}{F(x) - y} dx$$

von $F(x) = y$ in $|x| \leq r$ stetig von y abhängig, also 1. Und dies $x(y)$ ist regulär wegen

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int z \frac{F'(z)}{F(z) - y} dz$$

bei Integration über $|z| = r$ im positiven Sinn.

Mit $r = \frac{1}{4M}$ ergibt sich

$$\phi_F(M) \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} M r^n = r - \frac{M r^2}{1 - r} \geq r - \frac{4}{3} M r^2 = \frac{1}{6M},$$

so daß $\phi(M) = \frac{1}{6M}$ genommen werden kann.

Hauptteil.

Neuer Beweis von VII (also I—VI).

$\Theta \operatorname*{Max}_{|x| \leq 1 - \Theta} |F'(x)|$ ist 0 in 0, 1 in 1, für ein $\vartheta > 0$ also 1 in ϑ, vorher < 1. Es sei $|\xi| = 1 - \vartheta$, $|F'(\xi)| = \frac{1}{\vartheta}$. In $|x - \xi| \leq \frac{\vartheta}{2}$ ist $|F'(x)| < \frac{2}{\vartheta}$, $|F(x) - F(\xi)| < 1$. Nach VIII ist $x(y)$ regulär und absolut < 1 in $|y - F(\xi)| < \phi\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Schluß.

Nachdem das Ziel dieser Abhandlung erreicht ist, will ich, soweit die vorliegenden Methoden es gestatten, die obere Grenze $\mathfrak{B}$ der B_1, welche den Bedingungen des Satzes VII genügen, möglichst gut nach unten abschätzen. Dies $\mathfrak{B}$ ist eine absolute positive Konstante; ich will sie einstweilen die BLOCHsche Konstante nennen, da ja noch nicht bekannt ist, ob sie nicht mit einer der klassischen Konstanten der Analysis übereinstimmt. Bestimmen kann ich $\mathfrak{B}$ nicht; aber ich werde z. B. $\mathfrak{B} > \frac{1}{8}$ beweisen.

Ein Teil der folgenden Untersuchungen ist trotzdem endgültig; denn ich kann die obere Grenze $\mathfrak{v}(M, R, a)$ aller nur von M, R und a abhängigen Radien im Sinne von VIII bestimmen. Allerdings brauche ich $\mathfrak{v}$ nicht, sondern nur die entsprechende Funktion, falls die Voraussetzung $|F(x)| \leqq M$ von VIII durch die schwächere $|F'(x)| \leqq \frac{M}{R}$ ersetzt wird; aber ich will doch mit der $\mathfrak{v}$-Frage beginnen, da sie an ein altes Problem anknüpft und da Teile des Beweises von IX für X benutzt werden können.

Bekannt ist als Ergebnis der üblichen Majorantenmethode

$$\mathfrak{v}(M, R, a) \geqq 2M + Ra - \sqrt{(2M + Ra)^2 - R^2a^2} = \frac{R^2a^2}{2M + Ra + \sqrt{(2M + Ra)^2 - R^2a^2}}$$

$\left(\text{also } \mathfrak{v}(M, R, a) > \frac{R^2a^2}{2(2M + Ra)} \geqq \frac{R^2a^2}{6M}\right.$, was der Rechnung am Ende der Einleitung entspricht$\Big)$.

Satz IX: $\mathfrak{v}(M, R, a) = M\left(\frac{M}{Ra} - \sqrt{\frac{M^2}{R^2a^2} - 1}\right)^2$.

Beweis: Offenbar ist

$$\mathfrak{v}(M, R, a) = Ra\,\mathfrak{v}\left(\frac{M}{Ra}, 1, 1\right);$$

also genügt es,

$$\mathfrak{v}(M) = \mathfrak{v}(M, 1, 1) = M(M - \sqrt{M^2 - 1})^2$$

zu zeigen. Hierbei darf noch $F'(0) = 1$ angenommen werden.

Nach Voraussetzung ist $M \geqq 1$. Ist $M = 1$, so muß $F(x) = x$ sein; der Radius der inversen Potenzreihe ist zwar ∞; aber nur der Kreis $|y| < 1$ hat sein Bild in $|x| < 1$; daher ist, wie behauptet, $\mathfrak{v}(1) = 1$.

Es sei jetzt $M > 1$.

1. Für $|x| \leqq 1$ ist

$$\frac{M}{x}\,\frac{F(x) - x}{M^2x - F(x)} = G(x)$$

regulär und absolut $\leqq 1$. Für $0 \leqq r \leqq 1$ ist auf $|x| = r$

$$|F(x) - x| = (M^2 - 1)\left|\frac{x^2G(x)}{M + xG(x)}\right| \leqq (M^2 - 1)\frac{r^2}{M - r}.$$

Nach (2) ist daher

$$\mathfrak{v}(M) \geqq r - (M^2 - 1)\frac{r^2}{M - r}.$$

Mit $r = M - \sqrt{M^2 - 1}$ ergibt sich

$$\mathfrak{v}(M) \geqq r - r^2\sqrt{M^2 - 1} = r^2\left(\frac{1}{r} - \sqrt{M^2 - 1}\right) = r^2M = M(M - \sqrt{M^2 - 1})^2.$$

2. $$y = Mx\frac{1-Mx}{M-x} = x+\cdots$$

ist für $|x| \leqq 1$ regulär und absolut $\leqq M$. Die inverse Funktion

$$x = \frac{1}{2M^2}\left(M+y+\sqrt{y^2-2M(2M^2-1)y+M^2}\right)$$

hat einen Verzweigungspunkt in

$$y = M(2M^2-1-2M\sqrt{M^2-1}) = M(M-\sqrt{M^2-1})^2.$$

Daher ist

$$\mathfrak{v}(M) \leqq M(M-\sqrt{M^2-1})^2.$$

Satz X: Wird in VIII die Voraussetzung $|F(x)| \leqq M$ durch $|F'(x)| \leqq \frac{M}{R}$ ersetzt, so ist die entsprechende obere Grenze $\mathfrak{B}(M, R, a)$ aller $\Phi(M, R, a)$, so daß die inverse Funktion für $|y| < \Phi$ regulär und absolut $< R$ ist, durch die Formel bestimmt

$$\mathfrak{B}(M, R, a) = \begin{cases} M & \text{für } M = Ra, \\ M\left(1+\left(\frac{M^2}{R^2a^2}-1\right)\log\left(1-\frac{R^2a^2}{M^2}\right)\right) & \text{für } M > Ra. \end{cases}$$

Beweis: Offenbar ist

$$\mathfrak{B}(M, R, a) = Ra\,\mathfrak{B}\left(\frac{M}{Ra}, 1, 1\right),$$

so daß nur $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}(M, 1, 1)$ zu bestimmen ist. Hierbei darf noch $F'(0) = 1$ angenommen werden.

$\mathfrak{B}(1) = 1$ ist klar. Es sei also $M > 1$.

1. $xF'(x) = x+\cdots$ hat genau die Eigenschaften des $F(x)$ vom vorigen Beweise. Für $0 \leqq r \leqq 1$ ist also auf $|x| = r$

$$|F'(x)-1| \leqq (M^2-1)\frac{r}{M-r},$$

$$|F(x)-x| \leqq (M^2-1)\int_0^r \frac{s\,ds}{M-s} = (M^2-1)\left(-r-M\log\left(1-\frac{r}{M}\right)\right).$$

Nach (2) ist daher

$$\mathfrak{B}(M) \geqq r-(M^2-1)\left(-r-M\log\left(1-\frac{r}{M}\right)\right) = M\left(Mr+(M^2-1)\log\left(1-\frac{r}{M}\right)\right).$$

Mit $r = \frac{1}{M}$ ergibt sich

$$\mathfrak{B}(M) \geqq M\left(1+(M^2-1)\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\right).$$

2.

$$y = M\int_0^x \frac{1-Mz}{M-z}\,dz = x + \cdots = M\left(Mx + (M^2-1)\log\left(1-\frac{x}{M}\right)\right)$$

ist für $|x| \leqq 1$ regulär und $|y'| \leqq M$. Die inverse Funktion hat einen Verzweigungspunkt für

$$y\left(\frac{1}{M}\right) = M\left(1 + (M^2-1)\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\right),$$

da

$$y'\left(\frac{1}{M}\right) = M\left\{\frac{1-Mx}{M-x}\right\}_{x=\frac{1}{M}} = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{B}(M) < M\left(1 + (M^2-1)\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\right).$$

Satz XI: $\mathfrak{B} > \frac{1}{8}$, genauer

$$\mathfrak{B} \geqq \operatorname*{Max}_{t>1}\,(t-1)\left(1 + (t^2-1)\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right).$$

Beweis: 1. Nach dem alten Beweis ist wegen X $\left(\text{mit } M = 1,\ R = \frac{\vartheta}{2},\right.$ $\left. a = \frac{1}{\vartheta},\ \frac{M}{Ra} = 2\right)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &\geqq \mathfrak{B}\left(1, \frac{\vartheta}{2}, \frac{1}{\vartheta}\right) = 1 + 3\log\frac{3}{4}\\ &= 1 - 3\log\left(1+\frac{1}{3}\right) > 1 - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3}\right) = \frac{7}{54} > \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2. Nimmt man jedoch $\vartheta\,\frac{t-1}{t}$, wo $t > 1$ beliebig ist (früher $t = 2$) als Radius des Kreises um ξ, so ist wegen X $\left(\text{mit } M = t-1,\ R = \vartheta\,\frac{t-1}{t},\ a = \frac{1}{\vartheta},\right.$ $\left.\frac{M}{Ra} = t\right)$

$$\mathfrak{B} \geqq (t-1)\left(1 + (t^2-1)\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right).$$

Ausgegeben am 25. Januar 1927.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1926

XXXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 16. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Pompeckj sprach über seine Untersuchungen an fossilen Walen. *III. Prosqualodon australis.* (Ersch. später.)

Ein Schädel aus dem Miozän Patagoniens (im Paläontologischen Museum der Universität Berlin) erlaubt die Richtigstellung der in allen wesentlichen Punkten verfehlten Rekonstruktion, welche Abel von diesem Typus gegeben hat. Es wird durch ihn auch die richtigere systematische Fixierung der Gattung ermöglicht: *Prosqualodon* darf nicht weiter den Archaeoceti eingereiht werden, er ist vielmehr ein echter Odontocete, der neben dem jungoligozänen und miozänen *Squalodon* steht, von dem er im wesentlichsten nur durch das kürzere Rostrum und geringere Zahnzahl unterschieden ist. Die Zahnformel ist bei *P. australis* 3 · 1 · 4 · 5 in beiden Kiefern (bei *Squalodon* 3 · 1 · 4 · 8–7): der letzte Oberkiefer-Molar war deutlich dreiwurzelig. In der Hirnhöhle fällt eine sehr breite und tiefe Sella turcica auf. Und besonders bemerkenswert und altertümlich ist es, daß in der Vorderwand der Hirnhöhle eine sehr weite, trichterförmige Höhlung, die vorne vom Mesethmoid bedeckt ist, auf die verhältnismäßig noch große und grobe Ausbildung von Riechlappen des Hirnes schließen läßt.

2. Hr. Nernst legte eine Mitteilung des Privatdozenten Hrn. Dr. F. Simon in Berlin vor: »Thermische Erregung von Quantensprüngen in festen Körpern.«

Der Autor erbringt auf verschiedenen Wegen den wichtigen Nachweis, daß bei einzelnen Stoffen in festem Zustande die Atome in zwei energetisch wenig verschiedenen Zuständen aufzutreten vermögen, dergestalt, daß nach allgemeinen thermodynamischen Prinzipien die energiereichere Atomform bei tiefen Temperaturen praktisch quantitativ auftritt, bei höheren Temperaturen aber zum Teile in die energieärmere Form übergeht. Diese Verhältnisse müssen sich natürlich in dem Verlaufe der spezifischen Wärme bemerkbar machen, meistens allerdings wohl in einer experimentell kaum zugänglichen Weise.

*3. Hr. Wagner berichtete über die Ausbreitung kurzer elektrischer Wellen rund um die Erde nach Beobachtungen, die auf der Empfangsanlage Geltow der Transradio A. G. gemacht worden sind.

Zu gewissen Tagesstunden (zwischen 13^h und 16^h MEZ) erscheinen die von dem Kurzwellensender 2xt der Radio Corporation of America ausgesandten Zeichen auf dem Empfangsstreifen in Geltow doppelt, und zwar folgt das zweite Zeichen dem ersten jedesmal in einem Zeitabstand von etwa 0.096 Sekunden. Der Sender 2xt ist 6400 km von Geltow entfernt und strahlt eine Welle von 16.175 m Länge bei etwa 12 kW Antennenleistung aus. Aus dem Unterschied der beiden Zeichen ergibt sich ein Wegunterschied von 28700 km der Wellen, die die Zeichen hervorrufen. Nimmt man an, daß sich die Wellen konzentrisch zur Erde in größten Kreisen ausbreiten, so entspricht das erste Zeichen dem kürzesten Weg zwischen Sender und Empfänger, das zweite dem längsten Weg. Bemerkenswert ist die verhältnismäßig große Stärke



des zweiten Zeichens: sie läßt auf eine sehr geringe Absorption der kurzen Wellen in den hohen Luftschichten schließen.

Entsprechende Ergebnisse lieferte die Beobachtung des in der Nähe von Geltow gelegenen Kurzwellensenders aga von Nauen, der die Welle 15 m bei 8 kW Antennenleistung ausstrahlt. Hier betrug der Zeitunterschied zwischen dem ersten Zeichen und seiner Wiederholung 0.1406 Sekunden, entsprechend einem Wegunterschied von 42100 km. Aus dem Vergleich dieses Weges mit dem Umfang des größten Erdkreises folgt eine Höhe der von den Wellen durchlaufenen Schicht von rund 335 km. Diese Zahl liegt in der Größenordnung der aus anderen Gründen vermuteten Höhe der wellenleitenden Schicht.

Thermisch erregte Quantensprünge in festen Körpern.

Von Dr. F. SIMON
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. NERNST.)

1. In der kinetischen Theorie der festen Körper genügte bisher die Annahme, daß die Atome kräftebegabte Punkte sind, nur im Falle der Ferromagnetica machte sich ein weiterer Freiheitsgrad der Atome auch thermisch bemerkbar. Nun zeigte SCHOTTKY[1] vor einiger Zeit auf Grund theoretischer Betrachtungen, daß Energiedifferenzen einer solchen Größenordnung möglich sein können, daß sie bei gewöhnlichen Temperaturen schon thermisch erregt werden. Außer der Tatsache aber, daß der bis zu den tiefsten Temperaturen normale Verlauf des Magnetisierungs-Koeffizienten einiger paramagnetischer Substanzen nach der LENZschen Theorie auf die Existenz solcher energetisch nur wenig verschiedener Zustände schließen läßt, ließ sich kein sicherer Nachweis dafür erbringen. Als EUCKEN[2] in seiner bekannten Arbeit über die Nullpunktsentropie den experimentellen Nachweis gebracht zu haben glaubte, daß bei einigen Kristallen am absoluten Nullpunkt das Quantengewicht 2 auftritt, wies ich[3] darauf hin, daß seine Annahme — also die Existenz zweier energetisch absolut gleichwertiger Zustände — sehr unwahrscheinlich sei, daß man vielmehr im Sinne SCHOTTKYS mit dem Vorhandensein energetisch so wenig verschiedener Zustände rechnen müsse, daß die Verteilung auf beide unterhalb der tiefsten Meßtemperatur schon vollendet ist. Da es sich in diesem Falle um sehr niedrigschmelzende Substanzen handelt, liegt es nahe, bei höherschmelzenden derartige Fälle in dem schon durch die Messungen erreichten Temperaturgebiet zu suchen, und im folgenden soll an einer Reihe von Beispielen das Vorhandensein solcher Zustände gezeigt und mit quantitativen Daten belegt werden.

2. Als Ausgangspunkt dient die Betrachtung der spezifischen Wärme. Wir nehmen an, daß außer dem Quantenzustand kleinster Energie noch ein weiterer einer um U höheren Energie besteht. Dann werden zunächst am absoluten Nullpunkt sämtliche Atome sich im Zustande kleinster Energie befinden. Mit steigender Temperatur wird ein Teil der Atome durch die ther-

[1] W. SCHOTTKY, Phys. Z. **22**, 1 (1921) u. **23**, 9 u. 448 (1922).
[2] A. EUCKEN u. F. FRIED, Z. f. Phys. **29**, 36 (1924).
[3] F. SIMON, Z. f. Phys. **31**, 224 (1925). Siehe auch Handbuch der Physik X, S. 396, Berlin 1926.

mische Energie auf den höheren Quantenzustand gebracht werden, wodurch ein anomaler Anstieg über die normale spezifische Wärme der Substanz hervorgerufen wird. Da bei sehr hohen Temperaturen schließlich die Verteilung auf beide Zustände gleichmäßig sein muß, wird der Überschuß der spezifischen Wärme nach Durchschreiten eines Maximums wieder auf Null herabsinken. Eine einfache statistische Rechnung führte SCHOTTKY unter Einführung der charakteristischen Temperatur der Umlagerung $\Theta_u = U/R$ zu der folgenden Formel[1]:

$$\Delta C_v = R \frac{\left(\frac{\Theta_u}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta_u}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_u}{T}} + 1\right)^2}.$$

Der normale Anstieg ist also nur eine Funktion von Θ_u/T. Durch Auftragen von ΔC_v gegen $\log T$ resultiert daher für alle Θ_u die gleiche Kurve, die nur je nach den Werten von Θ_u an verschiedenen Stellen der $\log$-T-Achse zu liegen kommt. In Fig. 2 ist in der ausgezogenen Kurve diese »Umlagerungsfunktion« (von jetzt ab U.-F. genannt) für ein Θ_u von 69 gezeichnet. Der $0.438\,R = 0.87$ cal/Grad betragende Maximalwert des anomalen Anstieges der spezifischen Wärme wird bei der Temperatur $T = 0.42\,\Theta_u$ erreicht. Der gesamte Energieinhalt der U.-F. beträgt $^1/_2 R\Theta_u$ entsprechend der Tatsache, daß sich bei sehr hohen Temperaturen die Hälfte der Atome auf dem höheren Quantenzustand befindet. Die durch den anomalen Anstieg hervorgerufene Entropieänderung ist, wie leicht einzusehen, unabhängig von Θ_u, und zwar $= R\ln 2$.

Überlagert sich eine derartige Anomalie bei höheren Temperaturen, also an einer Stelle, an der der DULONG-PETITsche Wert der Atomwärme schon erreicht ist, so ist ihr Nachweis sehr erschwert. Die U.-F. zieht sich nämlich über ein sehr breites Temperaturbereich hin. Sie beginnt bei ungefähr $T = {}^1/_{10}\,\Theta_u$ merkliche Werte anzunehmen und ist praktisch bei $T = 5\,\Theta_u$ beendet. Beginnt also beispielsweise der anomale Anstieg bei Zimmertemperatur, dann ist er erst bei 15000° beendet, und der Existenzbereich der festen Körper hat schon aufgehört, bevor überhaupt das Maximum der Funktion erreicht ist. Da außer der meist nicht sehr sicheren $C_p - C_v$-Korrektion noch eine Reihe quantitativ bisher nicht zu erfassender Einflüsse ein Überschreiten des DULONG-PETITschen Wertes bewirken, ist also der Nachweis eines Quantensprunges aus der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen kaum möglich.

Ein solcher kommt zunächst nur bei einer Lage der Anomalie bei tiefen Temperaturen in Betracht, wo sich diese auf ein absolut genommen kleineres Temperaturintervall verteilt. Sie kann in diesem Falle nur dann erkannt werden, wenn der normale Abfall der spezifischen Wärme einer theoretisch bekannten Funktion folgt. Dies ist der Fall bei den einatomigen regulär kristallisierenden Substanzen, deren spezifische Wärme durch eine DEBYE-Funktion (im folgenden D.-F. genannt) gut wiedergegeben wird. Die Erfahrung zeigt, daß bei diesen die Differenz von beobachteten und berechneten Werten einige Prozente nicht übersteigt. Nun war auffällig, daß die Atomwärmen des grauen

[1] In dieser Formel steckt noch die Annahme gleicher Quantengewichte für beide Zustände.

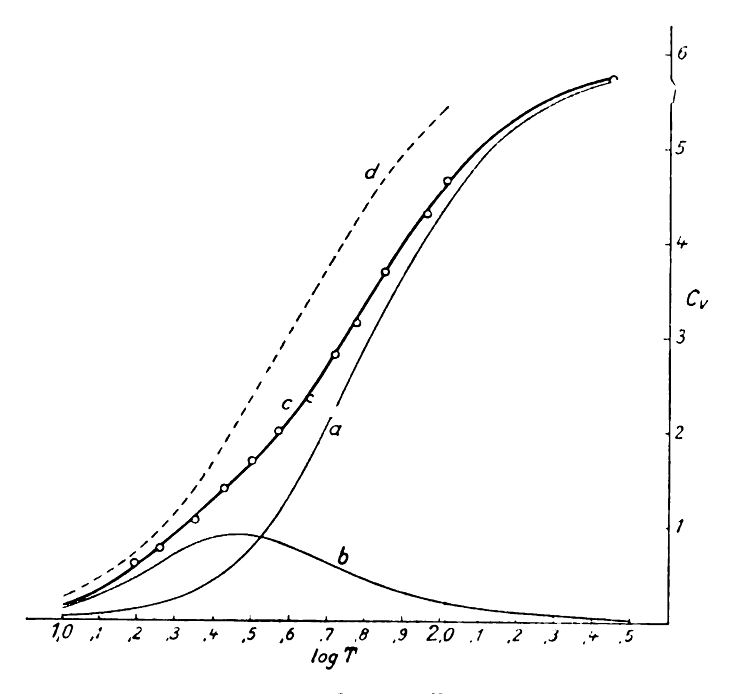


Fig. 1. Graues Zinn.
○ Meßwerte von Lange, Zeitschr. f. phys. Chemie **110**. 343. 1924. *a* D.-F., $\Theta_D = 260$.
b U.-F., $\Theta_u = 69$. *c* Summe $a + b$. *d* Weißes Zinn.

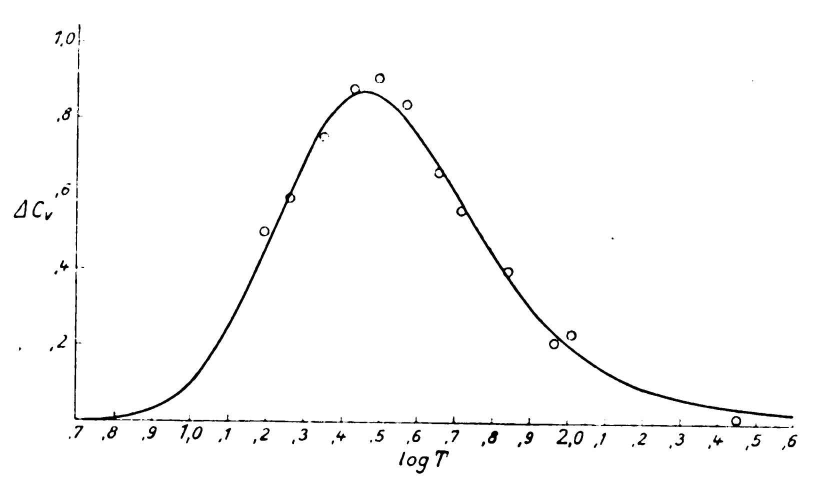


Fig. 2. Graues Zinn.
○ Meßwerte minus D.-F., $\Theta_D = 260$. —— U.-F., $\Theta_u = 69$.

Zinns und des kristallisierten Siliziums von einer D.-F. erheblich abweichen, obwohl beide Diamantstruktur besitzen. Es liegt nahe, den Grund hierfür in der thermischen Erregung eines Quantensprunges zu suchen.

3. Graues Zinn. In Fig. 1 ist die Atomwärme des grauen Zinns als Funktion des Logarithmus der Temperatur aufgetragen. In einer solchen Darstellung wäre eine D.-F. durch Kurve *a* gegeben, die je nach den ver-

schiedenen charakteristischen Temperaturen (Θ_D) an verschiedene Stellen der log-T-Achse zu liegen kommt. Man sieht, daß beide Kurven nicht zur Deckung zu bringen sind, daß vielmehr bei tiefen Temperaturen die gemessenen Werte die einer D.-F. bis über 200% überschreiten. Durch Abziehen beider Funktionen voneinander erhält man nun eine Kurve (b), die einer U.-F. genau entspricht. In der Fig. 1 bedeutet c die Summe einer D.-F. $\Theta_D = 260$ und einer U.-F. $\Theta_u = 69$, die sich den Meßwerten sehr gut anpaßt. Zur genaueren Darstellung ist in Fig. 2 nur der die D.-F. überschreitende Anteil der Atomwärme gezeichnet, die ausgezogene Kurve bedeutet die theoretische U-Kurve.

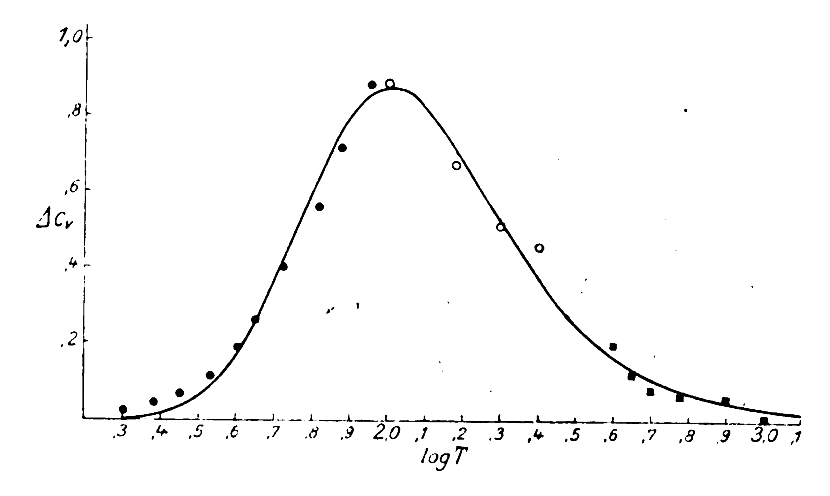


Fig. 3. Silizium.

Differenz von Meßwerten und D.-F., $\Theta_D = 490$. • NERNST und SCHWERS. ■ MAGNUS.
○ interpoliert mit Benutzung von EWALDS Werten. — U.-F., $\Theta_u = 246$.

Die sehr gute Übereinstimmung läßt den Schluß sicher erscheinen, daß im grauen Zinn zwei Zustände einer Energiedifferenz von $R \cdot 69 = 137$ cal./Mol. bestehen.

4. Silizium. Beim Silizium liegen die Verhältnisse ganz ähnlich. Auch hier ist bei den tiefsten Temperaturen die spezifische Wärme bedeutend größer, als es einer den höheren Temperaturen angepaßten D.-F. entspricht. Man findet eine sehr gute Wiedergabe der experimentellen Werte durch die Summe einer D.-F. $\Theta_D = 790$ und einer U.-F. $\Theta_u = 246$ (Fig. 3).

5. Diamant. Es liegt jetzt nahe, auch beim Diamanten, der derselben Gruppe des periodischen Systems wie Zinn und Silizium angehört und die gleiche Kristallstruktur besitzt, nach einem thermisch erregten Quantensprung zu suchen. Dies könnte zunächst befremdlich erscheinen, da bekanntlich die Atomwärme des Diamanten einer D.-F. gut folgt. Es zeigt sich aber, daß, falls man einer D.-F. Θ_D eine U.-F. $\Theta_u = 0.45\ \Theta_D$ überlagert, daß dann die resultierende Funktion sich von einer D.-F. $\Theta'_D = 0.79\ \Theta_D$ nur sehr wenig unterscheidet. Nur im Gebiet der tiefsten Temperaturen, wo die Differenz zweier D.-F. wie T^3 abfällt, die U.-F. dagegen exponentiell, werden merkliche Unter-

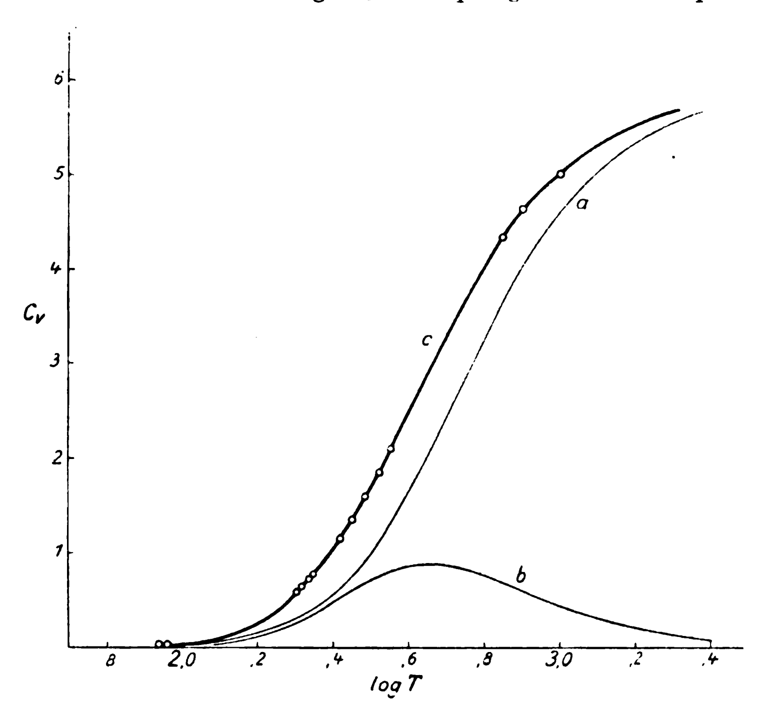


Fig. 4. Diamant.
o Messungen von Nernst, Weber, Magnus. *a* D.-F., $\Theta_D = 2340$.
b U.-F., $\Theta_u = 1070$. *c* Summe $a+b$.

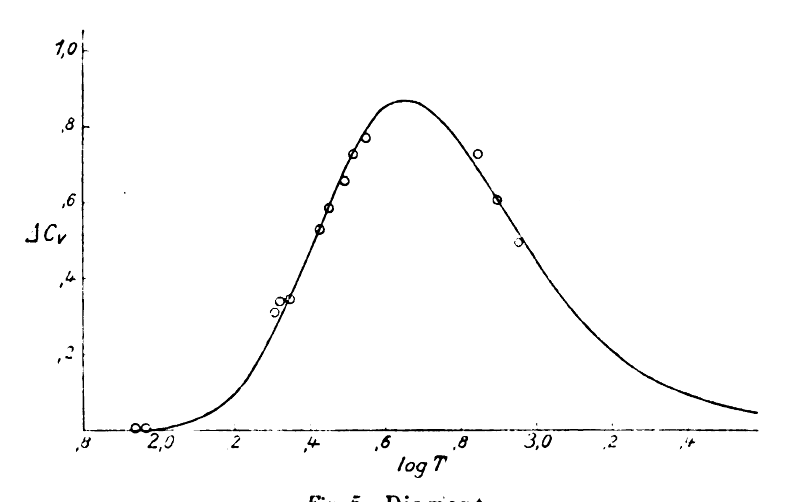


Fig. 5. Diamant.
o Differenz der Messungen von Nernst, Weber und Magnus gegen D.-F., $\Theta_D = 2340$.
— U.-F., $\Theta_u = 1070$.

schiede auftreten. Da Nernst[1] gefunden hatte, daß bei der Temperatur der flüssigen Luft die Atomwärme des Diamanten nur etwa halb so groß ist, wie es aus einer den höheren Temperaturen angepaßten D.-F. $\Theta_D = 1860$

[1] W. Nernst, Ann. d. Phys. **36**, 418 (1911).

folgen würde, so wurde auch beim Diamanten die Darstellung durch die Summe einer D.-F. und einer U.-F. versucht. Diese gelingt, wie die Figuren 4 und 5 zeigen, mit $\Theta_D = 2340$ und $\Theta_u = 1070$ vollkommen. Im oberen Temperaturengebiet ist die Wiedergabe genau so gut wie mit der bisher benutzten D.-F. $\Theta_D = 1860$, bei tieferen Temperaturen ist die Übereinstimmung bedeutend besser. Während bisher der theoretische Wert bei der Temperatur der flüssigen Luft 75% größer war als der gefundene, übertrifft er ihn jetzt nur um 10%, also durchaus innerhalb der Meßfehler. (Auf der Figur ist dies wegen der Kleinheit der Werte nicht zu erkennen.)

Eine Stütze unserer im Falle des Diamanten noch etwas gewagten Behauptung kann aus optischen Messungen gewonnen werden. Es ist nämlich

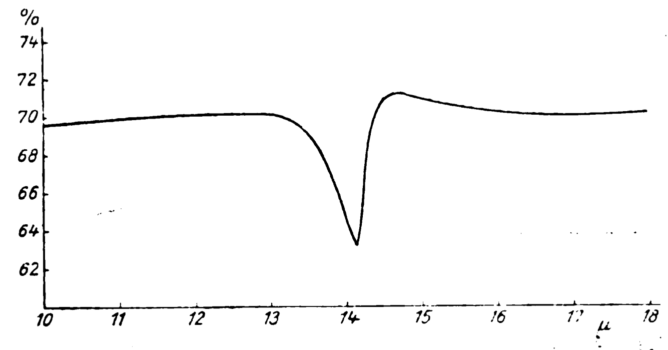


Fig. 6. Durchlässigkeit eines 1.26 mm dicken Diamanten.

möglich, wenn auch nicht notwendig, daß der Quantensprung auch optisch erregbar ist. Einer Energiedifferenz von $U = R \cdot 1070 = 2120$ cal/Mol entspricht eine Wellenlänge von 13.4 μ. In der Tat zeigen die Messungen von Reinkober[1], daß sich bei 14.1 μ eine Stelle erhöhter Absorption befindet (s. Fig. 6). Die Differenz zwischen 13.4 und 14.1 μ liegt innerhalb der Beobachtungsfehler.

Eine weitere Kontrolle der hier aufgestellten Behauptung ist dann möglich, wenn man auf eine von der direkten Bestimmung der spezifischen Wärmen unabhängige Methode die charakteristischen Temperaturen des normalen Anstieges der spezifischen Wärme feststellen kann. Als solche kommt zunächst die Grüneisensche Formel der Proportionalität von thermischer Ausdehnung und spezifischer Wärme für isotrope Stoffe in Frage, und zwar muß als letztere nur der der wirklichen Schwingungsenergie entsprechende Anteil benutzt werden. Beim Diamanten liegen nun Messungen der thermischen Ausdehnung zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und 80° C von Röntgen-Dembowska vor, aus denen Grüneisen[2] ableitete, daß der Quotient aus thermischer Ausdehnung und der mit $\Theta_D = 1860$ berechneten spezifischen Wärme relativ gut konstant bleibt. Es muß jetzt verlangt werden, daß durch Einsetzen von $\Theta_D = 2340$ die Übereinstimmung verbessert wird. Da die Messungen aber nicht weit vom T^3-Gebiete entfernt liegen, kann eine Veränderung des Θ_D

---

[1] O. Reinkober, Ann. d. Phys. **34**, 370 (1911).
[2] E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **55**, 371, (1918).

im Temperaturgang des Quotienten nur wenig ändern, und in der Tat liegt in beiden Fällen die Übereinstimmung innerhalb der experimentellen Fehler. Eine genaue Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten bis zu höheren Temperaturen wäre äußerst erwünscht. Beim grauen Zinn und beim kristallisierten Silizium liegen bisher leider noch gar keine Messungen der thermischen Ausdehnung vor.

6. Die Alkalimetalle. Nach der oben gemachten Erfahrung am Diamanten muß man damit rechnen, daß auch bei anderen Substanzen die aus der Atomwärme hergeleitete charakteristische Temperatur nur vorgetäuscht sein kann, und zwar dann, wenn die Messungen nicht bis zu sehr tiefen Temperaturen gehen und außerdem zu der auf andere Weise errechneten charakteristischen Temperatur nicht passen. Bei den Metallen hat man in der Grüneisenschen Formel für den elektrischen Widerstand eine weitere unabhängige Bestimmungsmethode für Θ_D. Diese Formel, die besagt, daß der elektrische Widerstand dem Produkt aus Atomwärme und absoluter Temperatur proportional ist, bedarf zwar noch der theoretischen Begründung, aber die Übereinstimmung ist in einer großen Zahl von Fällen so gut, daß man zunächst empirisch mit ihr rechnen kann. Aus der Reihe dieser Übereinstimmungen fallen die Alkalimetalle heraus. Während die bisherigen Messungen der spezifischen Wärme beim Natrium und Kalium auf Θ_D 159 und 99.5 schließen lassen, sind die aus dem elektrischen Widerstand berechneten bedeutend höher, aus neuen Messungen von Woltjer[1] errechnen sich 208 und 115. Da die Verhältnisse der thermischen zu den elektrischen Θ nicht weit von den obenerwähnten abweichen, bei dem durch Überlagerung einer U.-F. und einer D.-F. eine D.-F. einer falschen Schwingungszahl vorgetäuscht wird, wurde eine Darstellung in diesem Sinne versucht. Die Figuren 7 und 8 zeigen, daß gute Übereinstimmung mit dem Experiment mit folgenden Zahlen erzielt wird:

Natrium: $C_v =$ D.-F. $(\Theta_D = 202) +$ U.-F. $(\Theta_u = 95)$
Kalium: $C_v =$ D.-F. $(\Theta_D = 126) +$ U.-F. $(\Theta_u = 59)$.

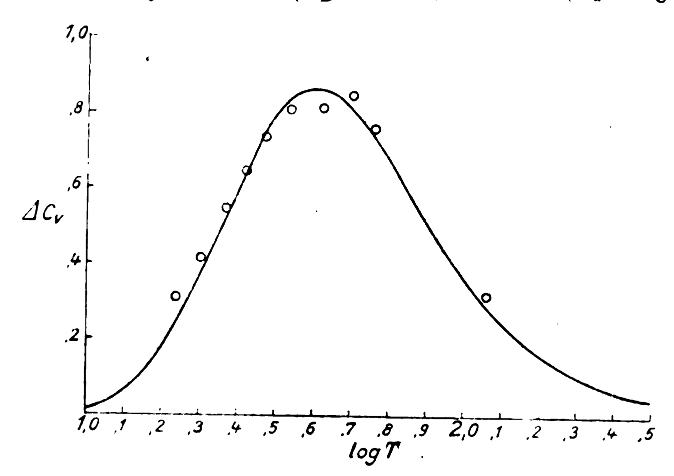


Fig. 7. Natrium.
o Differenz der Messungen von Simon-Zeidler und D.-F., $\Theta_D = 202$. — U.-F., $\Theta_n = 95$.

[1] Leiden Comm. Nr. 173.

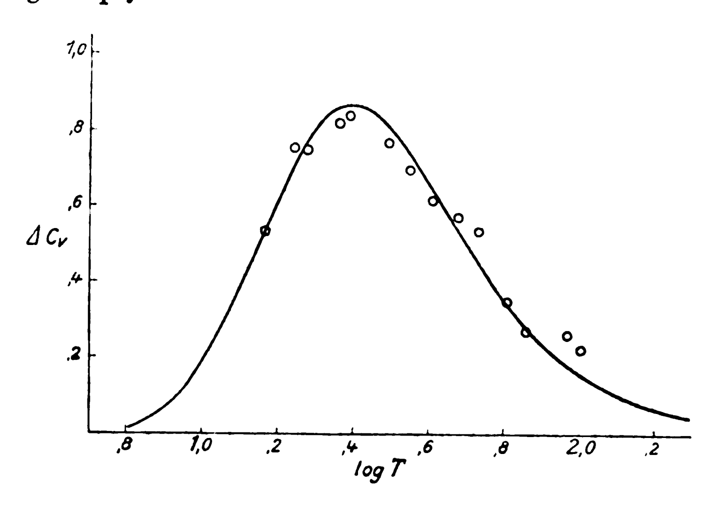


Fig. 8. Kalium.

○ Differenz der Messungen von Simon-Zeidler und D.-F., $\Theta_D = 126$. —— U.-F., $\Theta_u = 59$.

Die sich jetzt ergebenden Θ_D stimmen nun innerhalb der üblichen Fehler mit den elektrisch bestimmten überein. Eine weitere Stütze für diese Zahlen finden wir in der Lindemannschen Schmelzpunktsformel. Während die Konstante dieser Gleichung im allgemeinen bei 140 bis 150 liegt, folgt aus den bisher benutzten Schwingungszahlen beim Natrium 114, beim Kalium 121, aus den neuen dagegen 145 und 153.

Für die übrigen Alkalimetalle, bei denen ähnliche Verhältnisse auch zu erwarten sind, liegen bisher leider noch keine Messungen der Atomwärmen vor.

7. Die Eisenmetalle. Auch bei den Eisenmetallen zeigt sich ein sehr erheblicher Unterschied zwischen den elektrisch und den thermisch berechneten charakteristischen Temperaturen. Die ersteren liegen in der Gegend von 500, die letzteren zwischen 380 und 400. Das Verhältnis beider ist also wieder ungefähr 1.25:1, woraus sich ergibt, daß die Darstellung durch eine Summe einer D.-F. ($\Theta_D = 500$) und einer U.-F. ($\Theta_u = 225$) gut gelingen muß. Zur genauen Feststellung fehlen bisher bei den Eisenmetallen noch Messungen der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen. Auf diesen scheinbar etwas komplexeren Fall soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

8. Die Übereinstimmung der theoretischen Umwandlungskurve mit den Experimenten ist recht gut, nur bei sehr tiefen Temperaturen sind Anzeichen vorhanden, daß die theoretische Kurve schneller abfällt als die experimentelle. Das wäre durch eine gewisse Unschärfe des Quantensprunges zu erklären, ganz in Analogie zu dem Verhältnis der Debye-Funktion zur Einstein-Funktion. Im Falle des Diamanten zeigen übrigens die optischen Messungen, daß die Unschärfe nicht sehr groß sein kann. Weiterhin kann man auf Grund der guten Übereinstimmung von Experiment und Theorie noch sagen, daß die Quantengewichte beider Zustände gleich sind, da dies als Voraussetzung in Schottkys Ableitung steckte.

Die folgende Tabelle faßt die bisher gefundenen Daten zusammen.

Substanz	Θ_u	T_{max}	$U_{(cal/Mol)}$	$U_{(Volt-Elektron)}$	U in Prozenten der Gitterenergie
Sn_{grau}	69	29	137	0.0060	0.2
Si_{krist}	246	103	490	0.021	—
$C_{Diamant}$ [1]	1070	450	2120	0.092	1.3
Na	95	40	189	0.0082	0.7
K	59	25	117	0.0051	0.5
Fe, Co, Ni	etwa 225	etwa 95	etwa 450	etwa 0.02	0.4

Man entnimmt der Tabelle, daß die Maxima der Anomalien außer beim Diamanten zwischen der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs und der der flüssigen Luft liegen (Spalte 3), und ferner, daß die Energiedifferenzen der Größenordnung nach 1% der Gitterenergie betragen. Als Ursache für derartig kleine Energiestufen kommt außer einer Veränderung der Elektronenkonfiguration noch die Möglichkeit »verschiedener diskreter Orientierungen der Atome als Ganzer gegen die Umgebung« in Betracht (s. Schottky l. c.). Aus unseren Beobachtungen kann nur gefolgert werden, daß 1. die Energiedifferenzen sehr klein sind, 2., daß die Umlagerung auch noch bei den tiefsten Temperaturen für thermische Messungen unendlich schnell verläuft, 3., daß die Quantengewichte beider Zustände gleich sind[2] und 4., daß beim Diamanten der Quantensprung auch optisch erregbar ist. Keine dieser Tatsachen läßt mit Sicherheit eine der Erklärungsmöglichkeiten, zwischen denen übrigens in aller Strenge kaum ein Unterschied zu konstruieren ist, bevorzugen. Auch der Umstand, daß in freien Atomen solche der ersten Erklärung entsprechende Energiestufen im Allgemeinen nicht auftreten, ist nicht beweiskräftig, da die Verhältnisse im Kristallverband wesentlich anders liegen können.

Weitere Aufklärung ist von magnetischen und optischen Untersuchungen zu erwarten. Hier sei vorläufig nur auf das merkwürdige magnetische Verhalten der beiden Zinnmodifikationen[3] hingewiesen, ferner auf die sogenannte »kryomagnetische Anomalie«[4], die mit den hier beobachteten Erscheinungen im Zusammenhang zu stehen scheint.

Auch die für die Frage nach der Natur des Quantensprunges wichtige Feststellung, ob andere Modifikationen, wie z. B. das weiße Zinn oder der Graphit, ein ähnliches Verhalten zeigen, kann nicht beantwortet werden, da beide nicht regulär kristallisieren und daher keine Bezugsfunktion für den normalen Abfall der Atomwärme besteht. Immerhin scheint es nach Fig. 1, auf der Kurve *d* die Atomwärme des weißen Zinns bedeutet, so auszusehen, als ob diese Modifikation jedenfalls nicht bei ähnlichen Temperaturen ein anomales Verhalten aufweist.

---

[1] Vom Germanium, das ebenfalls Diamantstruktur besitzt, liegen keine Messungen der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen vor. Untersuchungen am Blei, das zwar andere Struktur hat, aber in der gleichen Gruppe des periodischen Systems steht, sind in Vorbereitung.

[2] Bei den Eisenmetallen läßt sich hierüber noch nichts aussagen.

[3] P. Weiss und G. Foex, Le Magnétisme, Paris 1926. S. 21.

[4] Ebenda S. 73.

Es möge noch betont werden, daß das Auftreten eines solchen Quantensprunges die Symmetrieverhältnisse der Kristalle beeinflussen kann. Dieser Einfluß wird entsprechend dem geringen Betrage der Umwandlungsenergie gegenüber der Gitterenergie jedenfalls nur sehr klein sein. Vielleicht ist das von Bragg[1] beobachtete sehr schwache Auftreten eines Reflexes 222 an der Oktaederfläche des Diamanten hiermit in Zusammenhang zu bringen. Es soll versucht werden, die Änderung der Intensität dieser Reflexion über das ganze »Umwandlungstemperaturgebiet« zu verfolgen.

9. Weitere Fälle. Es sei erwähnt, daß beim Cer ebenfalls eine thermische Anomalie vorzuliegen scheint, die Messungen sind jedoch noch nicht abgeschlossen. Auch das Verhalten der Ammoniumsalze[2] bei Temperaturen zwischen —30° und —40° ist wahrscheinlich durch ähnliche Verhältnisse hervorgerufen. Auf diesen theoretisch nicht ganz so einfach liegenden Fall wird an anderer Stelle zurückgekommen werden.

Zur Auffindung weiterer Fälle sollen hauptsächlich die Atomwärmen einer Reihe von Substanzen bis zu Heliumtemperaturen verfolgt werden. Auch wären Messungen der thermischen Ausdehnung bis zu sehr tiefen Temperaturen von großem Wert. Für den allgemeinen Fall von Substanzen, deren Atomwärme nicht einer Debye-Funktion folgt, muß zu magnetischen bzw. optischen Messungen gegriffen werden, falls nicht die Anomalie bei so tiefen Temperaturen liegt, daß die Schwingungsfreiheitsgrade der Atome fast völlig abgestorben sind. Diese Untersuchungsmethoden dürften auch bei einer Lage der Anomalie bei hohen Temperaturen als wesentliche in Frage kommen.

10. Thermodynamische Rechnungen. Für thermodynamische Rechnungen ist das Auftreten von Quantensprüngen natürlich so lange belanglos, als die Anomalie in dem durch die Messung erfaßten Temperaturgebiet liegt. Sie wird nur dann von Bedeutung, wenn man annehmen kann, daß eine derartige Anomalie erst bei äußerst tiefen Temperaturen auftritt. Rechnet man beispielsweise beim festen Wasserstoff mit einer solchen Möglichkeit, so folgt, falls man auch hier für eine Überschlagsrechnung die Umwandlungsenergie gleich 1% der Gitterenergie ansetzt, daß die Anomalie bei etwa 1° abs. ihren Höhepunkt erreicht und sich also bei den bisherigen Messungen, die bis zu 10° abs. herabreichen, der Beobachtung vollkommen entzogen hätte. Dies besitzt sogar einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit, da dem gasförmigen Wasserstoff aus theoretischen Gründen das Quantengewicht 2 zuzuschreiben ist, während nach den Bestimmungen des Verfassers[3] aus dem Verdampfungsgleichgewicht der normale Sackur-Stern-Tetrodesche Wert der chemischen Konstanten resultiert.

---

[1] Zitiert nach Bragg, Xrays and crystal structure, London 1924, S. 99.

[2] R. Ewald, Ann. d. Phys. **44**, 1213 (1914); F. Simon, Ann. d. Phys. **68**, 263 (1922); F. Simon und Cl. v. Simson, Naturwissensch. **14**, 880 (1926).

[3] F. Simon, Z. f. Phys. **15**, 307 (1923).



Zusammenfassung.

Durch Betrachtung des Temperaturverlaufs der spezifischen Wärmen wird bei einer Reihe einatomig regulär kristallisierender Substanzen gezeigt, daß ihre Atome zweier energetisch so wenig verschiedener Zustände fähig sind, daß die im homogenen System stattfindende Verteilung auf beide schon bei sehr tiefen Temperaturen einsetzt. Die Energiedifferenzen zwischen beiden Zuständen, über deren Natur noch nichts Bestimmtes gesagt werden kann, sind von der Größenordnung eines Prozentes der Gitterenergie. Im Falle des Diamanten kann die Energiestufe auch optisch nachgewiesen werden.

Es werden einige Folgerungen für das physikalische und chemische Verhalten dieser Substanzen besprochen.

Zur additiven Zahlentheorie.

Von I. Schur.

(Vorgetragen am 6. Mai 1926 [s. oben S. 132].)

Jeder unendlichen Folge positiver ganzer Zahlen

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots \tag{1}$$

läßt sich eine Zerlegungsfunktion $A(n)$ zuordnen, nämlich die Anzahl der Zerlegungen

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad (a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots)$$

in gleiche oder verschiedene Summanden aus der Zahlenfolge (1). Man kann $A(n)$ auch durch die Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{\alpha_\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) x^n \qquad (|x| < 1, \quad A(0) = 1) \tag{2}$$

definieren.

Durch Umformung dieses unendlichen Produktes oder auch auf rein arithmetischem Wege gelingt es vielfach nachzuweisen, daß $A(n)$ sich für jedes n noch anders deuten läßt, insbesondere mit der Anzahl $B(n)$ anders gearteter Zerlegungen

$$n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \qquad (b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \cdots) \tag{3}$$

identisch ist. Von besonderem Interesse wird ein solcher Satz, wenn die Zerlegungen (3) dadurch entstehen, daß nur die Paare $b_\varkappa, b_{\varkappa+1}$ gewissen Bedingungen unterworfen werden. Von diesem Charakter sind die folgenden Sätze:

I. *Für die Folge*

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

der ungeraden Zahlen wird die Anzahl $A(n)$ gleich der Anzahl $B(n)$ der Zerlegungen (3), *bei denen stets $b_\varkappa - b_{\varkappa+1} \geqq 1$ ist.*

II. *Für die Folge*

$$1, 4, 6, 9, \cdots$$

der Zahlen von der Form $5x \pm 1$ wird die Anzahl $A(n)$ gleich der Anzahl $B(n)$ der Zerlegungen (3), *bei denen stets $b_\varkappa - b_{\varkappa+1} \geqq 2$ ist.*

II'. *Für die Folge*

$$2,\ 3,\ 7,\ 8,\ \cdots$$

der Zahlen von der Form $5x \pm 2$ *wird die Anzahl* $A(n)$ *gleich der Anzahl* $B(n)$ *der Zerlegungen* (3), *bei denen wieder stets* $b_\varkappa - b_{\varkappa+1} \geqq 2$ *ist und außerdem der Summand* 1 *nicht vorkommt.*

Den Satz I hat EULER aus der Identität

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2\lambda-1}} = \prod_{\mu=1}^{\infty} (1+x^{\mu}) \tag{4}$$

gefolgert. Die Sätze II und II' habe ich erhalten, indem ich die zugehörigen unendlichen Produkte in Form unendlicher Determinanten darstellte[1].

Im folgenden will ich auf einen weiteren Satz von ganz ähnlichem Inhalt aufmerksam machen:

III. *Für die Folge*

$$1,\ 5,\ 7,\ 11,\ \cdots$$

der Zahlen von der Form $6x \pm 1$ *ist die Anzahl* $A(n)$ *gleich der Anzahl* $B(n)$ *der Zerlegungen* (3), *bei denen stets* $b_\varkappa - b_{\varkappa+1} \geqq 3$ *und, wenn* $b_\varkappa$ *und* $b_{\varkappa+1}$ *durch* 3 *teilbar sind,* $b_\varkappa - b_{\varkappa+1} \geqq 6$ *wird*[2].

Auch der Beweis dieses Satzes beruht in der Hauptsache darauf, daß das zugehörige Produkt (2) als unendliche Determinante dargestellt wird. Diese Darstellung ergibt sich aus einem allgemeineren Satze:

IV. *Für* $|t| < 1$ *und beliebiges* α *wird*

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha t, & t^3-t^4, & 0, & 0 & \cdots \\ -1 & 1+\alpha t^2, & t^4-t^6 & 0 & \cdots \\ 0 & -1, & 1+\alpha t^3, & t^5-t^8, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1+\alpha t^{\nu} + t^{2\nu+1}). \tag{5}$$

§ 1. Beweis des Satzes IV.

Man setze

$$P_0 = 1, \quad P_n = \prod_{\nu=1}^{n} (1+\alpha t^{\nu} + t^{2\nu+1})$$

und bezeichne mit D_n den n-ten Abschnitt der unendlichen Determinante (5). Diese endlichen Determinanten sind durch die Formeln

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1+\alpha t,$$

$$D_n = (1+\alpha t^n) D_{n-1} + (t^{n+1} - t^{2n}) D_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

[1] *Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1917, S. 302—321. — Die aus den Sätzen II und II' folgende Kettenbruchformel

$$1 + \frac{x|}{|1} + \frac{x^2|}{|1} + \cdots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1-x^{5\nu-3})(1-x^{5\nu-2})}{(1-x^{5\nu-4})(1-x^{5\nu-1})}$$

findet sich schon bei L. J. ROGERS, *On the expansion of some infinite products*, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 25 (1894), S. 318—343. Vgl. auch L. J. ROGERS and S. RAMANUJAN, *Proof of certain identities in combinatory analysis*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Bd. 19 (1919), S. 211—216.

[2] Es ist jedoch zu beachten, daß bei der Bestimmung der Anzahl $B(n)$ die Zerlegung $n = n$ mitzuzählen ist. Das gilt auch für die Sätze I, II und II'.

eindeutig bestimmt. Man führe nun die Gaussschen Ausdrücke

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = \frac{(t^n - 1)(t^{n-1} - 1) \cdots (t^{n-\nu+1} - 1)}{(t^\nu - 1)(t^{\nu-1} - 1) \cdots (t - 1)}$$

ein und setze

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu t^{\nu(n+2) - \binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} P_{n-\nu}. \qquad \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1, S_0 = 1\right)$$

Ich behaupte, daß für jedes n

$$S_n = D_n$$

wird. Da $S_0 = 1$ sein soll und

$$S_1 = P_1 - t^3 P_0 = 1 + \alpha t = D_1$$

ist, genügt es zu zeigen, daß die Summen S_n die Rekursionsformel (6) befriedigen.

Dies ergibt sich folgendermaßen. Es ist

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} + t^{n-\nu} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{bmatrix},$$

wobei

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} = 0$$

zu setzen ist. Daher kann S_n in der Form

$$S_n = S_n' + S_n''$$

geschrieben werden, wobei

$$S_n' = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu t^{\nu(n+2) - \binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} P_{n-\nu},$$

$$S_n'' = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu t^{\nu(n+1) + n - \binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{bmatrix} P_{n-\nu}$$

wird.

In S_n' ersetze ich $P_{n-\nu}$ durch

$$P_{n-\nu} = (1 + \alpha t^{n-\nu} + t^{2n-2\nu+1}) P_{n-\nu-1}.$$

Dann wird

$$S_n' = \alpha t^n S_{n-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu t^{\nu(n+1) - \binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} (t^\nu + t^{2n-\nu+1}) P_{n-\nu-1}.$$

In S_n'' setze ich $\nu = \mu + 1$ und erhalte

$$S_n'' = -\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^\mu t^{\mu(n+1) + 2n + 1 - \binom{\mu+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \mu \end{bmatrix} P_{n-\mu-1}$$

$$= -\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^\mu t^{\mu(n+1) - \binom{\mu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \mu \end{bmatrix} t^{2n-\mu+1} P_{n-\mu+1}.$$

Daher wird

$$S_n = \alpha t^n S_{n-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu t^{\nu(n+1)-\binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} t^\nu P_{n-\nu+1}$$

$$= (1+\alpha t^n) S_{n-1} + S_n''',$$

wobei

$$S_n''' = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu t^{\nu(n+1)-\binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} (t^\nu - 1) P_{n-\nu-1}$$

ist. Wegen $t^0 - 1 = 0$ und

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ \nu \end{bmatrix} (t^\nu - 1) = \begin{bmatrix} n-2 \\ \nu-1 \end{bmatrix} (t^{n-1} - 1)$$

kann auch

$$S_n''' = (t^{n-1} - 1) \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu t^{\nu(n+1)-\binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ \nu-1 \end{bmatrix} P_{n-1-\nu}$$

geschrieben werden. Ersetzt man hierin ν durch $\nu+1$, so erhält man, wie zu beweisen ist,

$$S_n''' = -(t^{n-1} - 1) t^{n+1} S_{n-2} = (t^{n+1} - t^{2n}) S_{n-2}.$$

Um von der nun gewonnenen Formel

$$D_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu t^{\nu(n+2)-\binom{\nu}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} P_{n-\nu} \tag{7}$$

zu dem Satze IV, d. h. zu der Gleichung

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

zu gelangen, schließt man folgendermaßen. Für $|t| < 1$ sind D und P jedenfalls als Potenzreihen

$$D = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$
$$P = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

darstellbar[1], und hierbei stimmen sowohl die Entwicklungen von D und D_n als auch die von P und P_n in den Koeffizienten von $1, t, \cdots, t^n$ überein. Nun lehrt aber die Formel (7) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Ausdrücke $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ Polynome sind, daß die Entwicklung von $D_n - P_n$ mit einem Gliede const. t^{n+2} beginnt. Hieraus folgt, daß die Koeffizienten a_ν und b_ν für jedes ν einander gleich sind.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß das unendliche Produkt $P = P(\alpha, t)$ in enger Beziehung zu den Jacobischen Thetafunktionen steht. Setzt man nämlich

$$\vartheta(v, \tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} e^{(2\lambda v + \lambda^2 \tau)\pi i}, \qquad \left(\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0\right)$$

[1] Für die unendliche Determinante folgt dies in bekannter Weise aus der Rekursionsformel (6) für die D_n.

so wird für $h = e^{\pi i \tau}$, $z = e^{\pi i v}$

$$\vartheta(v, \tau) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1}z^2)(1+h^{2\nu-1}z^{-2}).$$

Dies kann, wenn

$$\alpha = h(z^2+z^{-2}), \quad t = h^2$$

gesetzt wird, in der Form

$$\vartheta(v, \tau) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}) \cdot (1+\alpha+t) P(\alpha, t)$$

geschrieben werden.

Wählt man speziell in der Formel (5), wenn $|x| < 1$ ist,

$$\alpha = 0, \quad t = x \quad \text{oder} \quad \alpha = 2x, \quad t = x^2,$$

so ergeben sich die bemerkenswerten Relationen

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+x^{2\nu+1}) = \begin{vmatrix} 1, & x^3-x^4, & 0, & 0, \cdots \\ -1, & 1, & x^4-x^6, & 0, \cdots \\ 0, & -1, & 1, & x^5-x^8, \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+x^{2\nu+1})^2 = \begin{vmatrix} 1+2x^3, & x^6-x^8, & 0, & 0, \cdots \\ -1, & 1+2x^5, & x^8-x^{12}, & 0, \cdots \\ 0, & -1, & 1+2x^7, & x^{10}-x^{16}, \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

§ 2. Eine Reihenentwicklung für die unendliche Determinante *D*.

Man setze, was jedenfalls zulässig ist,

$$\alpha = x+y, \quad t = xy$$

und definiere die Ausdrücke $\phi_\nu, \phi'_\nu, \phi''_\nu$ durch folgende Festsetzungen: Es soll

$$\phi_0 = 1+x, \quad \phi'_0 = y, \quad \phi''_0 = xy = t,$$
$$\phi_1 = tx(1+x), \quad \phi'_1 = ty(1+x+y), \quad \phi''_1 = t^2(1+x+y)$$

sein und allgemein

$$(8) \quad \begin{cases} \phi_n = t^n x \;(\phi_0+\phi'_0+\phi''_0+\cdots+\phi_{n-2}+\phi'_{n-2}+\phi''_{n-2}+\phi_{n-1}), \\ \phi'_n = t^n y \;(\phi_0+\phi'_0+\phi''_0+\cdots+\phi_{n-2}+\phi'_{n-2}+\phi''_{n-2}+\phi_{n-1}+\phi'_{n-1}), \\ \phi''_n = t^{n+1}(\phi_0+\phi'_0+\phi''_0+\cdots+\phi_{n-2}+\phi'_{n-2}+\phi''_{n-2}+\phi_{n-1}+\phi'_{n-1}) \end{cases}$$

gesetzt werden.

Ich behaupte, daß für $|xy| < 1$

$$(9) \qquad (1+x)(1+y)D = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\phi_\nu+\phi'_\nu+\phi''_\nu)$$

wird.

Dies ist jedenfalls richtig, wenn ich zeigen kann, daß

$$T_n = \sum_{\nu=0}^{n} (\phi_\nu + \phi'_\nu + \phi''_\nu) = (1+x)(1+y) D_n$$

wird. Da ferner diese Gleichung für $n = 0$ und $n = 1$ leicht zu bestätigen ist, habe ich nur zu beweisen, daß die Ausdrücke T_n der Rekursionsformel (6) genügen, daß also

$$\Delta_n = T_n - (1 + t^n x + t^n y) T_{n-1} = (t^{n+1} - t^{2n}) T_{n-2}$$

ist.

Der Beweis stützt sich auf die aus (8) folgenden Relationen

$$\phi_n = t^n x (T_{n-2} + \phi_{n-1}) \tag{10}$$

$$\phi'_n = \frac{y}{x} \phi_n + t^n y \phi'_{n-1} \tag{11}$$

$$\phi''_n = x \phi'_n = y \phi_n + t^{n+1} \phi'_{n-1}. \tag{12}$$

Ferner ist

$$\phi_n = t^n x (T_{n-1} - \phi'_{n-1} - \phi''_{n-1}),$$

also

$$\phi_n = t^n x (T_{n-1} - (1+x) \phi'_{n-1}), \tag{13}$$

und dazu tritt

$$\phi'_n = t^n y (T_{n-1} - \phi''_{n-1}) = t^n y (T_{n-1} - x \phi'_{n-1}).$$

Das liefert

$$\phi_n + \phi'_n = T_n - T_{n-1} - \phi''_n = (t^n x + t^n y) T_{n-1} - t^n (x + x^2 + xy) \phi'_{n-1},$$

also

$$\Delta_n = \phi''_n - t^n x (1+x) \phi'_{n-1} - t^{n+1} \phi'_{n-1}$$

oder wegen (12)

$$\Delta_n = y \phi_n - t^n x (1+x) \phi'_{n-1}.$$

Aus (10) und (11) folgt nun weiter

$$\begin{aligned} \Delta_n &= t^{n+1} T_{n-2} + t^{n+1} \phi_{n-1} - t^n (1+x)(y \phi_{n-1} + t^n \phi'_{n-2}) \\ &= t^{n+1} T_{n-2} - t^n y \phi_{n-1} - t^{2n} (1+x) \phi'_{n-2}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Formel (13) wird aber

$$y \phi_{n-1} + t^n (1+x) \phi'_{n-2} = y \cdot t^{n-1} x \big(T_{n-2} - (1+x) \phi'_{n-2}\big) + t^n (1+x) \phi'_{n-2}.$$

Das ist einfach $t^n T_{n-2}$ und daher wird in der Tat $\Delta_n = (t^{n+1} - t^{2n}) T_{n-2}$.

§ 3. Beweis des Satzes III.

Wir betrachten zunächst die Zerlegungsfunktion $B(n)$. Um diese Anzahl zu erhalten, denke man sich alle Summen

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_r \tag{14}$$

positiver ganzer Zahlen aufgestellt, die der Bedingung genügen, daß für $r > 1$ jede Differenz $b_\varkappa - b_{\varkappa+1}$ mindestens gleich 3 und, falls $b_\varkappa$ und $b_{\varkappa+1}$ durch 3 teilbar sind, mindestens gleich 6 sein soll. Die Zahl $B(n)$ ist dann gleich der Anzahl derjenigen Summen (14), die den Wert n haben.

Man fasse nun alle Summen (14) ins Auge, bei denen der größte Summand b_1 einen vorgeschriebenen Wert m hat. Es gibt nur endlich viele solche Summen. Ihre Werte seien

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \cdots, \quad n_M. \qquad (n_\mu \leqq n_{\mu+1})$$

Ist z eine Veränderliche, so bilde man die Polynome

$$\psi_1 = 1 + z, \quad \psi_m = z^{n_1} + z^{n_2} + \cdots + z^{n_M}. \qquad (m > 1)$$

Es wird insbesondere

$$\psi_2 = z^2, \quad \psi_3 = z^3, \quad \psi_4 = z^4 + z^{4+1}, \quad \psi_5 = z^5 + z^{5+1} + z^{5+2},$$
$$\psi_6 = z^6 + z^{6+1} + z^{6+2}.$$

Man überlegt sich leicht, daß

$$\psi_{3\nu+1} = z^{3\nu+1}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_{3\nu-2}),$$
$$\psi_{3\nu+2} = z^{3\nu+2}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_{3\nu-1}),$$
$$\psi_{3\nu+3} = z^{3\nu+3}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_{3\nu-1})$$

wird.

Führt man nun die Bezeichnungen

$$\psi_{3\nu+1} = \phi_\nu, \quad \psi_{3\nu+2} = \phi'_\nu, \quad \psi_{3\nu+3} = \phi''_\nu$$

ein, so erkennt man, daß diese Ausdrücke genau nach den Vorschriften des vorigen Paragraphen zu berechnen sind, wenn

$$x = z, \quad y = z^2$$

gesetzt wird. Ist außerdem

$$T_n = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_{3n+3} = 1 + C(1)z + \cdots + C(\nu)z^\nu + \cdots,$$

so wird offenbar für $\nu \leqq 3n + 3$ der Koeffizient $C(\nu)$ nichts anderes als unsere Anzahl $B(\nu)$. Aus der Entwicklungsformel (9) geht also hervor, daß für

$$\alpha = z + z^2, \quad t = z^3 \qquad (|z| < 1)$$

die Gleichung

$$(1 + z)(1 + z^2)D = \sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n \tag{15}$$

gilt.

Andererseits ist

$$(1 + z)(1 + z^2)P = (1 + z)(1 + z^2)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + z^{3\nu}(z + z^2) + z^{6\nu+3}\right)$$
$$= \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + z^{3\nu+1})(1 + z^{3\nu+2}).$$

Dieses unendliche Produkt P_1 ist aber gleich der zu der Zerlegungsanzahl $A(n)$ gehörenden erzeugenden Funktion

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z^{6\nu+1})(1-z^{6\nu+5})} = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) z^n . \tag{16}$$

Denn schreibt man den links stehenden Ausdruck in der Form

$$\frac{\prod (1-z^{6\nu+2})(1-z^{6\nu+4})}{\prod (1-z^{6\nu+1})(1-z^{6\nu+2})(1-z^{6\nu+4})(1-z^{6\nu+5})},$$

so treten im Nenner alle zu 3 teilerfremde Exponenten auf, er kann daher auch in der Form

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} (1-z^{3\nu+1})(1-z^{3\nu+2})$$

geschrieben werden. Folglich wird der Quotient gleich unserem Produkte P_1[1].

Die Gleichungen (15) und (16) liefern nun wegen $D = P$ den zu beweisenden Satz $A(n) = B(n)$.

Man erkennt leicht, daß unsere Betrachtung eine Verallgemeinerung zuläßt. Setzt man, wenn $|z| < 1$ ist, und $\alpha < \beta$ zwei positive ganze Zahlen mit der Summe $\alpha + \beta = k$ bedeuten, im vorigen Paragraphen

$$x = z^{\alpha}, \quad y = z^{\beta}, \quad t = xy = z^{k},$$

so liefert die Formel (9) in Verbindung mit der Gleichung $D = P$ den Satz:

V. *Ist $k \geqq 3$ eine positive ganze Zahl, α eine positive ganze Zahl unterhalb $\frac{k}{2}$ und versteht man unter β die Differenz $k-\alpha$, so wird die Anzahl der Zerlegungen einer beliebigen positiven ganzen Zahl n in voneinander verschiedene Summanden der Form $k\nu+\alpha$ oder $k\nu+\beta$ gleich der Anzahl der Zerlegungen*

$$n = b_1 + b_2 + \cdots + b_r \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

in Summanden der Form $k\nu+\alpha$, $k\nu+\beta$ oder $k\nu$, wenn noch verlangt wird, daß für $r > 1$ jede Differenz $b_\varrho - b_{\varrho+1}$ mindestens gleich k, und, falls b_ϱ und $b_{\varrho+1}$ durch k teilbar sind, mindestens gleich $2k$ sein soll.

---

[1] Diese Überlegung ist dem bekannten Beweis der EULERschen Identität (4) nachgebildet. Vgl. hierzu P. BACHMANN, Additive Zahlentheorie, Leipzig 1910, S. 109.

Ausgegeben am 25. Januar 1927.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Adressen: an Wilhelm Branca zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 74. 75. — an Gottlieb Haberlandt zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 405. 406–407.

Anatomie und Physiologie: Geldbewilligung an Prof. Dr. Weidenreich für anthropologische Untersuchungen. 90. — Geldbewilligung an Dr. Fritz Levy für Untersuchungen über Zellteilungsphysiologie. 332. — Die Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen, von Rubner. 38. 384–403. — Maßverhältnisse an den oberen Gliedmaßen der Menschen und den Gliedmaßen des Menschenaffen. von Fick. 77. 417–451.

Antrittsreden: Wagner. XCV–XCVII. Erwiderung von Planck. XCVIII–XCIX. — Stumpf. XCVII–XCVIII. Erwiderung von Planck. XCVIII–XCIX.

Astronomie: Geschichte des Fixsternhimmels. LXV. 291. — Geldbewilligung für Karl Schoy »Die Trigonometrischen Lehren des ostarabischen Astronomen al-Birûnî. 21. — Geldbewilligung an Ludendorff für die Expedition des Astrophysikalischen Observatoriums nach La Paz. 90. — Die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie, von Guthnick und R. Prager. 274. 275–289. — Geldbewilligung an Prof. Dr. Kopff für die Bearbeitung des Sternkatalogs. 291. — Die deutsche astronomische Expedition nach Bolivia, von Ludendorff. 352.

Baur, Dr., in Dahlem, Geldbewilligung an ihn für eine botanische Sammelreise nach Kleinasien. 90.

Bieberbach. Bericht der Kronecker-Kommission. LXXVII.

—, Geldbewilligung an ihn für die Herausgabe der Werke Kroneckers. 90.

—, Über Tchebychefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten. 293. 294–321.

Biographisches Jahrbuch, Deutsches: Bericht. LXXXIII. — Geldbewilligung. 90.

Bodenstein, Reaktionsgeschwindigkeit bei Umsetzungen von Atomen. 103. 104–114.

Botanik: Das Pflanzenreich. LXV. 90. — Flora von Papuasien und Mikronesien. LXXXII. 37. 90. — Geldbewilligung an Prof. Dr. Baur für eine botanische Sammelreise nach Kleinasien. 90. — Versuche über das genetische Verhalten kleistogamer Blütenpflanzen. von Correns. 76. — Über den Blattbau von *Crataegomespili* von Bronvaux und ihrer Eltern, von Haberlandt. 169. 170–208.

Branca, Wilhelm, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 74. 75.

Brauer, R., Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invarianten-theoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. 359. 410–416.

Carst, A., siehe Ladenburg, R.

Chemie: Geldbewilligung für Peters und Gehler für Untersuchung einer Heliumquelle in Westfalen. 466. — Die Verdünnungswärme von Salzen bei sehr kleinen Konzentrationen. von Nernst und W. Orthmann. 21. 51–56. — Reaktionsgeschwindigkeit bei Umsetzungen von Atomen, von Bodenstein. 103. 104–114. — Die Entwicklung der »Radikaltheorie« in der organischen Chemie, von Schlenk. 115. — Gold und Silber im Meerwasser, von Haber. 169. — Über die Bildung von Nitrit und Nitrat aus Ammoniak, Harnstoff, Cyanaten, Calciumcyanamid bei Temperaturen unter Rotglut, von K. A. Hofmann. 209. — Untersuchungen über die anomale Dispersion. von R. Ladenburg, H. Kopfermann und A. Carst. 253. 255–273. — Die Bildung des Ammoniaks aus den Elementen im Siemensrohr nach Versuchen mit W. Rump, von Warburg. 452.

Correns, Carl W., Über die Erklärung der sogenannten Kristallisationskraft. 78. 81–88.

Correns, Karl, Versuche über das genetische Verhalten kleistogamer Blütenpflanzen. 76.

Ehlers, Ernst, gestorben. 21.

Einstein, Über die Ursache des »Mäander«-Phänomens bei Flußläufen. 1.

—, Über die Anwendung einer von Rainich gefundenen Spaltung des Riemannschen Krümmungstensors in der Theorie des Gravitationsfeldes. 1.

—, Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes. 274. 334–340.

Engler, Bericht über das Pflanzenreich. LXV.

—, Bericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien. LXXXII.

Euler-Ausgabe: Geldbewilligung. 466. — Veröffentlichung. 293.

Festreden: Ansprache gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages, von Planck. LXXXV–XC. CV–CVII.
Fick, Maßverhältnisse an den oberen Gliedmaßen des Menschen und den Gliedmaßen des Menschenaffen. 77. 417–451.
von Ficker, zum ordentlichen Mitglied gewählt. 353.
Fixsternhimmel, Geschichte desselben: Bericht. LXV. — Geldbewilligung. 291.
Flora von Papuasien und Mikronesien: Bericht. LXXXII. — Veröffentlichung. 37. Geldbewilligung. 90.
Gedächtnisreden: auf Gustav Müller von Guthnick. XCIX–CII. — auf Müller-Breslau von Joh. Stumpf. CII–CV.
Gehler, siehe: Peters, K.
Geldbewilligungen: Biographisches Jahrbuch. 90. — Tierreich. 90. 466. — Pflanzenreich. 90. — Flora von Papuasien. 90. — Nomenclator animalium generum et subgenerum. 90. 332. — Geschichte des Fixsternhimmels. 291. — Euler-Ausgabe. 466. — Karl Schoy »Die trigonometrischen Lehren des ostarabischen Astronomen al-Birûni«. 21. — Baur für eine botanische Forschungsreise nach Kleinasien. 90. — Ludendorff für die Expedition des astrophysikalischen Observatoriums nach La Paz. 90. — Weidenreich für anthropologische Untersuchungen. 90. — Schmiedeknecht für seine Opuscula Ichneumonologica. 90. — Jüngst für geologische Arbeiten. 90. — Frl. Stein für Untersuchungen über Radiomorphosen. 90. — Bieberbach für die Herausgabe der Werke Kroneckers. 90. — Kopff für die Herausgabe des Sternkatalogs. 291. — Herbert Louis für eine Forschungsreise nach Bulgarien. 332. — Fritz Levy für Untersuchungen über Zellteilungsphysiologie. 332. — Peters und Gehler für Untersuchung einer Heliumquelle in Westfalen. 466.
Geographie: Über nordalpine Ablagerungssynklinalen, von Penck. 22. — Geldbewilligung für Dr. Herbert Louis für eine Forschungsreise nach Bulgarien. 332.
Geologie: Geldbewilligung an Dr. Jüngst für geologische Arbeiten. 90.
Golgi Camillo, gestorben. 77.
Guthnick. Bericht über die »Geschichte des Fixsternhimmels«. LXV.
—, Gedächtnisrede auf Gustav Müller. XCIX–CIV.
—, Die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie. Mit R. Prager. 274. 275–289.
Haber, Gold und Silber im Meerwasser. 169.
Haberlandt, Über den Blattbau der *Crataegomespili* von Bronvaux und ihrer Eltern. 169. 170–208.
Haberlandt. Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 405. 406–407.
Hahn, Neue Gesetzmäßigkeiten bei der Fällung und Adsorption kleiner Substanzmengen und deren experimentelle Begründung. 333.
Hartwig, Wilhelm, Die Kristallstruktur einiger Mineralien der regulären Hg S-Reihe. 78. 79—80.
Heider, Bericht über den »Nomenclator animalium generum et subgenerum«. XXXII–XXXV. LXIV.
—, Bericht über das Tierreich. LXIV.
—, Die Sinneszellen (Sinnesganglien) in der Haut der *Aphroditidae*. 73.
Hellmann, Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland von den ersten Anfängen bis zur Einrichtung staatlicher Beobachtungsnetze (*Abh.*). 290.
Hofmann, Franz, zum ordentlichen Mitglied gewählt. 91.
—, gestorben. 209.
Hofmann, Karl Andreas, Über die Bildung von Nitrit und Nitrat aus Ammoniak, Harnstoff, Cyanaten, Calciumcyanamin bei Temperaturen unter Rotglut. 209.
Ibscher, Hugo, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CVI.
Johnsen, Form und Brillanz des Brillanten. 210. 322—330.
Jüngst, Dr., in Darmstadt, Geldbewilligung an ihn für geologische Arbeiten. 90.
Kamerlingh Onnes, Heike, gestorben. 74.
Keibel, Die Unterscheidungsmerkmale zwischen *Lampetra (Petromyzon) fluviatilis* und *Lampetra (Petromyzon) planeri* und die Biologie dieser Tiere. 290.
Kneser, Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung. 134. 142—168.
Kopfermann, H., siehe Ladenburg, R.
Kopff, Prof. Dr., in Berlin, Geldbewilligung an ihn für die Herausgabe des Sternkatalogs. 291.
Kronecker-Kommission: Bericht. LXXVII. Geldbewilligung. 90.
Ladenburg, R., Untersuchungen über die anomale Dispersion. Mit H. Kopfermann und A. Carst. 253. 255–273.
Landau, Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante. 465. 467–474.
von Laue, Die Zerstreuung inhomogener Röntgenstrahlen an mikrokristallinen Körpern. Mit H. Mark. 58. 59–72.
Leibniz-Ausgabe: Bericht. LXV–LXVI. Veröffentlichung. 254.
Leibniz-Medaille: Verleihung. CVI–CVII.
Lenel, Walter, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CVI.
Levy, Dr. Fritz, Geldbewilligung an ihn für Untersuchungen über Zellteilungsphysiologie. 332.

Literaturzeitung, Deutsche: Bericht. LXVI.

Louis, Dr. Herbert, in Berlin, Geldbewilligung an ihn für eine Forschungsreise nach Bulgarien. 332.

Ludendorff, Geldbewilligung an ihn für die Expedition des Astrophysikalischen Observatoriums nach La Paz. 90.

—, Die deutsche astronomische Expedition nach Bolivia. 352.

Mark, H., siehe von Laue.

Mathematik: Euler-Ausgabe. 293. 466. — Herausgabe der Werke von Weierstraß. LXIII. — Kronecker-Kommission. LXXVII. 90. — Geldbewilligung für Karl Schoy »Die trigonometrischen Lehren des ostarabischen Astronomen al-Birûni. 21. — Grundlagen der Arithmetik, von Erhard Schmidt. 78. — Zur additiven Zahlentheorie, von Schur. 132. — Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung, von Kneser. 134. 142–168. — Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen, von G. Szegö. 169. 242–252. — Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen, von H. Weyl. 210. 211–214. — Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume, von Fr. Schottky. 215–241. — Über Tchebychefsche Netze auf Flächen mit negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächen, von Bieberbach. 293. 294–321. — Über die Differentialgleichungen, denen eine Gruppe von sechs Sigma-Quotienten genügt, von Fr. Schottky. 359. — Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invarianten-theoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, von R. Branca. [illegible] 410–416. — Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie I., von Study. 35[illegible]. 360–380. — Zusatz zu dieser Abhandlung, von E. A. Weiss. 359. 381–383. — Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante, von Landau. 465. 467–474.

Meteorologie: Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland von den ersten Anfängen bis zur Einrichtung staatlicher Beobachtungsnetze, von Hellmann (*Abh.*). 290. — Über atmosphärische Störungen des drahtlosen Empfangs, von Wagner. 409.

Mineralogie: Die Kristallstruktur einiger Mineralien der regulären Hg S-Reihe, von Wilhelm Hartwig. 78. 79–80. — Über die Erklärung der sogenannten Kristallisationskraft, von Carl W. Correns. 78. 81–88. — Form und Brillanz des Brillanten, von Johnsen. 210. 322–330.

Müller, Gustav, Gedächtnisrede auf ihn von Guthnick. XCIX–CII.

Müller-Breslau, Gedächtnisrede auf ihn von Joh. Stumpf. CII–CV.

Nernst, Die Verdünnungswärme von Salzen bei sehr kleinen Konzentrationen. Mit W. Orthmann. 21. 51–56.

Nomenclator animalium generum et subgenerum: Bericht. XXXII–XXXV. LXIV. — Veröffentlichung. 77. 169. 404. — Geldbewilligung. 90. 332.

Orthmann, W., siehe: Nernst.

Paläontologie: Untersuchungen an fossilen Walen. III, von Pompeckj. 475.

Paschen, Serienenden und molekulare Felder. 133. 135–141.

—, Spektroskopische Lichtquellen. 408.

Penck, Über nordalpine Ablagerungssynklinalen. 22.

Peters, K., Geldbewilligung an ihn und Gehler für die Untersuchung einer Heliumquelle in Westfalen. 466.

Pflanzenreich: Bericht. LXV. — Geldbewilligung. 90.

Physik: Geldbewilligung an Frl. Dr. Stein für Untersuchungen über Radiomorphosen. 90. — Über die Ursache des »Mäander«-Phänomens bei Flußläufen, von Einstein. 1. — Über die Anwendung einer von Rainich gefundenen Spaltung des Riemannschen Krümmungstensors in der Theorie des Gravitationsfeldes, von Einstein. 1. — Die Energiestufen des idealen einatomigen Gasmodells, von Erwin Schrödinger. 1. 23–36. — Die Zerstreuung inhomogener Röntgenstrahlen an mikrokristallinen Körpern, von von Laue und H. Mark. 57. 58–72. — Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektrodynamik, von Walter Schottky. 89. 116–131. — Serienenden und molekulare Felder, von Paschen. 133. 135–141. — Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes, von Einstein. 274. 334–340. — Neue Gesetzmäßigkeiten bei der Fällung und Adsorption kleiner Substanzmengen und deren experimentelle Begründung, von Hahn. 333. — Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichts, von E. Rupp. 333. 341–351. — Spektroskopische Lichtquellen, von Paschen. 408. — Über atmosphärische Störungen des drahtlosen Empfangs, von Wagner. 409. — Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, von Planck. 452. 453–463. Thermisch erregte Quantensprünge in festen Körpern, von F. Simon. 475. 477–487. — Die Ausbreitung kurzer elektrischer Wellen rund um die Erde, von Wagner. 475.

Planck, Bericht über die Herausgabe der Werke von Weierstrass. LXIII.

—, Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages. LXXXV–XC. CV–CVII.

—, Erwiderung auf die Antrittsreden der HH. Wagner und Joh. Stumpf. XCVIII–XCIX.

Planck, Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. 452. 453–463.
Poggendorffs biographisch-literarisches Handbuch: Veröffentlichung. 293.
Pompeckj, Untersuchungen an fossilen Walen. III. 475.
Prager, R., siehe Guthnick.
Preise: Akademische Preisaufgabe für 1929. CV.
Roethe, Gustav, gestorben. 353.
Rubner, Die Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen. 38. 384–403.
Rump, W., siehe: Warburg.
Rupp, E., Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichts. 333. 341–351.
Schlenk, Die Entwicklung der »Radikaltheorie« in der organischen Chemie. 115.
Schmidt, Erhard, Grundlagen der Arithmetik. 78.
Schmiedeknecht, Prof. Dr., in Blankenburg i. Th., Geldbewilligung an ihn für seine Opuscula Ichneumonologica. 90.
Schottky, Friedrich, Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume. 215–241.
—, Über die Differentialgleichungen, denen eine Gruppe von sechs Sigma-Quotienten genügt. 359.
Schottky, Walter, Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektrodynamik. 89. 116–131.
Schrödinger, Erwin, Die Energiestufen des idealen einatomigen Gasmodells. 1. 23–36.
Schur, Zur additiven Zahlentheorie. 132.
Seemann, Hugo, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CVI–CVII.
Simon, F., Thermisch erregte Quantensprünge in festen Körpern. 475. 477–487.
Stein, Frl. Dr., in Berlin, Geldbewilligung an sie für Untersuchungen über Radiomorphosen. 90.
Study, Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie. I. 359. 360–380. Mit Zusatz von E. A. Weiss.
Stumpf, Johannes, zum ordentlichen Mitglied gewählt. 37.
—, Antrittsrede. XCVII–XCVIII.
—, Gedächtnisrede auf Müller-Breslau. CII–CV.
Szegö, G., Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. 169. 242–252.
Technik: Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung, von Zimmermann. 1. 2–19. — Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung, von Zimmermann. 38. 39–50. — Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen mit Form- und und Belastungsfehlern, von Zimmermann. 89. 92–101.
Tierreich: Bericht. LXIV. — Veröffentlichung. 77. 333. — Geldbewilligung. 90. 466.
Todesanzeigen: Rudolf von Valentini. 21. — Ernst Ehlers. 21. — Heike Kamerlingh Onnes. 74. — Camillo Golgi. 77. — Franz Hofmann. 209. — Gustav Roethe. 353.
Valentini, Rudolf von, gestorben. 21.
Wagner, Antrittsrede. XCV–XCVII.
—, Über atmosphärische Störungen des drahtlosen Empfangs. 409.
—, Die Ausbreitung kurzer elektrischer Wellen rund um die Erde. 475–476.
Wahl ordentlicher Mitglieder: Johannes Stumpf. 37. — Franz Hofmann. 91. — Heinrich von Ficker. 353.
Warburg, Die Bildung des Ammoniaks aus den Elementen im Siemensrohr, nach Versuchen mit W. Rump. 452.
Weidenreich, Prof. Dr., in Heidelberg, Geldbewilligung an ihn für anthropologische Untersuchungen. 90.
Weierstrass: Herausgabe seiner Werke: Bericht. LXIII.
Weiss, E. A., Zusatz zu der vorausgehenden Abhandlung (von Study). 359. 381–383.
Wentzel-Stiftung: Bericht. LXXVIII–LXXXIII.
Weyl, H., Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. 210. 211–214.
Zimmermann, Die Formänderungen gekrümmter Stäbe bei Längs- und Querbelastung. 1. 2–19.
—, Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung. 38. 39–50.
—, Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen mit Form- und Belastungsfehlern. 89. 82–101.
Zoologie: Das Tierreich. LXIV. 77. 90. 333. 466. — Nomenclatar animalium generum et subgenerum. XXXII–XXXV. LXIV. 90. 77. 169. 332. 404. — Geldbewilligung an Prof. Dr. Schmiedeknecht für seine Opuscula Ichneumonologica. 90. — Die Sinneszellen (Sinnesganglien) in der Haut der *Aphroditidae*, von Heider. 73. — Die Unterscheidungsmerkmale zwischen *Lampetra (Petromyzon) fluviatilis* und *Lampetra (Petromyzon) planeri* und die Biologie dieser Tiere, von Keibel. 290.

Berichtigung.

S. 378 Zeile 19 (v. oben) soll es heißen »orientierte« statt »verschiedene«.

Ausgegeben am 25. Januar 1927.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



